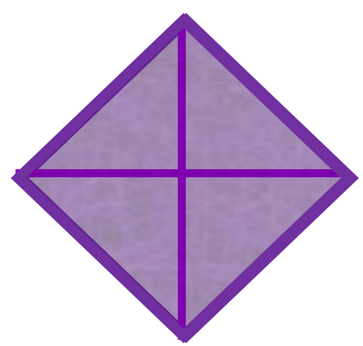
«МЕТОД ОБЛАСТЕЙ В ЗАДАЧАХ С ПАРАМЕТРОМ».



ПРИМЕР 1. Указать множество точек плоскости $(X;Y)$, удовлетворяющих неравенству $xy^2 - x^3 \le 0.$

$$x\left(y^2 - x^2\right) \le 0,$$

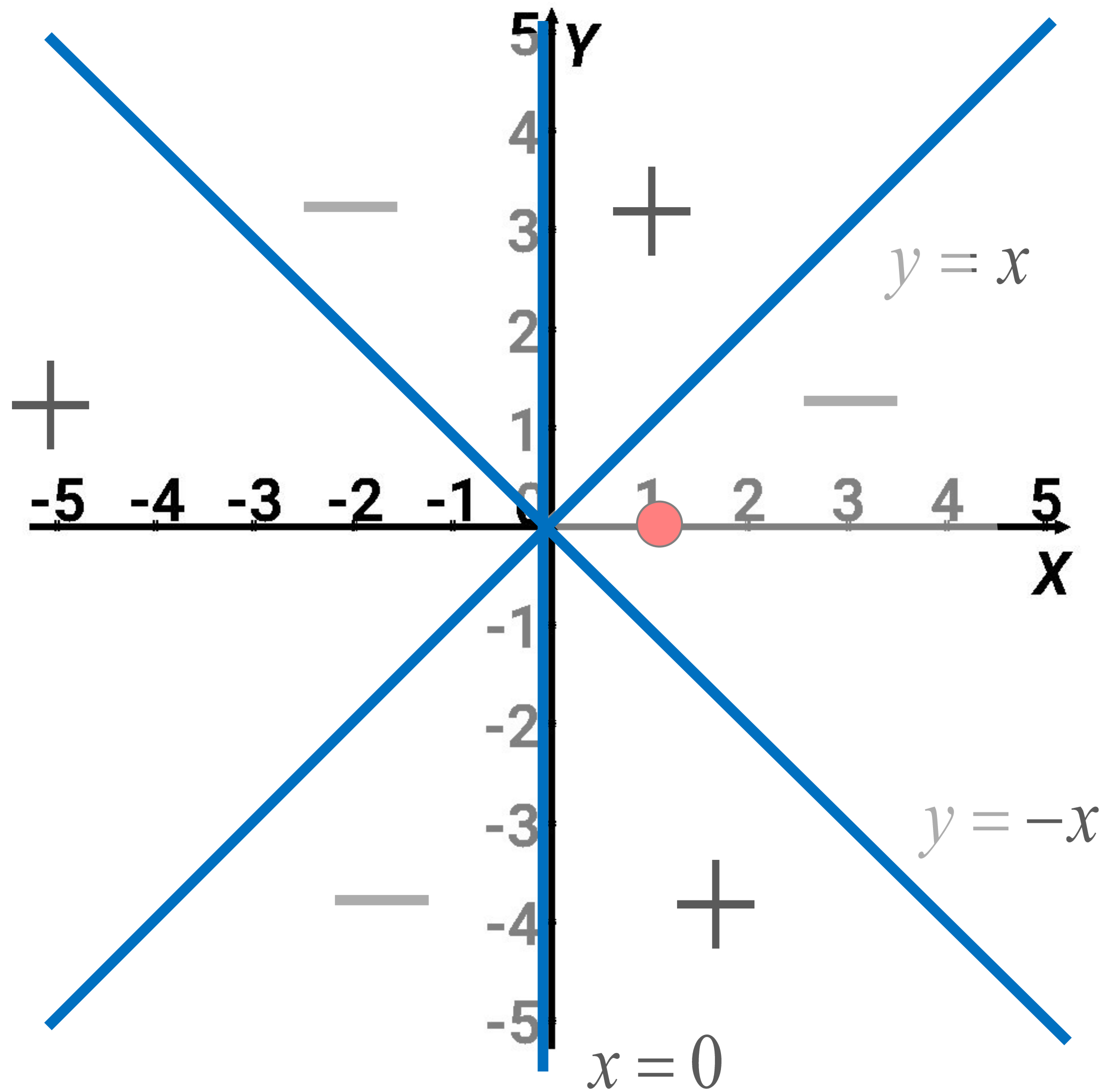
$$x(y-x)(y+x) \le 0,$$

Построим границы (графики функций)

$$x = 0,\ y = x,\ y = -x$$

Проверим знак одной из областей.
Возьмем точку (1;0)

$$1(0-1)(0+1) = -1 < 0,$$



Пример 2. Указать множество точек плоскости $(X;Y)$, удовлетворяющих неравенству:

$$x^2y^2 - x^4 \le 0,$$

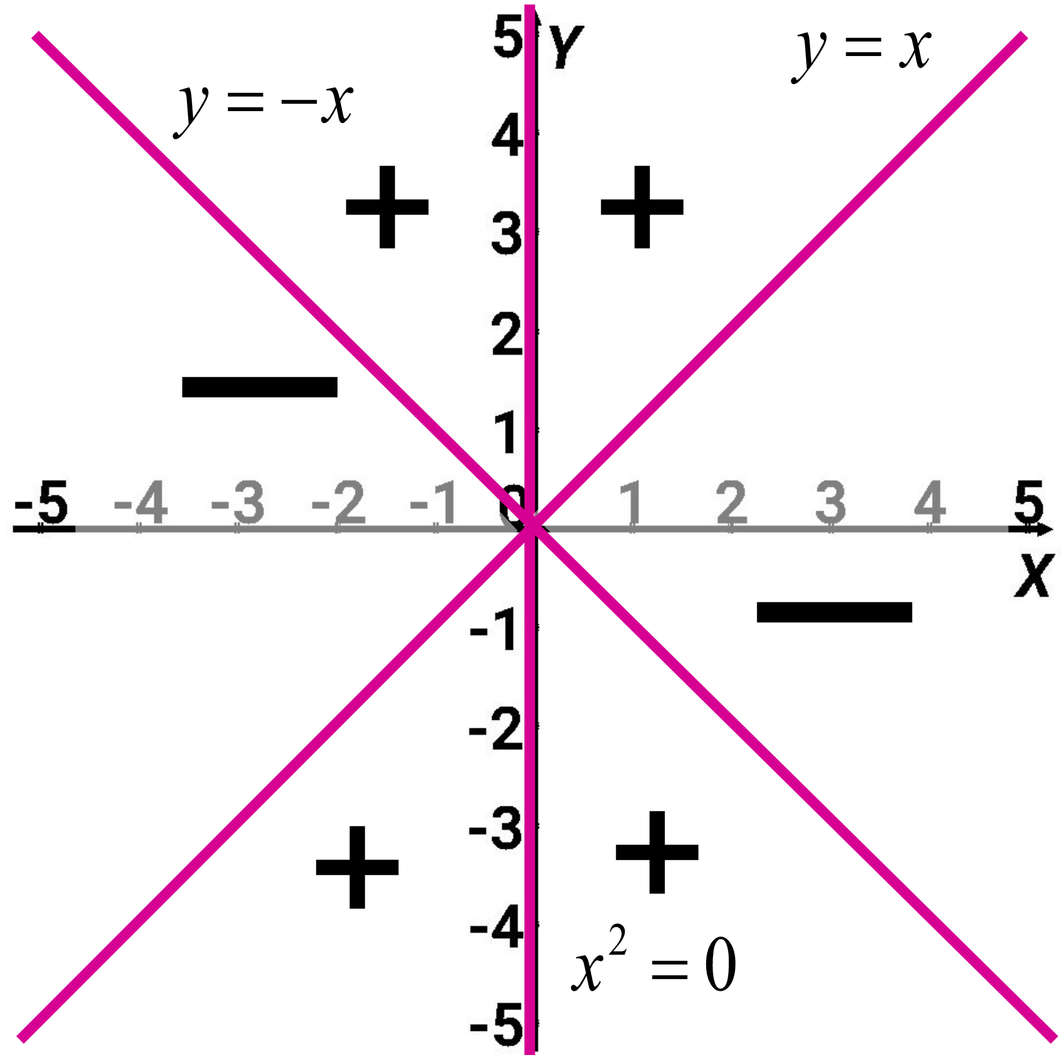
$$x^2\left(y^2 - x^2\right) \le 0,$$

$$x^2(y-x)(y+x) \le 0$$

Построим границы

$$x^2 = 0,\ y = x,\ y = -x$$

Проверим знак одной из областей и выделим решение неравенства.



ПРИМЕР 3. Указать множество точек плоскости (X;Y), удовлетворяющих неравенству: $\dfrac{x+y}{x-y} \geq 1;$

Преобразуем неравенство

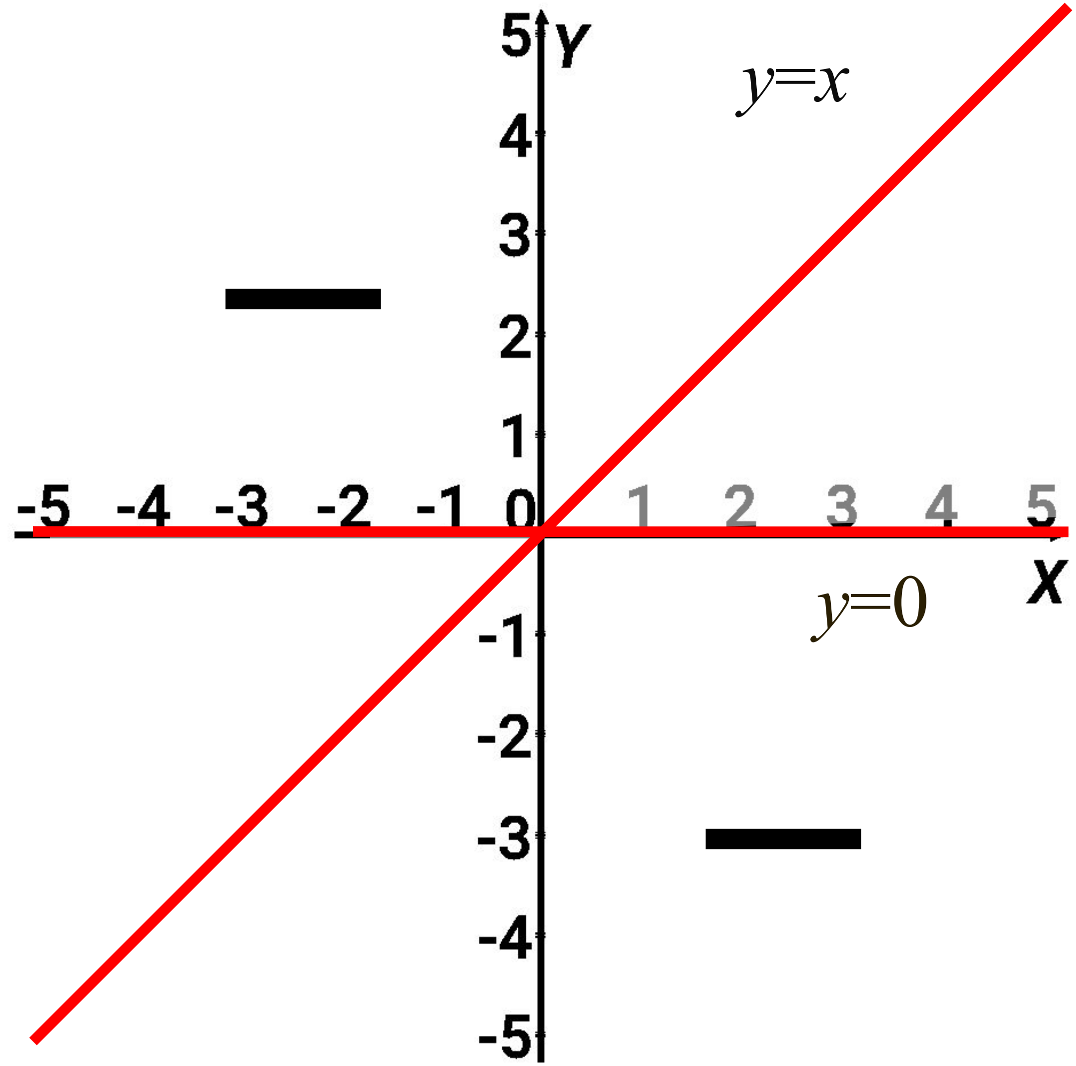
$$\frac{x+y}{x-y} - 1 \geq 0;$$

$$\frac{2y}{x-y} \geq 0;$$

Построим границы

$$y = 0,\ y = x.$$

Проверим знак одной из областей и выделим решение неравенства.



Алгоритм решения задач с параметром методом областей.

Задачу с параметром можно рассматривать как функцию $f(x;a)=0$

Схема решения:

1. Строим графический образ на координатной плоскости $x\mathrm{O}a$
2. Пересекаем полученный график прямыми параллельными оси абсцисс
3. «Считываем» нужную информацию

Пример 4. Найти наименьшее значение параметра a , при котором система имеет хотя бы одно решение:

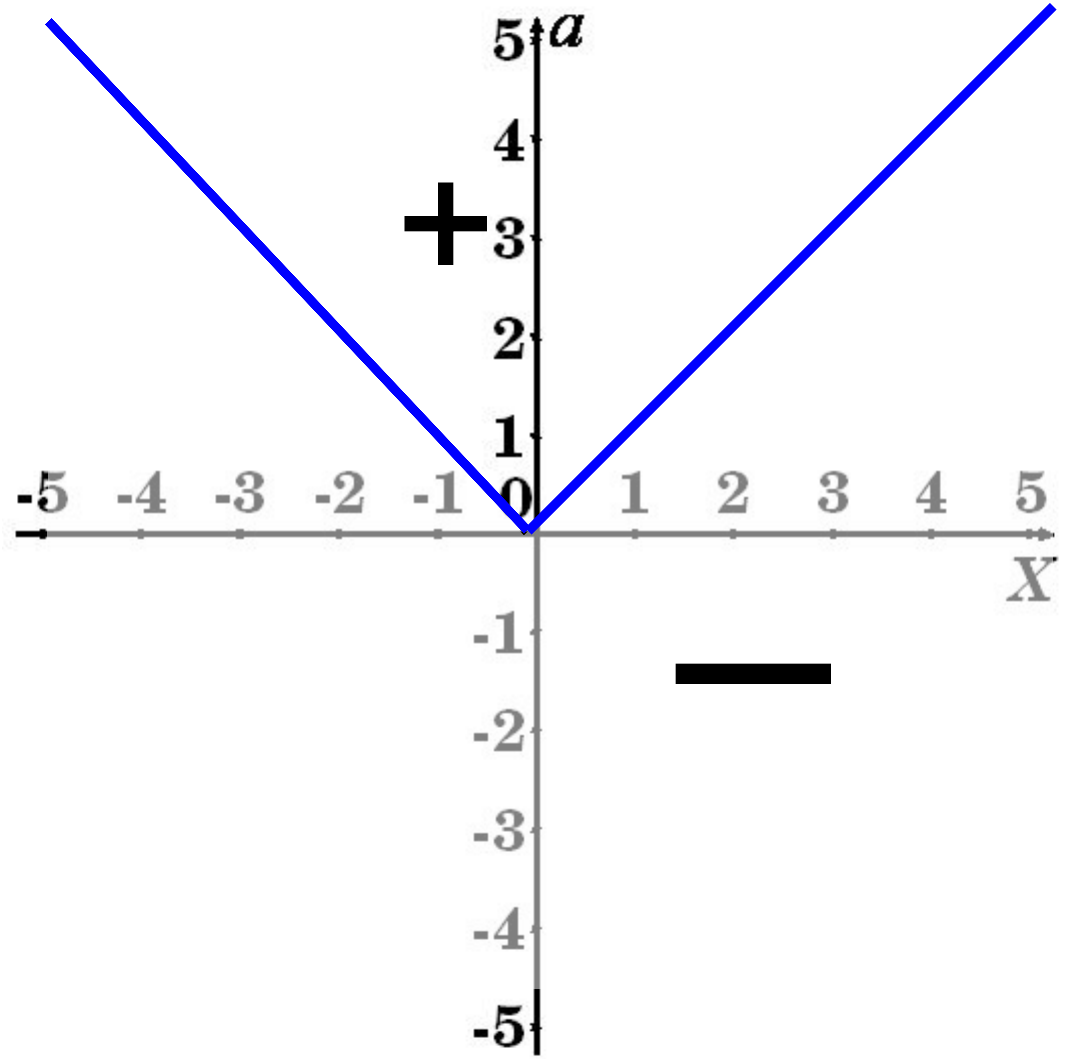
$$\begin{cases} a < |x| \\ x^2 - 2x \le a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - |x| < 0 \\ x^2 - 2x - a \le 0 \end{cases}$$

$a = x^2 - 2x$

$a = |x|$

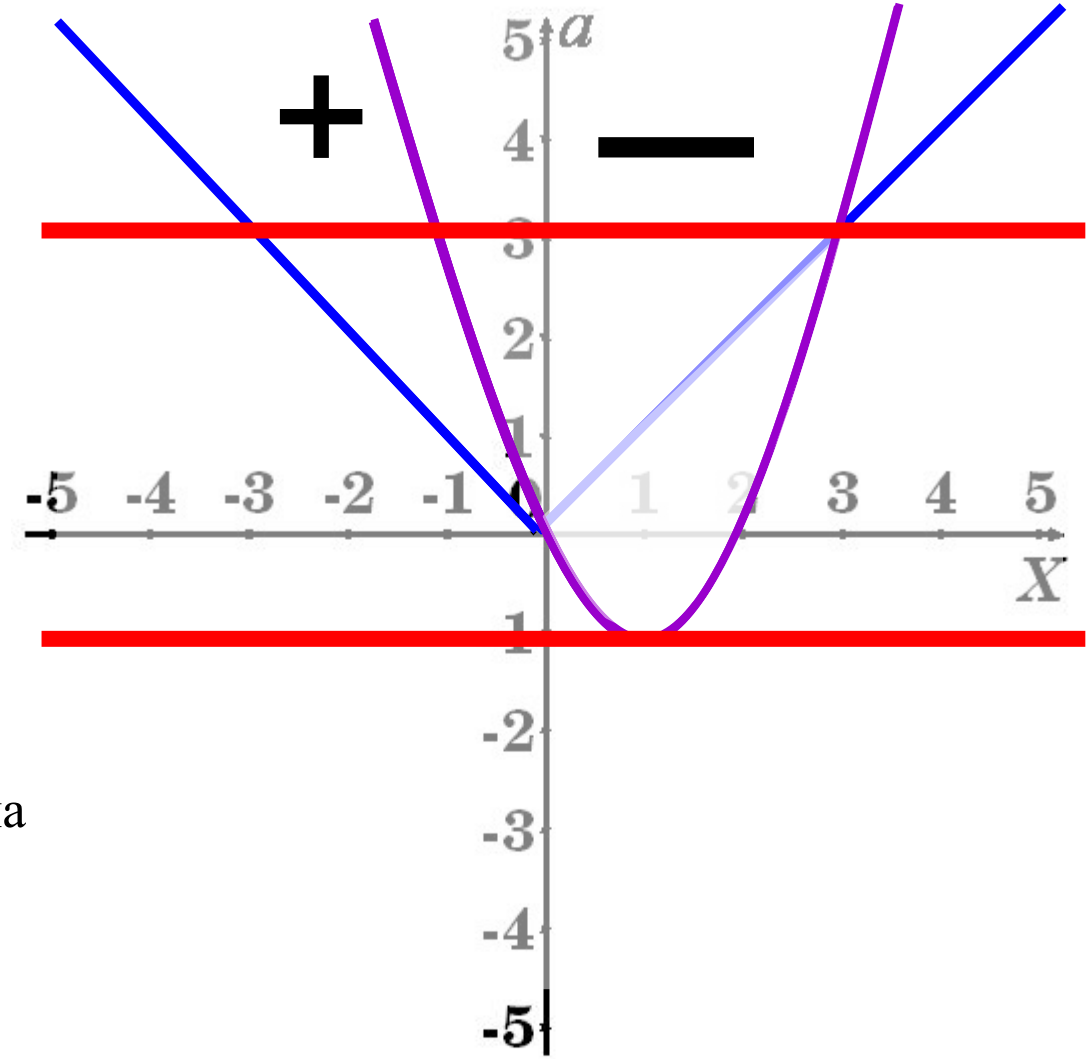
1. На плоскости xOa строим границу $a = |x|$,

2. Определим знаки областей и выделим решение первого неравенства



Пример 4. Найти наименьшее значение параметра a , при котором система имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} a < |x| \\ x^2 - 2x \le a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - |x| < 0 \\ x^2 - 2x - a \le 0 \end{cases}$$



1. На плоскости xOa строим границу $a = |x|$,

2. Определим знаки областей и выделим решение первого неравенства

3. Так же для второго неравенства $a = x^2 - 2x$

4. Ограничим область решения системы неравенств.

5. Наименьшее значение параметра a, при котором система имеет решение равно -1

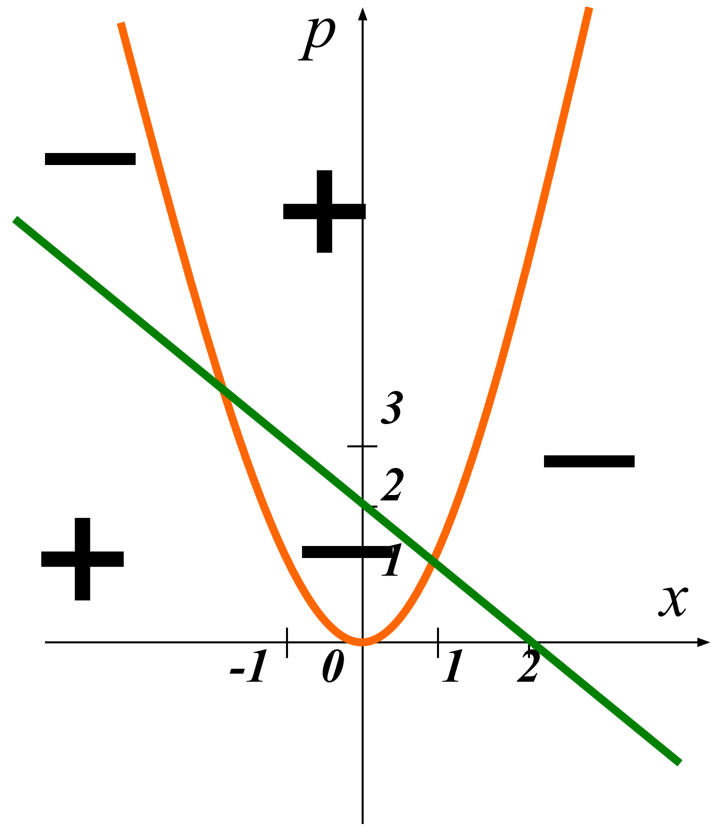
Ответ: $a = -1$

Пример 5. Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество решений неравенства $(p - x^2)(p + x - 2) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \le 1$

Применим метод областей.

1. Строим граничные линии в плоскости xOp $p = x^2$ и $p = 2 - x$

2. Определяем знаки в полученных областях. Выделяем решение данного неравенства.



Пример 5. Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество решений неравенства $\left(p - x^2\right)\left(p + x - 2\right) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \le 1$

Применим метод областей.

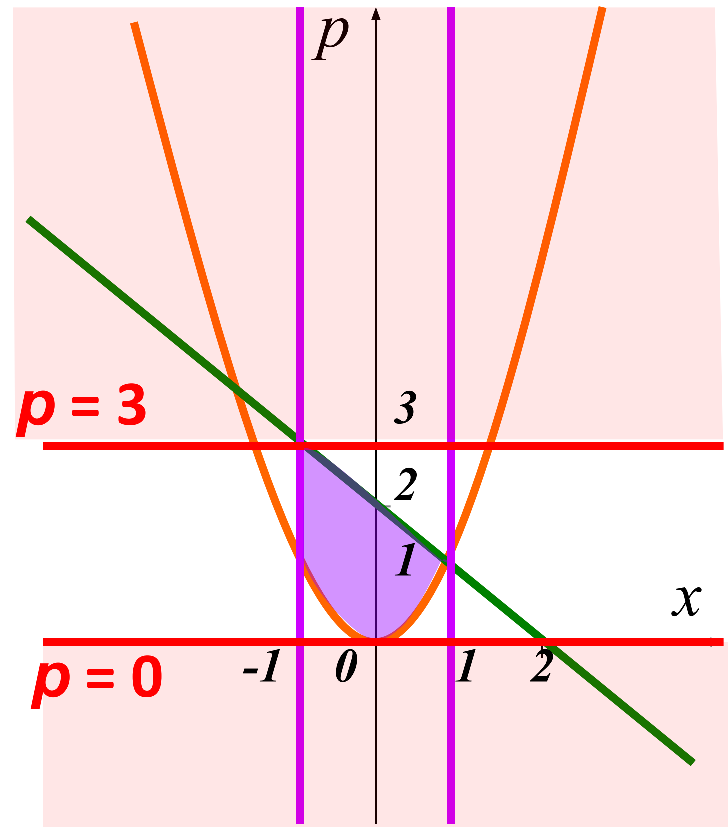
1. Строим граничные линии в плоскости xOp $p = x^2$ и $p = 2 - x$

2. Определяем знаки в полученных областях. Выделяем решение данного неравенства.

3. Из полученного множества исключаем решения неравенства $x^2 \le 1$

4. По рисунку считываем ответ

$p \le 0,\ p \ge 3$



Ответ: $p \le 0,\ p \ge 3$

Пример 6. Найдите все значения *a,* при каждом из которых система $\begin{cases} \dfrac{x+ax+a}{x-2a-2} \geq 0; \\ x+ax \,\square\, 8. \end{cases}$

не имеет решения.

Решим систему методом областей.

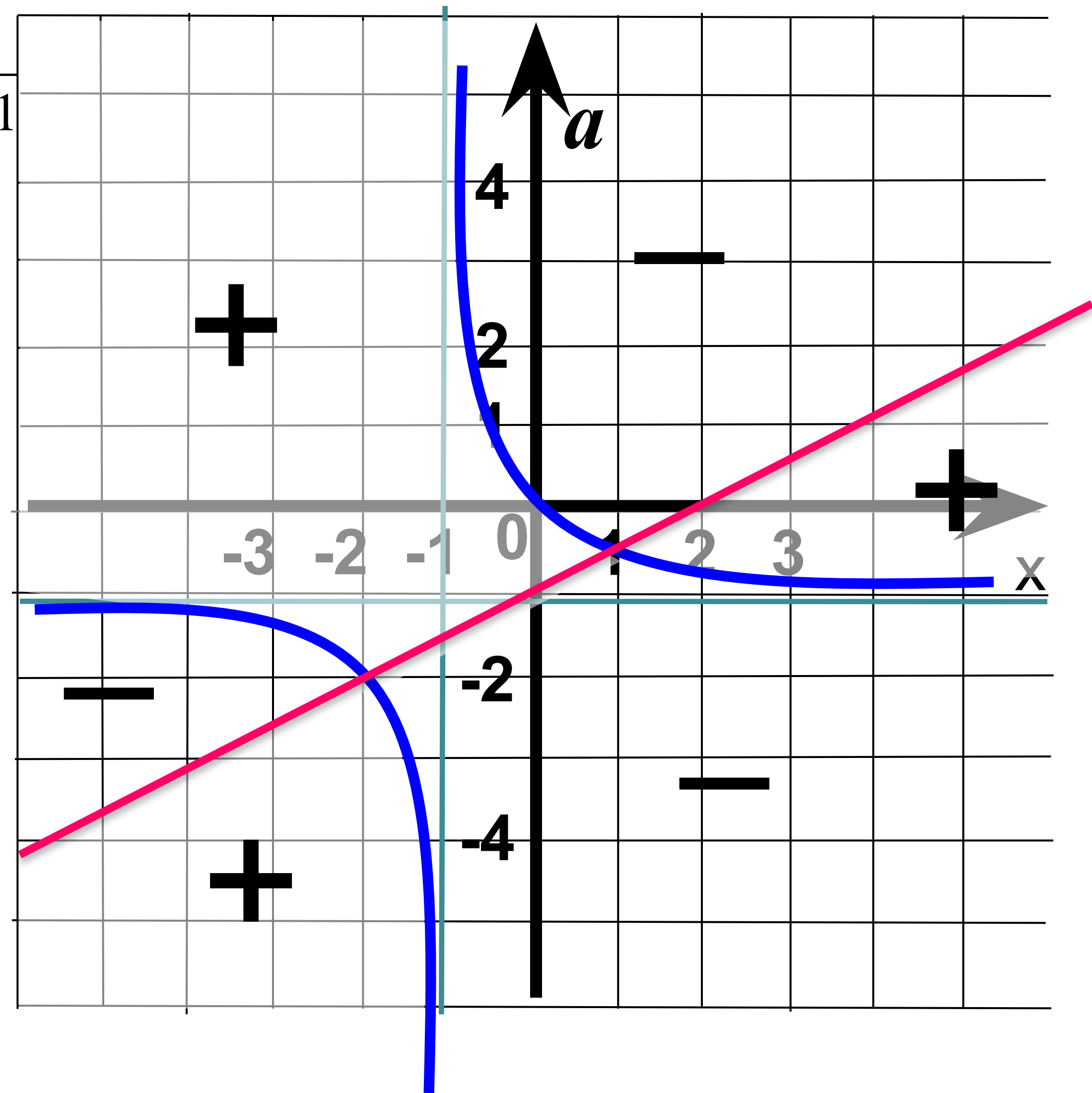
1. Построим границы для первого неравенства

$$x+ax+a=0, \quad a=\frac{-x}{x+1}=-1+\frac{1}{x+1}$$

и $x-2a-2=0, \quad a=\dfrac{x}{2}-1.$

2. Определяем знаки в полученных областях.

3. Выбираем области, соответствующие знаку неравенства



Пример 6. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} \dfrac{x+ax+a}{x-2a-2} \geq 0; \\ x+ax \,\square\, 8. \end{cases}$

не имеет решения.

Решим систему методом областей.

1. Построим границы для первого неравенства

$$x+ax+a=0, \quad a=\frac{-x}{x+1}=-1+\frac{1}{x+1}$$

и $x-2a-2=0, \quad a=\dfrac{x}{2}-1.$

2. Определяем знаки в полученных областях.

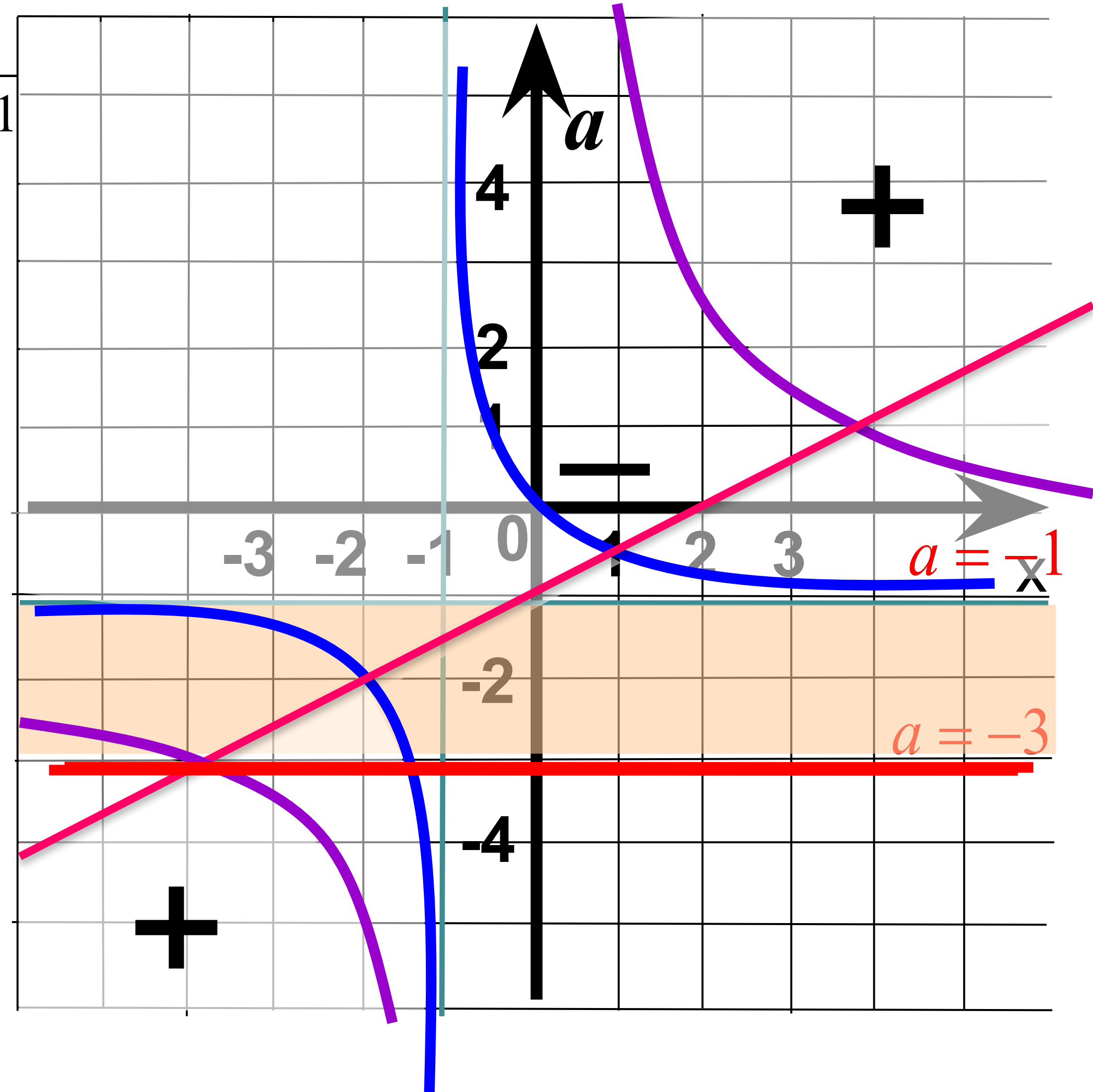
3. Выбираем области, соответствующие знаку неравенства

4. Построим границы и области для второго неравенства.

$$x+ax=8, \quad a=-1+\frac{8}{x}$$

5. Считываем информацию.

Ответ: система не имеет решения при $a \in [-3;-1]$



Пример 7. Найдите все значения a, при каждом из которых решение неравенства $|x-a|+|y|\le 2$ является решением неравенства $(y+3)(y-x+2)(x^2-8x+12-y)\ge 0$.

Применим метод областей

$$y=-3;$$

$$y=x-2;$$

$$y=x^2-8x+12.$$

Определяем знаки в полученных областях. Выделяем решение данного неравенства.

$$|x-a|+|y|\le 2$$ при a=0

$$|x|+|y|\le 2$$

Так как параметр a влияет на сдвиг по оси Ох, то сдвигая область решения считываем ответ.

Ответ: $a\le 0,\ a=4.$