

Разложение на множители.

Что называют разложением многочлена на множители?



Разложите на множители

$$a^2 - 5ab = a(a - 5b)$$

$$a^2 - 25 = (a - 5)(a + 5)$$

$$a^2 - 36 = (a - 6)(a + 6)$$



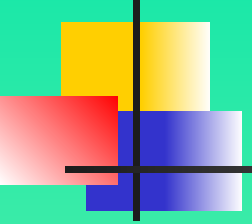
Разложите на множители

$$a^2 + 4ab = a(a + 4b)$$

$$8 - a^3 = (2 - a)(4 + 2a + a^2)$$

$$x^3 + 64 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$$

$$a^3 - 25a = a(a - 5)(a + 5)$$



Способы разложения на множители

Вынесение
общего
множителя
за скобки

Последовательно
несколько
способов

С помощью
формул
сокращенного
умножения

Способ
группировки

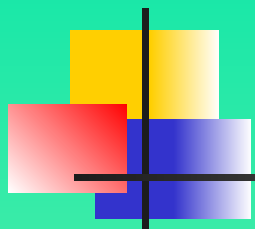


Решите уравнения

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x = 2 \text{ и } x = -2$$

Ответ: - 2; 2

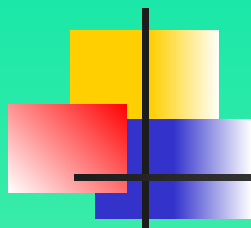


$$x^2 - 16 = 0$$

$$(x - 4)(x + 4) = 0$$

$$x = 4 \text{ и } x = -4$$

Ответ: - 4; 4



$$x^2 + 10x + 25 = 0$$

$$(x + 5)^2 = 0$$

$$x = -5$$

Ответ: - 5


$$9x - x^3 = 0$$

$$x(9 - x^2) = 0$$

$$x(3 - x)(3 + x) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } 3 - x = 0 \text{ или } 3 + x = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x = 3 \text{ или } x = -3$$

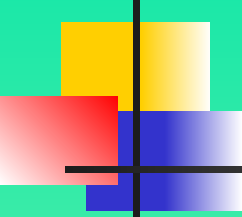
Найдите значение числового выражения

$$\frac{53^2 - 47^2}{61^2 - 39^2}$$

Самое эффективное решение – дважды воспользоваться формулой разности квадратов:

$$\frac{53^2 - 47^2}{61^2 - 39^2} = \frac{(53-47)(53+47)}{(61-39)(61+39)} = \frac{6 \cdot 100}{22 \cdot 100} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$$

Разложение на множители позволило нам сократить дробь.



Вынесение общего множителя за скобки

Алгоритм отыскания общего множителя
нескольких одночленов

- 1. Найти наибольший общий делитель коэффициентов всех одночленов, входящих в многочлен, - он и будет общим числовым множителем**

2. Найти переменные, которые входят в каждый член многочлена, и выбрать для каждой из них наименьший (из имеющихся) показатель степени.

3. Произведение коэффициента, найденного на первом шаге, является общим множителем, который выносят за скобки.

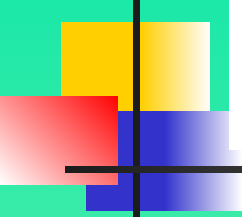
Разложить на множители:

$$-x^4y^3 - 2x^3y^2 + 5x^2.$$

Воспользуемся сформулированным алгоритмом.

Наибольший общий делитель коэффициентов -1 , -2 и 5 равен 1 .

Переменная x входит во все члены многочлена с показателями соответственно 4 , 3 , 2 ; следовательно, можно вынести за скобки x^2 .



**Переменная y входит не во все члены
многочлена; значит, ее нельзя
вынести за скобки.**

Вывод:

**за скобки можно вынести x^2 , в данном
случае целесообразнее вынести $-x^2$.**

Получим:

$$-x^4y^3 - 2x^3y^2 + 5x^2 = -x^2(x^2y^3 + 2xy^2 - 5)$$

Способ группировки

Рассмотрим пример:

разложите на множители многочлен

$$x^3 + x^2y - 4y - 4x = (x^2 + x^2y) - (4x + 4y) =$$

$$= x^2(x + y) - 4(x + y) = (x + y)(x^2 - 4) =$$

$$(x + y)(x^2 - 4) = (x + y)(x - 2)(x + 2)$$



Способ группировки

$$bx^2 + 2b^2 - b^3 - 2x^2 = (bx^2 - b^3) - (2x^2 - 2b^2) =$$

$$= b(x^2 - b^2) - 2(x^2 - b^2) = (b - 2)(x^2 - b^2) =$$

$$(b - 2)(x - b)(x + b)$$

Разложение многочлена на множители с помощью формул сокращенного умножения

Вспомните эти формулы:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

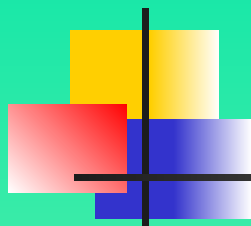
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

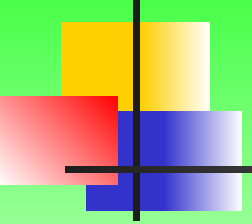
Первую из этих формул можно применять к выражению, представляющему собой *разность квадратов* (безразлично чего – чисел, одночленов, многочленов), вторую и третью – к выражению, представляющему собой *разность* (или *сумму*) кубов; Последние две формулы применяются к трехчлену, представляющему собой *полный квадрат*, т.е. содержащему сумму квадратов двух выражений и удвоенное произведение тех же выражений.



$$a^6 + 27b^3 = (a^2)^3 + (3b)^3 =$$

$$= (a^2 + 3b)(a^4 - 3a^2b + 9b^2)$$

**Воспользовались формулой
суммы кубов.**

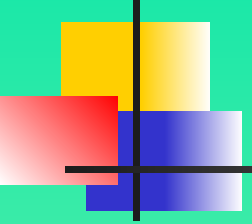


Воспользовались формулой
квадрата разности.

$$\frac{x^2}{4} - 0,8xy + 0,16y^2 =$$

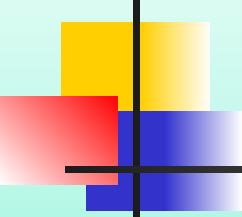
$$\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} x \cdot 0,4y + (0,4y)^2 =$$

$$= \left(\frac{x}{2} - 0,4y \right)^2$$


$$x^6 - 4a^4 =$$

$$= (x^3)^2 - (2a^2)^2 = (x^3 - 2a^2)(x^3 + 2a^2)$$

**Воспользовались формулой
разности квадратов.**



Разложение многочлена на множители с помощью

комбинации различных приемов

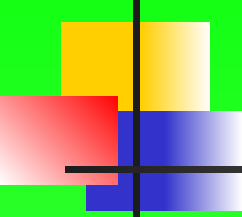
В математике не так часто бывает, чтобы при решении примера применялся только один прием, чаще встречаются комбинированные примеры, где сначала используется один прием, затем другой и т.д. Чтобы успешно решать такие примеры, мало знать сами приемы, надо еще уметь выработать план их последовательного применения. Иными словами, здесь нужны не только знания, но и опыт. Вот такие комбинированные примеры мы и рассмотрим.



1. Разложить на множители многочлен

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5$$

Сначала займемся вынесением общего множителя за скобки. Рассмотрим коэффициенты 36, 96, 64. Все они делятся на 4, причем это – наибольший общий делитель, вынесем его за скобки. Во все члены многочлена входит переменная a (соответственно a^6 , a^4 , a^2), поэтому за скобки можно вынести a^2 . Точно так же во все члены многочлена входит переменная b (соответственно b^3 , b^4 , b^5) – за скобки можно вынести b^3 .

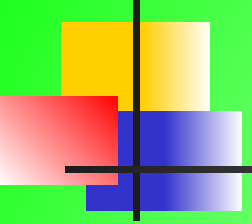


1) Итак, за скобки вынесем $4a^2b^3$.
Тогда получим:

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5 = 4a^2b^3(9a^4 - 24a^2b + 16b^2)$$

2) Рассмотрим трехчлен в скобках:
 $9a^4 - 24a^2b + 16b^2$. Выясним, не является ли он полным квадратом. Имеем:

$$9a^4 - 24a^2b + 16b^2 = (3a^2)^2 + (4b)^2 - 2 \cdot 3a^2 \cdot 4b.$$



Все условия полного квадрата
соблюдены, следовательно,

$$9a^4 - 24a^2b + 16b^2 = (3a^2 - 4b)^2.$$

3) Комбинируя два приема (вынесение
общего множителя за скобки и
использование формул сокращенного
умножения), получаем окончательный
результат:

$$36a^6b^3 - 96a^4b^4 + 64a^2b^5 = 4a^2b^3(3a^2 - 4b)^2.$$

2. Разложить на множители

$$x^4 + x^2 a^2 + a^4$$

Применим метод выделения полного квадрата. Для этого представим $x^2 a^2$ в виде $2x^2 a^2 - x^2 a^2$. Получим:

$$x^4 + x^2 a^2 + a^4 = x^4 + 2x^2 a^2 - x^2 a^2 + a^4 =$$

$$= (x^4 + 2x^2 a^2 + a^4) - x^2 a^2 = (x^2 + a^2)^2 - (xa)^2 =$$

$$= (x^2 + a^2 + xa) \cdot (x^2 + a^2 - xa)$$

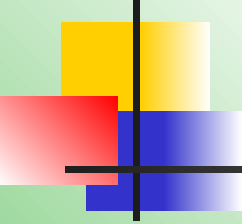
3. Разложить на множители

$$n^3 + 3n^2 + 2n$$

Сначала воспользуемся тем, что n можно вынести за скобки:

$$n(n^2 + 3n + 2).$$

Теперь к трехчлену $n^2 + 3n + 2$ применим способ группировки, предварительно представив $3n$ в виде $2n + n$. Получим:


$$n^2+3n+2= n^2+2n+n+2 =$$

$$= (n^2+2n)+(n+2) = n(n+2)+(n+2) =$$

$$= (n+2)(n+1).$$

Окончательно получаем:

$$n^2+3n+2= n(n+1)(n+2).$$





ОТВЕТЫ

| Номер варианта | Номер примера | | | | | |
|-------------------|---------------|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| I | б | в | а | в | а | а |
| II | а | б | в | а | в | в |

До новых встреч!



Спасибо!

