Введение в асимптотические методы. Лекция 12

Лучевая теория и другие «экспоненциальные» методы

1. Мотивация

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = e^{\pm ix/\varepsilon}$$

Имеем дело с быстро осциллирующим решением

Здесь легко найти аналитическое решение, но как быть в более общем случае?

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + V(x) y = 0$$

$V(x)$ положительная, изменяющаяся в шкале порядка $O(1)$ функция

Решение представляет собой медленно (шкала $O(1)$) **модулированные** быстрые (шкала $O(\varepsilon)$) **осцилляции**. Хотя задачи такого рода можно в принципе решать методом многих масштабов, в силу их важности развиты специальные асимтотические техники, называемые

Для ОДУ: **ВКБ-метод** (в честь Вентцель-Крамерс-Бриллюэн)

Для уравнений в частных производных: **лучевая теория**

2. ВКБ-теория: главный член

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + V(x) y = 0 \qquad\qquad V(x) > 0$$

Идея классического ВКБ-метода состоит в том, что решение представляет собой быстрые осцилляции, чья амплитуда *A* и фаза *u* медленно изменяются.

$$y \sim A(x) e^{iu(x)/\varepsilon}$$

$$y' = \left(A' + i\varepsilon^{-1} u'\right) e^{iu(x)/\varepsilon} \qquad\qquad y'' = \left(A'' + i\varepsilon^{-1}\left(Au'' + 2A'u'\right) - \varepsilon^{-2}\left(u'\right)^2\right) e^{iu(x)/\varepsilon}$$

$$-\left(u'\right)^2 A + i\varepsilon\left(Au'' + 2A'u'\right) + \varepsilon^2 A'' + V(x) A = 0$$

$$A = A_0(x) + \varepsilon A_1(x) + \ldots$$

$$\varepsilon^0 \quad \Rightarrow \quad \left(u'\right)^2 = V \qquad\qquad \varepsilon^1 \quad \Rightarrow \quad A_0 u'' + 2A_0' u' = 0 \quad \Rightarrow \quad A_0^2 u' = \mathrm{const}$$

$$\boxed{y \sim \left(V(x)\right)^{-1/4} \exp\left(\pm \frac{i}{\varepsilon} \int^x \left(V(s)\right)^{1/2} ds\right)}$$

Полученное асимптотическое представление несправедливо если хотя бы в одной точке *V*=0. При наличии таких точек (точки поворота) вблизи них нужно дополнительно строить погранслойное разложение

3. Многомерный аналог

$$\varepsilon^2 \Delta\psi + V(x)\psi = 0$$

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} 2r_T\sigma + r\sigma_T = 0 & \Rightarrow \quad r^2\sigma = \text{Const} \qquad \text{(B)} \\ \varepsilon^2 r_{TT} + r\left(f - \sigma^2\right) = 0 & \Rightarrow \begin{cases} \sigma(T,\varepsilon) = \sigma_0(\mathrm{T}) + \varepsilon^2\sigma_1(\mathrm{T}) \\ r(T,\varepsilon) = r_0(\mathrm{T}) + \varepsilon^2 r_1(\mathrm{T}) \end{cases} \end{cases}$$

(B_0) $$\sigma_0 = f^{1/2}$$

(A_0) $$r_0 = k\, f^{-1/4}$$

(B_1) $$\sigma_1 = \frac{r_{0TT}}{2\sigma_0 r_0} = f^{1/2}\left(\frac{5f'^2}{32f^3} - \frac{f''}{8f^2}\right)$$

(A_1) $$r_1 = -\frac{r_0\sigma_1}{2\sigma_0} = -\frac{k}{2} f^{-1/4}\left(\frac{5f'^2}{32f^3} - \frac{f''}{8f^2}\right)$$

11.4. Точки поворота

$$\dot{x} + f(\varepsilon t)x = 0 \quad f(0) = 0, \quad f' > 0$$

$$\varepsilon t \propto 1 \begin{cases} t > 0: \quad x(t,\varepsilon) \sim \left(f(\varepsilon t)\right)^{-1/4}\left(a\cos\theta + b\sin\theta\right) & \theta = \int\limits_0^t \left(f(\varepsilon t')\right)^{1/2} dt' \\ t < 0: \quad x(t,\varepsilon) \sim \left(-f(\varepsilon t)\right)^{-1/4}\left(Ae^{\varphi} + Be^{-\varphi}\right) & \varphi = \int\limits_0^t \left(-f(\varepsilon t')\right)^{1/2} dt' \end{cases}$$

Для того, чтобы связать a,b с A,B применяется сращивание АР.

Внутреннее разложение: $\varepsilon t \ll 1$

ПС уравнение $\dot{x} + \varepsilon t f'(0)x = 0$

Перенормировка: $\tau = -t\left(\varepsilon f'(0)\right)^{1/3} \Rightarrow \ddot{x} - \tau x = 0$ Ур-ие Эйри

Решение: $x = \alpha\,\mathrm{Ai}(\tau) + \beta\,\mathrm{Bi}(\tau)$ $\mathrm{Ai}(\tau), \mathrm{Bi}(\tau)$-функции Эйри

Асимптотика при $\tau \to \pm\infty$

$$\begin{cases} \tau > 0: \quad x \sim \dfrac{1}{\tau^{1/4}\sqrt{\pi}}\left(\tfrac{1}{2}\alpha\exp\left(-\tfrac{2}{3}\tau^{3/2}\right) + \beta\exp\left(\tfrac{2}{3}\tau^{3/2}\right)\right) \\ \tau < 0: \quad x \sim \dfrac{1}{(-\tau)^{1/4}\sqrt{\pi}}\left(\alpha\sin\left(\tfrac{2}{3}(-\tau)^{3/2} + \tfrac{1}{4}\pi\right) + \beta\cos\left(\tfrac{2}{3}(-\tau)^{3/2} + \tfrac{1}{4}\pi\right)\right) \end{cases}$$

11.4. Точки поворота

Сращивание

$$\tau \to +\infty,\ t \to +0: \quad \alpha = \frac{2\sqrt{\pi}}{\left[\varepsilon f'(0)\right]^{1/6}} A, \quad \beta = \frac{\sqrt{\pi}}{\left[\varepsilon f'(0)\right]^{1/6}} B$$

$$\tau \to -\infty,\ t \to -0: \quad \alpha + \beta = \frac{\sqrt{2\pi}}{\left[\varepsilon f'(0)\right]^{1/6}} a, \quad \alpha - \beta = \frac{\sqrt{2\pi}}{\left[\varepsilon f'(0)\right]^{1/6}} b$$

$$\boxed{A = \frac{a+b}{2\sqrt{2}} \qquad B = \frac{a-b}{\sqrt{2}}}$$

Уравнения связи

Естественное ГУ $\quad f(-\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$

$$f \approx 2Af^{-1/4} \sin\left(\int_0^t f^{1/2} dt + \frac{\pi}{4} \right) \qquad (t > 0)$$

Точки поворота более высокого порядка $\quad f \approx k^2 t^n \quad (t \to 0)$

Ключевые моменты

ПС уравнение $\quad \ddot{x} + k^2 t^n x = 0$

Решение: $\quad x = \alpha\, t^{1/2} \mathrm{J}_{\nu}(2k\nu t^{1/2\nu}) + \beta t^{1/2} \mathrm{J}_{-\nu}(2k\nu t^{1/2\nu})$

11.5. Пример: Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора

Найти большие собственные значения
$$\begin{cases} \psi_{xx} + \left(E - x^2\right)\psi = 0 \\ \psi(\pm\infty) = 0 \end{cases} \qquad E \gg 1$$

ВКБ-задача!

$$x = \sqrt{E}\,y \qquad\qquad x = z/\sqrt{E}$$

$$E^{-2}\psi_{yy} + \left(1 - y^2\right)\psi = 0 \qquad\qquad \psi_{zz} + \left(1 - \left(E^{-1}z\right)^2\right)\psi = 0$$

2 точки поворота $x = \pm\sqrt{E}$ первого порядка

$$|x| < \sqrt{E}: \quad \psi \sim \left(E - x^2\right)^{-1/4}\left(a\cos\theta + b\sin\theta\right), \quad \theta = \int_0^x \left(E - x^2\right)^{1/2} dx$$

$$x < -\sqrt{E}: \quad \psi \sim \left(x^2 - E\right)^{-1/4}\left(A_- e^{\varphi_-} + \cancel{B_- e^{-\varphi_-}}\right), \quad \varphi_- = \int_{-\sqrt{E}}^x \left(x^2 - E\right)^{1/2} dx$$

$$x > \sqrt{E}: \quad \psi \sim \left(x^2 - E\right)^{-1/4}\left(\cancel{A_+ e^{\varphi +}} + B_+ e^{-\varphi +}\right), \quad \varphi_+ = \int_{\sqrt{E}}^x \left(x^2 - E\right)^{1/2} dx$$

11.5. Пример: Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора

Сращивание при $x = -\sqrt{E}$ $\quad \theta = \underbrace{\int\limits_{-\sqrt{E}}^{x} \left(E - x^2\right)^{1/2} dx}_{\theta_-} - \underbrace{\int\limits_{-\sqrt{E}}^{0} \left(E - x^2\right)^{1/2} dx}_{\theta_0 = \pi E/4}$

$$x > -\sqrt{E}: \quad \psi \sim \left(E - x^2\right)^{-1/4} \left(a \cos\left(\theta_- - \theta_0\right) + b \sin\left(\theta_- - \theta_0\right)\right) =$$

$$= \left(E - x^2\right)^{-1/4} \left(a_- \cos\theta_- + b_- \sin\theta_-\right) \quad \begin{cases} a_- = a\cos\theta_0 - b\sin\theta_0 \\ b_- = a\sin\theta_0 + b\cos\theta_0 \end{cases}$$

Уравнение связи $\quad \dfrac{a_- - b_-}{\sqrt{2}} = B_- = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a\left(\cos\theta_0 - \sin\theta_0\right) = b\left(\sin\theta_0 + \cos\theta_0\right)}$

Аналогичное сращивание при $x = +\sqrt{E}$ дает $\quad \boxed{a\left(\cos\theta_0 - \sin\theta_0\right) = -b\left(\sin\theta_0 + \cos\theta_0\right)}$

$$\left.\begin{array}{l} a = 0, \quad \sin\theta_0 + \cos\theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \pi/4 + \pi k \\ b = 0, \quad \sin\theta_0 - \cos\theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = -\pi/4 + \pi k \end{array}\right] \theta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = 2k + 1}$$

11.5. Упражнение к л. 11

1. Используя преобразование (11.3) получить ВКБ – аппроксимацию решения уравнения

$$x^{(4)} + f(\varepsilon t)x = 0$$