Введение в асимптотические методы. Лекция 10

Метод многих масштабов

1. Характеризация метода

Метод многих масштабов (МММ) – общий метод, приложимый к широкому классу задач, характеризуемых наличием 2-х физических процессов, которые

1) Обладают существенно различными характерными пространственными (временными) масштабами
2) Действуют **одновременно**

В методе **сращивания асимптотических разложений** мы также имели дело с 2-мя физическими процессами различных пространственных масштабов, действующих, однако, **раздельно** – каждый в своем пространственном (временном) интервале.

2. Осциллятор Ван-дер-Поля: трудности

$$\begin{cases} \ddot{x} + \varepsilon \dot{x}\left(x^2 - 1\right) + x = 0 & (t > 0) \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Регулярное разложение:

$$x(t;\varepsilon) \sim \cos t + \varepsilon\left(\frac{3}{8}\left(t\cos t - \sin t\right) - \frac{1}{32}\left(\sin 3t - 3\sin t\right)\right) + \ldots$$

Резонансный член

несправедливо при $t \propto \varepsilon^{-1}$

Трудность связана с тем, что слабое затухание изменяет амплитуду осцилляций на временах $\propto \varepsilon^{-1}$ за счет медленного накопления малых эффектов. Имеем 2 физических процесса

1) Базовые осцилляции с временным масштабом 1 из-за инерции
2) Изменение амплитуды (и может быть фазы) с временным масштабом ε^{-1} из-за “трения”

3. Осциллятор Ван-дер-Поля: основная идея

Введение 2-х временных переменных вместо одной

$\tau = t$ быстрое время осцилляций

$T = \varepsilon t$ медленное время изменения амплитуды

$$x(t;\varepsilon) = X(\tau, T; \varepsilon)$$

Вместо ОДУ на полуоси получим уравнение в частных производных в квадранте $\{T > 0, \tau > 0\}$

Целью является получение разложения, равномерно пригодного по T и τ.
Это потребует ограниченности членов асимптотического разложения.
Если удастся построить такое разложение, то, будучи равномерно пригодным во всем квадранте, оно будет пригодно и вдоль линии $T = \varepsilon\tau$, дающей исходную связь между быстрой и медленной переменной.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial T} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial T^2}$$

4. Осциллятор Ван-дер-Поля: первый шаг

$$\begin{cases} \ddot{x} + \varepsilon \dot{x}\left(x^2 - 1\right) + x = 0 & \left(t > 0\right) \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{\tau\tau} + X + \varepsilon\left(2X_{\tau T} + X_{\tau}\left(X^2 - 1\right)\right) + \varepsilon^2\left(X_{TT} + X_T\left(X^2 - 1\right)\right) = 0 \\ X(0,0) = 1, \qquad X_{\tau}(0,0) + \varepsilon X_T(0,0) = 0 \end{cases}$$

$$X \approx X_0\left(\tau, T\right) + \varepsilon X_1\left(\tau, T\right)$$

$$\varepsilon^0: \quad X_{0\tau\tau} + X_0 = 0, \qquad \Rightarrow \quad \boxed{X_0 = R(T)\cos\left(\tau + \theta(T)\right)}$$

$$X_0(0,0) = 1, \qquad X_{0\tau}(0,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R(0) = 1, \quad \theta(0) = 0}$$

$R(T), \quad \theta(T)$ на данном шаге остаются неопределенными

5. Осциллятор Ван-дер-Поля: второй шаг

$$\varepsilon^1: \quad X_{1\tau\tau} + X_1 = -2X_{0\tau T} - X_{0\tau}\left(X_0^2 - 1\right) =$$

$$= 2R\theta_T \cos\left(\tau+\theta\right) + \left(2R_T + \tfrac{1}{4}R^3 - R\right)\sin\left(\tau+\theta\right) + \tfrac{1}{4}R^3 \sin 3\left(\tau+\theta\right)$$

Для равномерной пригодности разложения нужно за счет выбора R, θ удалить из правой части резонансные члены

$$\theta_T = 0, \theta(0) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\theta = 0}$$

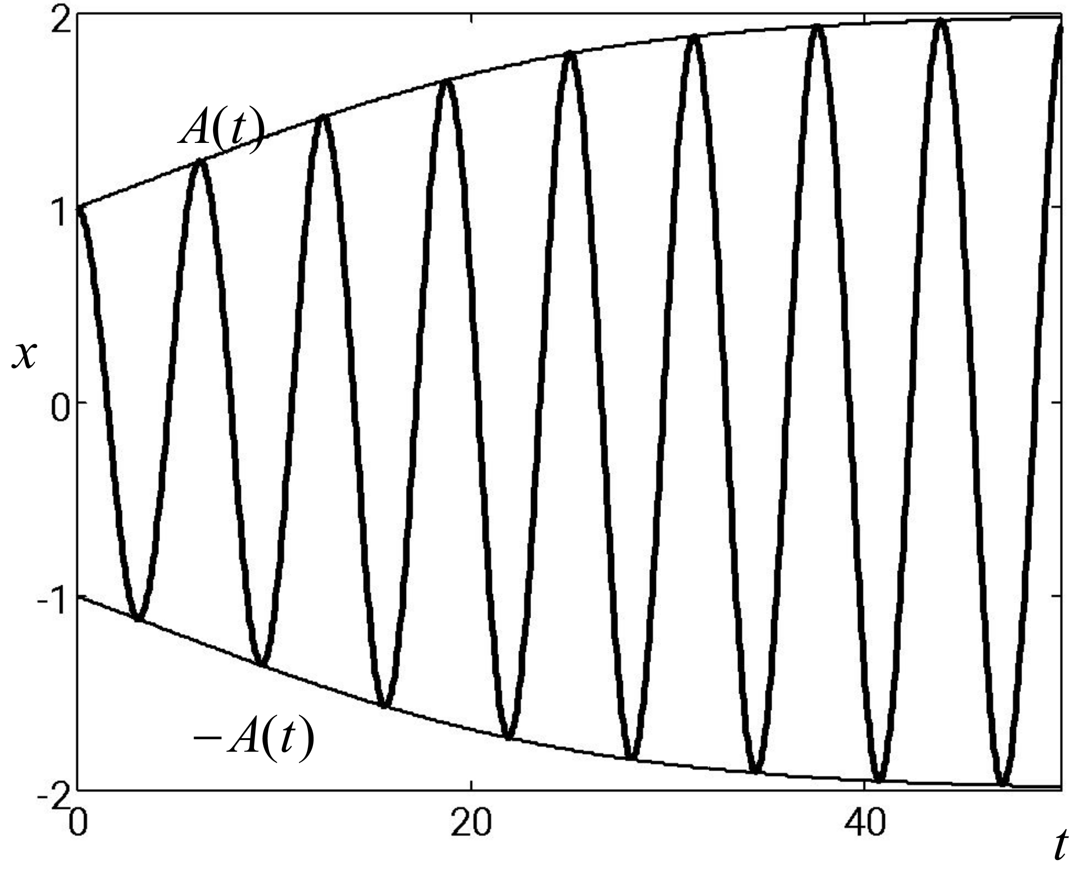
$$2\frac{dR}{dT} + \tfrac{1}{4}R^3 - R = 0, R(0) = 1 \quad \Rightarrow \boxed{R = 2\Big/\sqrt{1+3e^{-T}}}$$

$$X_1 = -\frac{1}{32}R^3 \sin 3\tau + S(T)\sin\left(\tau + \varphi(T)\right)$$

Найдутся при анализе ε^2-члена

Характерная особенность: главный член разложения находится на втором шаге метода из условия разрешимости задачи (существование ограниченного при $\tau \to \infty$ решения задачи для X_1)

6. Осциллятор Ван-дер-Поля: график



$\varepsilon = 0.1$

7. Введение большего числа масштабов

Может случиться так, что в следующем порядке нет достаточного количества свободных функций, чтобы удалить все резонансные члены из правых частей. Эта трудность может быть преодолена введением еще одного медленного времени $T_2 = \varepsilon^2 t$

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\varepsilon \dot{x} + x = 0 & (t > 0) \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \qquad x = e^{-\varepsilon t} \cos\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}\, t\right)$$

$$x = e^{-\varepsilon t} \cos\left(t - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 t + \ldots\right) = e^{-T_1} \cos\left(\tau - \tfrac{1}{2} T_2 + \ldots\right) \qquad \tau = t,\ T_k = \varepsilon^k t$$

Если интересны времена $t \sim \varepsilon^{-1}$, достаточно взять 1 масштаб τ $\quad x \sim \cos\tau$

Если интересны времена $t \sim \varepsilon^{-2}$, нужно брать 2 масштаба τ, T_1 $\quad x \sim e^{-T_1} \cos\tau$

Если интересны времена $t \sim \varepsilon^{-3}$, нужно брать 3 масштаба τ, T_1, T_2

$$x \sim e^{-T_1} \cos\left(\tau - \tfrac{1}{2} T_2\right)$$

8. Неустойчивость уравнения Матье: постановка задачи

Уравнение Матье описывает колебания математического маятника при слабом периодическом изменении его длины. В том случае когда частота с которой изменяется длина близка к частоте собственных колебаний маятника, амплитуда колебаний будет неограниченно возрастать. Этот эффект называется **параметрическим возбуждением**.

$$\ddot{x} + \left(\omega^2 + \varepsilon\cos t\right)x = 0$$

? В каком интервале $\left(\tfrac{1}{4} - \delta_-, \tfrac{1}{4} + \delta_+\right)$ должна находиться величина ω^2 с тем, чтобы амплитуда колебаний неограниченно возрастала?

$$\delta_\pm = \varepsilon k_{1,\pm} + \varepsilon^2 k_{2,\pm} + \ldots$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{4}x = -\left(\varepsilon\left(k_1 + \cos t\right) + \varepsilon^2 k_2 + \ldots\right)x$$

9. Неустойчивость уравнения Матье: регулярное разложение

$$\ddot{x} + \frac{1}{4} x = -\left(\varepsilon \left(k_1 + \cos t \right) + \varepsilon^2 k_2 + \ldots \right) x$$

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots$$

$$\ddot{x}_0 + \tfrac{1}{4} x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \cos \tfrac{1}{2} t$$

$$\ddot{x}_1 + \tfrac{1}{4} x_1 = -k_1 \cos \tfrac{1}{2} t - \cos t \cos \tfrac{1}{2} t = -\tfrac{1}{2} \cos \tfrac{3}{2} t - \left(k_1 + \tfrac{1}{2} \right) \cos \tfrac{1}{2} t$$

несправедливо при $t \propto \varepsilon^{-1}$ из-за наличия резонансных членов

$\tau = t$ быстрое время осцилляций

$T = \varepsilon t$ медленное время изменения амплитуды

$$x(t; \varepsilon) = X(\tau, T; \varepsilon)$$

10. Неустойчивость уравнения Матье: двухмасштабное разложение

$$x(t;\varepsilon) \equiv X\left(T,\tau;\varepsilon\right) = X_0\left(T,\tau\right) + \varepsilon X_1\left(T,\tau\right) + \dots\ , \qquad \tau = t,\ T = \varepsilon t$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{4}x = -\left(\varepsilon\left(k_1 + \cos t\right) + \varepsilon^2 k_2 + \dots\ \right)x \quad \Rightarrow \quad X_{\tau\tau} + \frac{1}{4}X = -\varepsilon\left(2X_{T\tau} + \left(k_1 + \cos\tau\right)X\right) + O\left(\varepsilon^2\right)$$

$$X_{0,\tau\tau} + \frac{1}{4}X_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_0 = A(T)\sin\tfrac{1}{2}\tau + B(T)\cos\tfrac{1}{2}\tau$$

$$X_{1,\tau\tau} + \frac{1}{4}X_1 = -\left(A'\cos\tfrac{1}{2}\tau - B'\sin\tfrac{1}{2}\tau\right) - k_1\left(A\sin\tfrac{1}{2}\tau + B\cos\tfrac{1}{2}\tau\right) -$$

$$-\tfrac{1}{2}A\left(\sin\tfrac{3}{2}\tau - \sin\tfrac{1}{2}\tau\right) - \tfrac{1}{2}B\left(\cos\tfrac{3}{2}\tau + \cos\tfrac{1}{2}\tau\right)$$

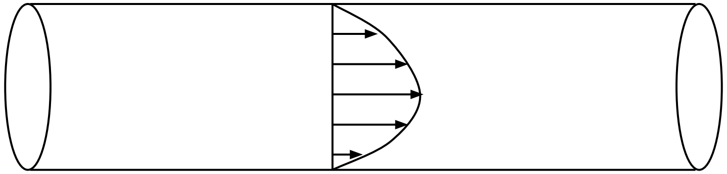
Исключаем резонансные члены $\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\tfrac{1}{2} - k_1 \\ -\tfrac{1}{2} + k_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

Собственные числа $\lambda_\pm = \sqrt{\tfrac{1}{4} - k_1^2}$ Решение $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t}$

Если $|k_1| < 1/2$ решение экспоненциально растет по T $\boxed{\delta_\pm = \pm\frac{1}{2}\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right)}$

11. Тейлоровская дисперсия

Рассматривается эволюция подкрашенного пятна в ламинарном потоке жидкости внутри длинной трубки.
Пятно 1) переноситься вдоль по потоку со средней скоростью движения жидкости и 2) размываться.
При малых коэффициентах молекулярной диффузии основной механизм размытия пятна обусловлен тем, что краска в ядре потока и в пристенных слоях переноситься с разными скоростями.
Роль слабого диффузионного механизма сводится к выравниванию концентрации в поперечном сечении трубки.
В результате на больших временах наблюдается одномерный диффузионный режим его размытия с эффективным коэффициентом диффузии, зависящим как от коэффициента молекулярной диффузии, так и от средней скорости потока.



12. Тейлоровская дисперсия: постановка задачи

$$\frac{\partial c}{\partial t}+2V\,\frac{R^2-r^2}{R^2}\frac{\partial c}{\partial x}=d\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial c}{\partial r}\right),\qquad 0<r<R,\quad -\infty<x<\infty$$

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial c}{\partial r}=0,\qquad \left.\frac{\partial c}{\partial r}\right|_{r=R}=0$$

Безразмерные переменные $\xi=\dfrac{x-Vt}{L},\quad \tau=\dfrac{td}{L^2},\quad \rho=\dfrac{r}{R}$

$$\varepsilon^2\frac{\partial c}{\partial \tau}+\varepsilon\mathrm{Pe}\left(1\text{-}2\rho^2\right)\frac{\partial c}{\partial \xi}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\frac{\partial c}{\partial \rho}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2},\qquad 0<\rho<1,\quad -\infty<\xi<\infty$$

$$\varepsilon=R/L\qquad\qquad \mathrm{Pe}=VRd^{-1}$$

13. Тейлоровская дисперсия: решение

$$\varepsilon^2 \frac{\partial c}{\partial \tau} + \varepsilon \mathrm{Pe}\left(1\text{-}2\rho^2\right)\frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\frac{\partial c}{\partial \rho} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}, \qquad 0 < \rho < 1, \quad -\infty < \xi < \infty$$

$$c = c_0\left(\rho,\xi,\tau\right) + \varepsilon c_1\left(\rho,\xi,\tau\right) + \ldots$$

$$\varepsilon^0: \; 0 < \rho < 1: \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\frac{\partial c_0}{\partial \rho} = 0, \quad \rho\left.\frac{\partial c_0}{\partial \rho}\right|_{\rho=0} = \left.\frac{\partial c_0}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_0 = c_0\left(\xi,\tau\right)$$

$$\varepsilon^1: \; 0 < \rho < 1: \quad \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\frac{\partial c_1}{\partial \rho} = f(\rho), \quad \rho\left.\frac{\partial c_1}{\partial \rho}\right|_{\rho=0} = \left.\frac{\partial c_1}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = 0}_{\text{Задача имеет решение}} \quad f\left(\rho;\xi,\tau\right) = \mathrm{Pe}\left(1\text{-}2\rho^2\right)\frac{\partial c_0}{\partial \xi}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^1 f(\rho)\rho\, d\rho = 0$$

Условие разрешимости выполнено, $c_1\left(\rho,\xi,\tau\right) = \dfrac{\mathrm{Pe}}{8}\dfrac{\partial c_0}{\partial \xi}\left(2\rho^2 - \rho^4\right) + C_1\left(\xi,\tau\right)$

14. Тейлоровская дисперсия: решение

ε^2 :

$$0<\rho<1: \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial c_2}{\partial\rho}=f(\rho), \quad \rho\frac{\partial c_2}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=0}=\frac{\partial c_2}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=1}=0$$

$$f(\rho;\xi,\tau)=\mathrm{Pe}\left(1\text{-}2\rho^2\right)\frac{\partial c_1}{\partial\xi}+\frac{\partial c_0}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 c_0}{\partial\xi^2}$$

Условие разрешимости

$$\frac{\partial c_0}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 c_0}{\partial\xi^2}-\frac{\mathrm{Pe}^2}{4}\frac{\partial^2 c_0}{\partial\xi^2}\int_0^1\left(1-2\rho^2\right)\left(\rho^4-2\rho^2\right)rdr=0$$

$$\frac{\partial c_0}{\partial\tau}=D_{\mathrm{eff}}\frac{\partial^2 c_0}{\partial\xi^2}, \qquad D_{\mathrm{eff}}=1+\frac{\mathrm{Pe}^2}{48}$$

$$\frac{\partial c_0}{\partial t}+V\frac{\partial c_0}{\partial x}=d_{\mathrm{eff}}\frac{\partial^2 c_0}{\partial x^2}, \qquad d_{\mathrm{eff}}=d+\frac{V^2R^2}{48d}$$

15. Упражнение к лекции 10

1. Получить АР, пригодное на временах $t \propto \varepsilon^{-1}$

$$\dot{x} + \varepsilon \dot{x}^3 + x = 0, \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$$

2. Получить АР, пригодное на временах $t \propto \varepsilon^{-1}$

$$\begin{cases} \dot{x} + \varepsilon \dot{y} x + x = y^2 \\ \dot{y} = \varepsilon \left(1 + x - y - y^2\right) \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$