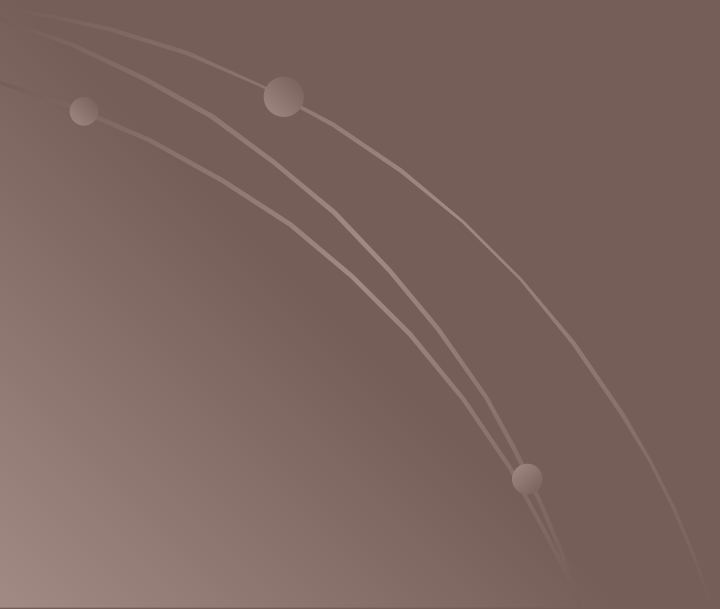


Координаты вектора в пространстве.
Скалярное и векторное произведения
векторов.



8. Пусть в пространстве $Oxyz$ задан вектор \vec{a}

Проекция $a_x = \text{pr}_x \vec{a}$, $a_y = \text{pr}_y \vec{a}$, $a_z = \text{pr}_z \vec{a}$ вектора на оси координат называются координатами вектора \vec{a}

$$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$$

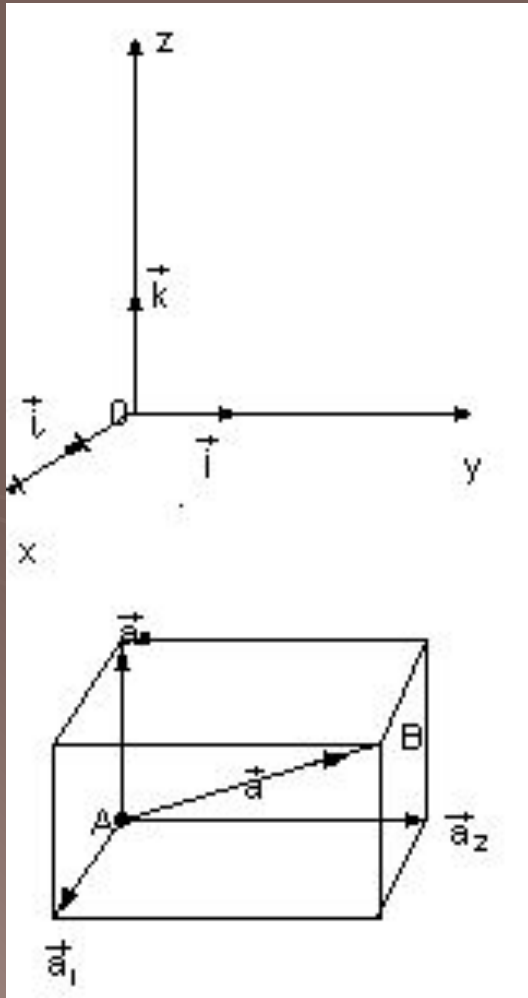
Def: Длина (модуль) вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Def: Расстояние между двумя точками пространства равно корню квадратному из суммы квадратов разностей одноименных координат этих точек.

$$|\overline{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

9. Введем единичные векторы (орты) i, j, k , направленные по осям координат. Они не равны, так как являются единичными векторами неколлинеарных векторов.



$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$$

$$\vec{a}_1 = a_x \cdot \vec{i}$$

$$\vec{a}_2 = a_y \cdot \vec{j}$$

$$\vec{a}_3 = a_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Это разложение единственно!

Рассмотренные выше линейные операции над векторами можно теперь записать в следующем виде:

$$1) \quad \lambda \vec{a} = \{ \lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z \}$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_{x \cdot i} + \lambda a_{y \cdot j} + \lambda a_{z \cdot k} \quad \text{П- скаляр}$$

При умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр.

$$2) \quad \vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j} + (a_z \pm b_z) \vec{k}$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{ a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z \}$$

При сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (или вычитаются).

Векторы коллинеарные тогда и только тогда, когда их одноименные координаты пропорциональны.

10. Скалярное произведение векторов.

Def: Под скалярным произведением двух векторов \vec{a} и \vec{b} понимается число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е

$$a \cdot b = (a, b) = |a| |b| \cdot \cos(a, b)$$

Этой формуле можно придать другой вид. Так как

$$|a| \cos \varphi = \frac{a \cdot b}{|b|}, \quad |b| \cos \varphi = \frac{a \cdot b}{|a|}$$

то получаем:

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \varphi = |a| \left(\frac{a \cdot b}{|a|} \right) = |a| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$$

СВОЙСТВА:

$$1) \quad \overset{\boxtimes}{a} \cdot \overset{\boxtimes}{b} = \overset{\boxtimes}{b} \cdot \overset{\boxtimes}{a}$$

$$2) \quad \left(\overset{\boxtimes}{a} + \overset{\boxtimes}{b} \right) \cdot \overset{\boxtimes}{c} = \overset{\boxtimes}{a} \overset{\boxtimes}{c} + \overset{\boxtimes}{b} \overset{\boxtimes}{c}$$

$$3) \quad \overset{\boxtimes}{a}^2 = \left| \overset{\boxtimes}{a} \right|^2$$

$$\sqrt{\overset{\boxtimes}{a}^2} = \left| \overset{\boxtimes}{a} \right|$$

4) Скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения, т.е

$$\left(\lambda \overset{\boxtimes}{a}, \overset{\boxtimes}{b} \right) = \left(\overset{\boxtimes}{a}, \lambda \overset{\boxtimes}{b} \right) = \lambda \left(\overset{\boxtimes}{a}, \overset{\boxtimes}{b} \right)$$

5) Скалярное произведение линейной комбинации векторов на произвольный вектор равно такой же линейной комбинации данных векторов на этот вектор, т.е

$$(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{c}) + \mu (\vec{b}, \vec{c})$$

6)

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Скалярное произведение в координатной форме.

$$\vec{a} = a_{xi} \vec{e}_i + a_{yj} \vec{e}_j + a_{zk} \vec{e}_k$$

$$\vec{b} = b_{xi} \vec{e}_i + b_{yj} \vec{e}_j + b_{zk} \vec{e}_k$$

Перемножим \vec{a} и \vec{b} как многочлен и учитывая, что

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{i}\vec{k} = 0$$

$$\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$$

будем иметь $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Скалярное произведение векторов равно сумме парных произведений их одноименных координат

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Проекция вектора на заданное направление

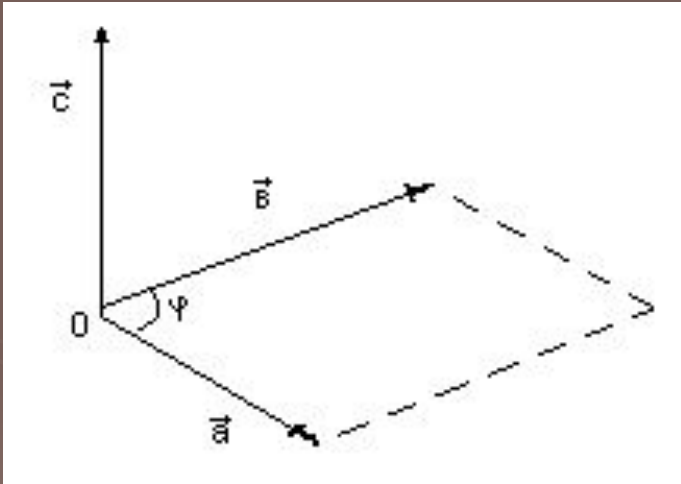
Нахождение проекции вектора \vec{a} на направление, заданное вектором \vec{b} , может осуществляться по формуле

$$np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \left(np_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \right), \text{ т.е. } np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Векторное произведение векторов

Def: Под векторным произведением двух векторов \vec{a} и \vec{b} понимается вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$, для которого:

1) Модуль равен площади параллелограмма, построенного на двух векторах, т.е. $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \sin \phi$, где $\phi = (\vec{a}, \vec{b}), (0 \leq \phi \leq \pi)$



2) Этот вектор перпендикулярен перемножаемым векторам (перпендикулярен плоскости параллелограмма), т.е. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$

Свойства векторного произведения

1) При изменении порядка сомножителей векторное произведение меняет свой знак на обратный, сохраняя модуль, т.е. $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$

2) Векторный квадрат равен нулю вектору, т.е. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

3) Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения, т.е. если λ - скаляр, то

$$(\lambda \vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

4) Для трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедливо равенство

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$$

Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов \vec{a} и \vec{b}

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

Векторное произведение в координатной форме

Пусть

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

Перемножая векторно эти равенства и используя сумму девяти слагаемых

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left[a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \right] +$$

$$+ \left[a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) \right] +$$

$$+ \left[a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) \right] = \dots$$

Для ортов $\overset{\square}{i}, \overset{\square}{j}, \overset{\square}{k}$ справедлива следующая «таблица умножения»:

$$\overset{\square}{i} \times \overset{\square}{i} = \overset{\square}{0}, \overset{\square}{j} \times \overset{\square}{j} = \overset{\square}{0}, \overset{\square}{k} \times \overset{\square}{k} = \overset{\square}{0}$$

$$\overset{\square}{i} \times \overset{\square}{j} = -(\overset{\square}{j} \times \overset{\square}{i}) = \overset{\square}{k}$$

$$\overset{\square}{j} \times \overset{\square}{k} = -(\overset{\square}{k} \times \overset{\square}{j}) = \overset{\square}{i}$$

$$\overset{\square}{k} \times \overset{\square}{i} = -(\overset{\square}{i} \times \overset{\square}{k}) = \overset{\square}{j}$$

Поэтому получаем:

$$\begin{aligned} \dots &= -a_y b_x k + a_z b_x j + a_x b_y k - a_z b_y i - a_x b_z j + a_y b_z i = \\ &= i(b_y z - b_z y) + j(a_z x - b_x z) + k(a_x y - b_y x) = \\ &= i \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

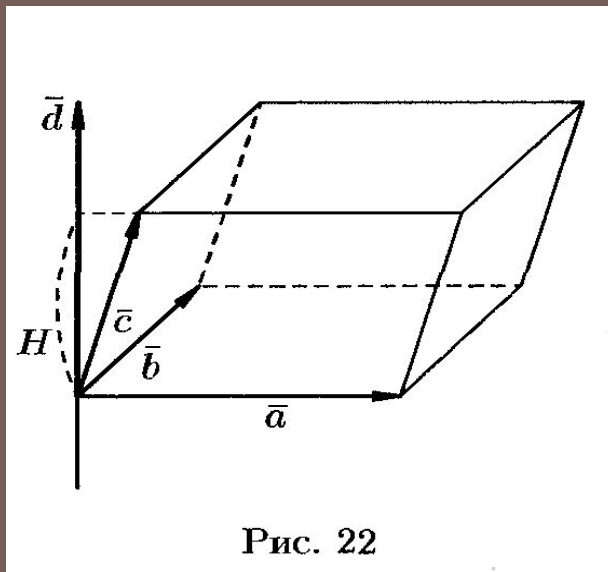
СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение смешанного произведения, его геометрический смысл

- Рассмотрим произведение векторов \vec{a} и \vec{b} , составленное следующим образом: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор. Такое произведение называется *векторно-скалярным*, или *смешанным*, произведением трех векторов. Смешанное произведение представляет собой некоторое число.
- Выясним геометрический смысл выражения

и вектор

- Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} и ВЕКТОР $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$



Имеем:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot \text{пр}_{\vec{d}} \vec{c}, \quad |\vec{d}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = S$$

где S - площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , $\text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = H$ для правой тройки векторов и для левой, где H - высота параллелепипеда.

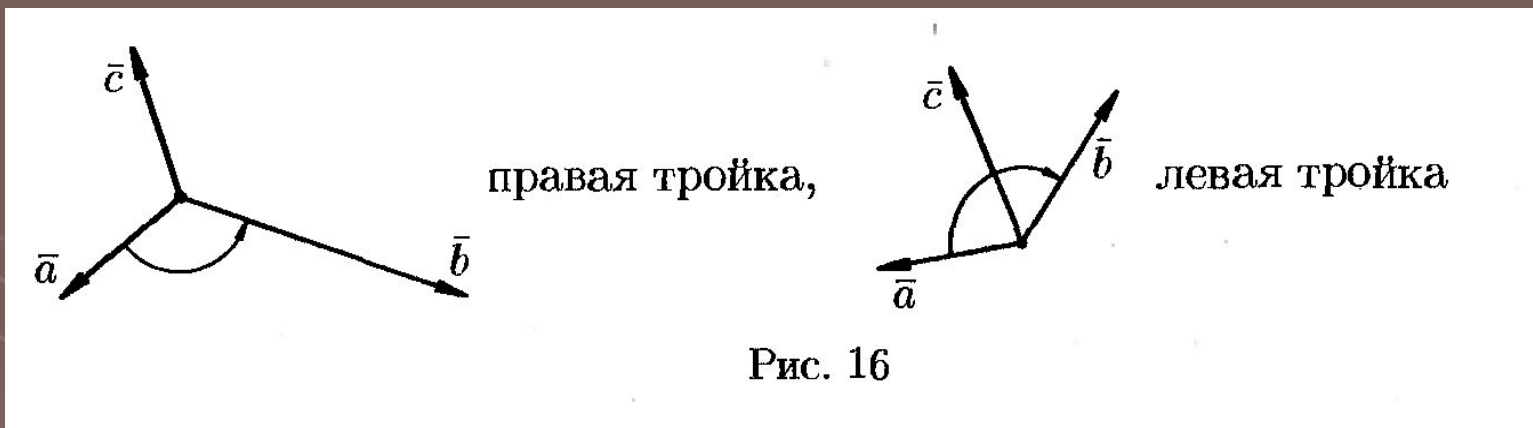
Получаем:

т.е.
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = S \cdot (\pm H)$$

где $V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V$ - объем параллелепипеда, образованного векторами \vec{a} и \vec{b} и \vec{c}

Таким образом, смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.

Три некопланарных вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} взятые в указанном порядке, образуют **правую** тройку, если с конца третьего вектора \vec{c} кратчайший поворот от первого вектора \vec{a} ко второму вектору \vec{b} виден совершающимся против часовой стрелки, и **левую**, если по часовой



Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т.е.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

2. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения, т.е.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

3. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей, т.е.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}), \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}), \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

4. Смешанное произведение ненулевых векторов \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \mathbf{0}$ - компланарны

Выражение смешанного произведения через координаты

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Нетрудно показать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} вычисляется как,

$$V = |\overline{abc}|$$

а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен

$$V = \frac{1}{6} |\overline{abc}|$$

Пример. Вершинами пирамиды служат точки
 $A(1;2;3)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;5;2)$, $D(3;0;-2)$

Найти объем пирамиды

Решение: Находим векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c}

$$\vec{a} = \overline{AB} = (-1; -3; -2), \quad \vec{b} = \overline{AC} = (1; 3; -1)$$

$$\vec{c} = \overline{AD} = (2; -2; -5)$$

Находим \overline{abc}

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-17) + 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-8) = 17 - 9 + 16 = 24$$

Следовательно, $V = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$