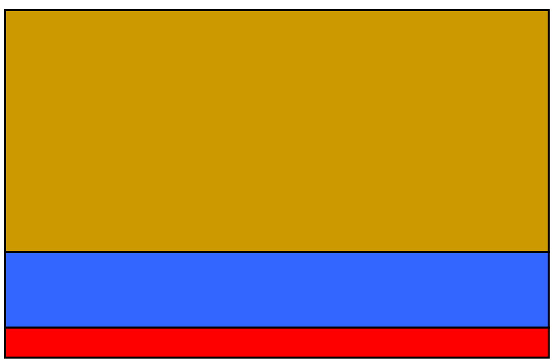
Введение в асимптотические методы. Лекция 8

Сращивание разложений: подслои

1. Подслои

Рассматриваемая до сих пор схема: внешнее разложение + погранслой не всегда достаточна. Погранслой сам может оказаться структурированным: содержать внутри себя **подслои**.

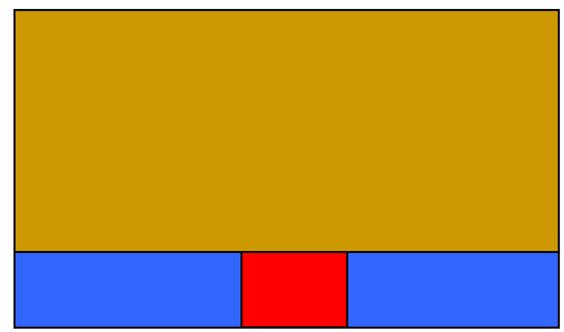


Трехпалубная модель

внешняя область

погранслой

подслой



Слои влияют друг на друга и построение решения в каждом из них должно быть согласовано с построением решения в других слоях

2. Теплообмен при больших числах Пекле: постановка задачи

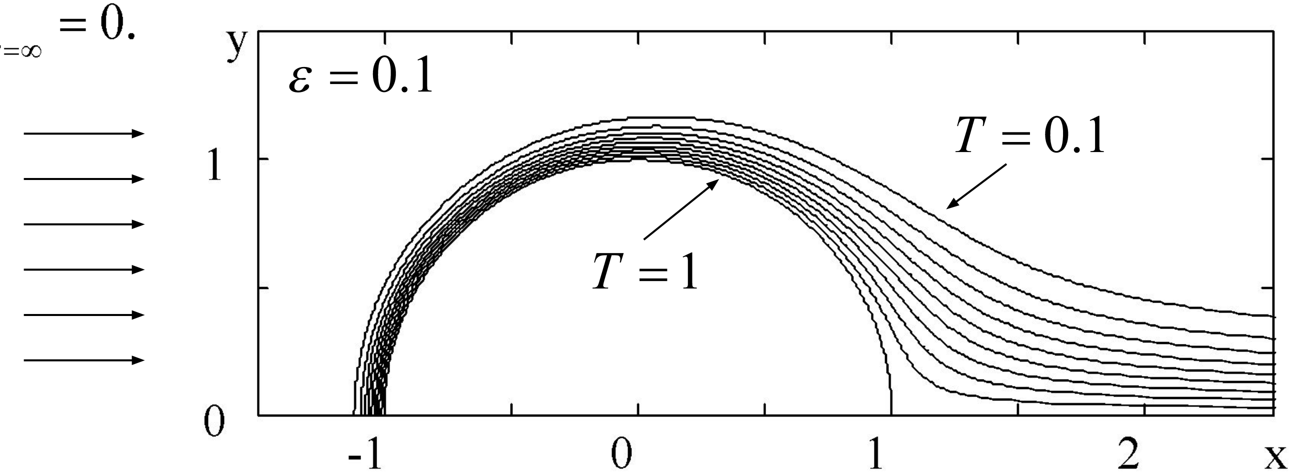
Рассматривается задача стационарного теплообмена цилиндра с обтекающим его потенциальным потоком идеальной жидкости при больших числах Пекле: $\mathrm{Pe} = \varepsilon^{-2}$

$$\underbrace{\cos\theta\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial T}{\partial \theta}}_{\mathbf{V}\cdot\nabla T} = \varepsilon^2\underbrace{\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}\right)}_{\Delta T}, \qquad r>1$$

$$T\big|_{r=1} = 1, \quad T\big|_{r=\infty} = 0.$$

$\mathbf{V} = \mathbf{e}_x$

$T = 0$



3. Внешнее разложение и толщина ПС

Внешнее разложение в главном члене $\mathbf{V} \cdot \nabla T = 0$

$$\left.\begin{array}{l} T \text{ постоянна вдоль линий тока} \\ T \text{ равна нулю вдоль любой линии тока при } r \to \infty \end{array}\right\} T \equiv 0$$

Толщина ПС $\delta \ll 1$ ПС координата $R = \dfrac{r-1}{\delta}$

$$2R\cos\theta \frac{\partial T}{\partial R} - 2\sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + O(\delta) = \frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + O(\delta)\right). \Longrightarrow \boxed{\delta = \varepsilon}$$

В погранслойных координатах обеспечивается баланс конвекции и действующей по нормали к поверхности тела кондукции

4. Внутреннее разложение: автомодельность

Внутреннее разложение в главном члене

$$\begin{cases} 2R\cos\theta\dfrac{\partial T_0}{\partial R} - 2\sin\theta\dfrac{\partial T_0}{\partial\theta} = \dfrac{\partial^2 T_0}{\partial R^2}, \\ T_0\big|_{R=0} = 1, \quad T_0\big|_{R=\infty} = 0. \end{cases}$$

условие сращивания

Ищем автомодельное решение задачи вида $T_0(R,\theta) = u(\xi), \quad \xi = Rg(\theta)$

$$2R\cos\theta g(\theta)u' - 2R\sin\theta g'(\theta)u' = g^2(\theta)u''$$

$$\frac{u''}{u'} = 2R\left(\underbrace{\frac{g\cos\theta - g'\sin\theta}{g^2}}_{kg}\right) \Rightarrow \begin{cases} u'' = 2k\xi u' \\ g\cos\theta - g'\sin\theta = kg^3 \end{cases}$$

Задача для $u(\xi)$

Задача для $g(\theta)$

За счет нормировки g $\left(g \to g/\sqrt{|k|}\right)$ всегда можно добиться чтобы $k = \pm 1$

5. Внутреннее разложение: решение автомодельной задачи

$u'' = \pm 2\xi u'$ ⇨ $u' = \mathrm{const} \times e^{\pm\xi^2}$ должна затухать при $R \to \infty$

$\xi = Rg(\theta)$ ⇨ нужный знак - (+) при g>0 (g<0)

$g > 0$ $\quad u = C_1 \int\limits_{\xi}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi + C_2, \quad u(0) = 1, \quad u(+\infty) = 0$ ⇨ $u(\xi) = \mathrm{erfc}\,\xi$

$g < 0$ ⇨ $u(\xi) = \mathrm{erfc}(-\xi)$

$$\boxed{u(\xi) = \mathrm{erfc}|\xi|}$$

$$\frac{g\cos\theta - g'\sin\theta}{g^2} = -g \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\sin\theta}{g}\right)' = -\frac{g}{\sin\theta}\sin\theta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(g^{-2}\sin^2\theta\right)' = -2\sin\theta \quad \Rightarrow \quad g^2 = \frac{\sin^2\theta}{2(C+\cos\theta)}$$

⇨ $$\boxed{|g| = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2(C+\cos\theta)}}}$$

$C \geq 1$

$$\boxed{T = \mathrm{erfc}\left(\frac{R\sin\theta}{\sqrt{2(C+\cos\theta)}}\right)}$$

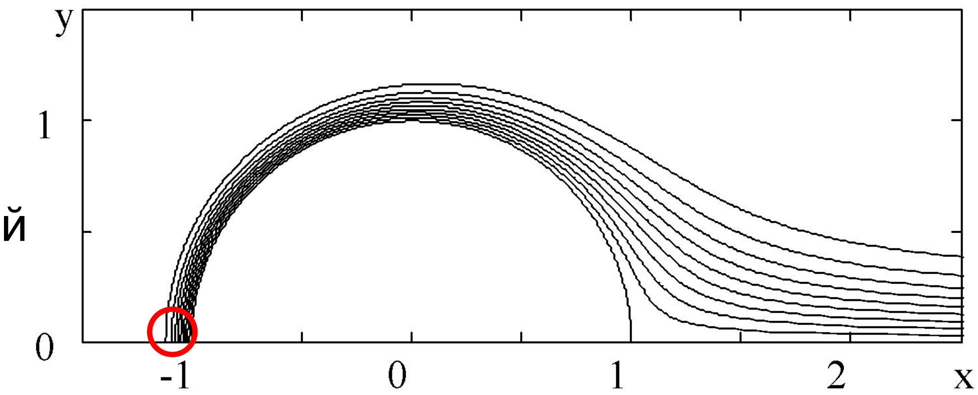
Константа C не определена. Для ее нахождения нужно рассмотреть подслой вблизи критич. точки

6. Подслой: сращивание с погранслоем

Вблизи особой точки скорости малы

$$V_x \approx -4(1+x), V_y \approx 4y$$

и конвекция соизмерима с кондукцией



ПС координаты $X = \dfrac{x+1}{\varepsilon}, Y = \dfrac{y}{\varepsilon}$

$$\left.\begin{aligned} &-2X\frac{\partial T}{\partial X} + 2Y\frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \\ &T(0,Y) = 1, T(\infty,Y) = 0 \end{aligned}\right\}$$

T есть функция только *X*

$$T = \operatorname{erfc}(-X)$$

Рассматриваемый подслой является частью пограничного слоя, отвечающей малой окрестности точки $\theta = \pi$ В главных членах $X = -R, Y = (\pi - \theta)/\varepsilon$

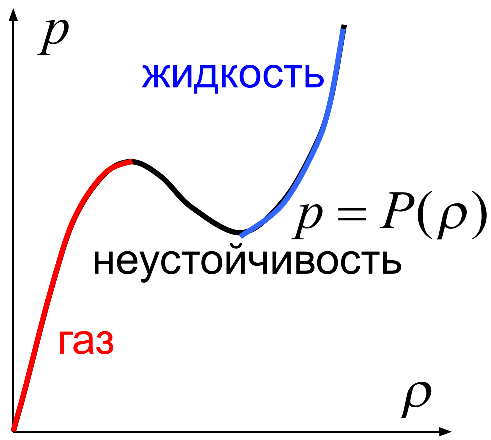
$$\boxed{C = 1} \Rightarrow \quad T = \operatorname{erfc}\left(\frac{R\sin\theta}{\sqrt{2(1+\cos\theta)}}\right) \approx \operatorname{erfc}\left(\frac{-X\cdot\varepsilon Y}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2 Y^2\right)}}\right) = \operatorname{erfc}(-X)$$

$$C > 1 \quad \Rightarrow \quad T = 1 + O(\varepsilon)$$

7. Динамический гистерезис: определяющее уравнение

Изотермическая пульсация маленького пузырька с газом Ван-дер-Ваальса

$$p = p(t), \quad \rho = \rho(t), \quad T = \text{const}$$



Равновесный (бесконечно медленный) процесс

$$p = P(\rho)$$

Релаксационный закон для медленных процессов

время релаксации $\rightarrow$ $\tau\dot{\rho} = p - P(\rho)$

Задавая внешними условиями закон изменения давления $p = p_0(t)$ получим ОДУ для нахождения ρ

$$\boxed{\tau\dot{\rho} + P(\rho) = p_0(t)}$$

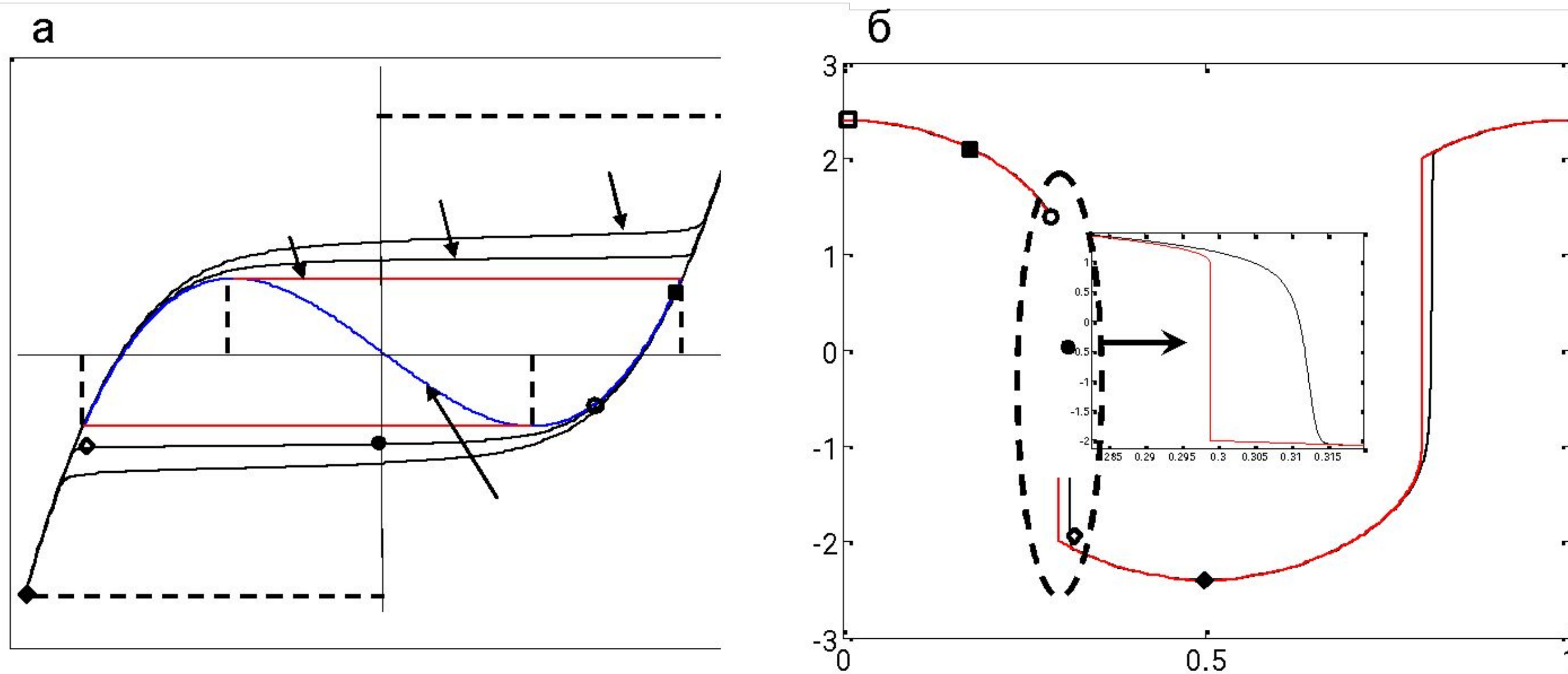
Характерная особенность – неустойчивость в области, где $P'(\rho) < 0$

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho_* \\ p &= \bar{p} + p_* \\ \bar{p} &= P(\bar{\rho}) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \tau\dot{\rho}_* + P'(\bar{\rho})\rho_* = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho_* = A\exp\left(-P'(\bar{\rho})t\right)$$

8. Модельная задача: счет

$$\rho' + \underbrace{\left(\rho^3 - 3\rho\right)}_{P(\rho)} = p(t) \equiv p_0 \cos\omega t$$

$$A_0 > 2, \quad \omega \to 0$$



9. Медленная фаза

Перенормировка: $T = \omega t$ $\qquad \omega\rho' + \rho^3 - 3\rho = p_0 \cos T$

Разложение: $\rho = \rho_0(T) + \omega\rho_1(T)$ $\qquad$ (1)

$$\omega^0: \quad \rho_0^3 - 3\rho_0 = p_0 \cos T \quad \Rightarrow \quad T = \arccos\left(\frac{\rho_0^3 - 3\rho_0}{p_0}\right) \qquad \left(T < T_0 = \arccos\frac{-2}{p_0}\right)$$

$$T \to T_0: \quad \rho_0 \approx 1 + \sqrt{B(T_0 - T)} \qquad B = 3p_0 \sin T_0 = 3\sqrt{p_0^2 - 4}$$

$$\omega^1: \quad \rho_0{}' + 3\rho_0^2\rho_1 - 3\rho_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{-\rho_0{}'}{3\left(\rho_0^2 - 1\right)}$$

$$T \to T_0: \quad \rho_1 \approx \frac{1}{12(T_0 - T)}$$

Где разложение (1) перестает быть справедливым?

$$\rho - 1 \approx \left(B^{1/2}\omega^{1/2}\left(t_0 - t\right)^{1/2} + \ldots\right) + \omega\left(\frac{1}{12}\omega^{-1}\left(t_0 - t\right)^{-1} + \ldots\right) \qquad \left(t \to t_0 = T_0/\omega\right)$$

Соизмеримы, когда $t_0 - t \propto \omega^{-1/3}$ При этом оба члена $\propto \omega^{1/3}$

Это дает нам нужную перенормировку для следующей фазы

10. Промежуточная фаза

Перенормировка: $t - t_0 = (9B\omega)^{-1/3}\tau,\ \rho = 1 + (B\omega/3)^{1/3} y \Rightarrow y' + y^2 + \tau + (\omega B/9)^{1/3} y^3 = 0$

Разложение: $y = y_0(\tau) + (\omega B/9)^{1/3} y_1(\tau) + \dots$

ω^0 : $\boxed{y_0' + y_0^2 + \tau = 0}$ уравнение Рикатти

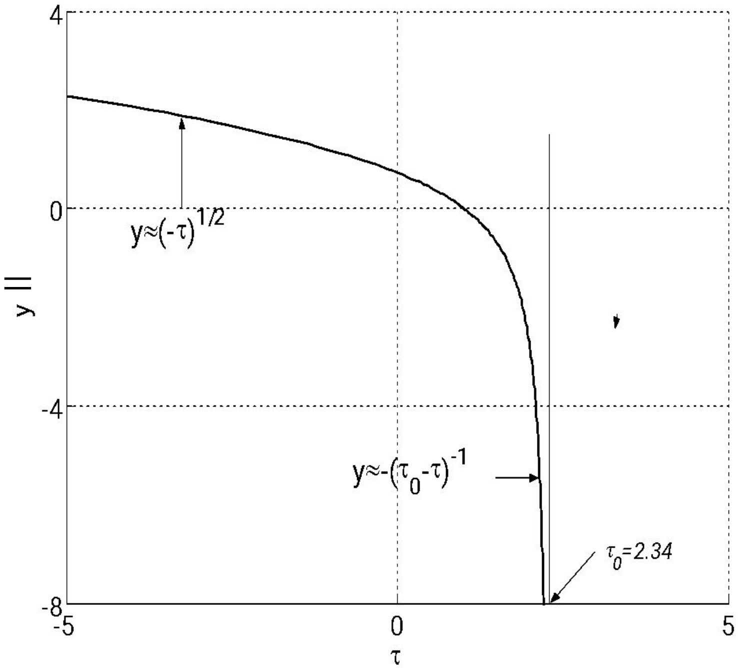
Сращивание

$$y_0 = (\omega B/3)^{-1/3}(\rho_0 - 1) \sim (\omega B/3)^{-1/3}\sqrt{B(T_0 - T)} =$$

$$= (\omega B/3)^{-1/3}\sqrt{-(\omega B/3)^{2/3}\tau} = \sqrt{-\tau}$$

$$\begin{cases} y' + y^2 + \tau = 0 \\ \tau \to \infty : \quad y \sim (-\tau)^{1/2} \end{cases}$$

Решение $\Rightarrow$



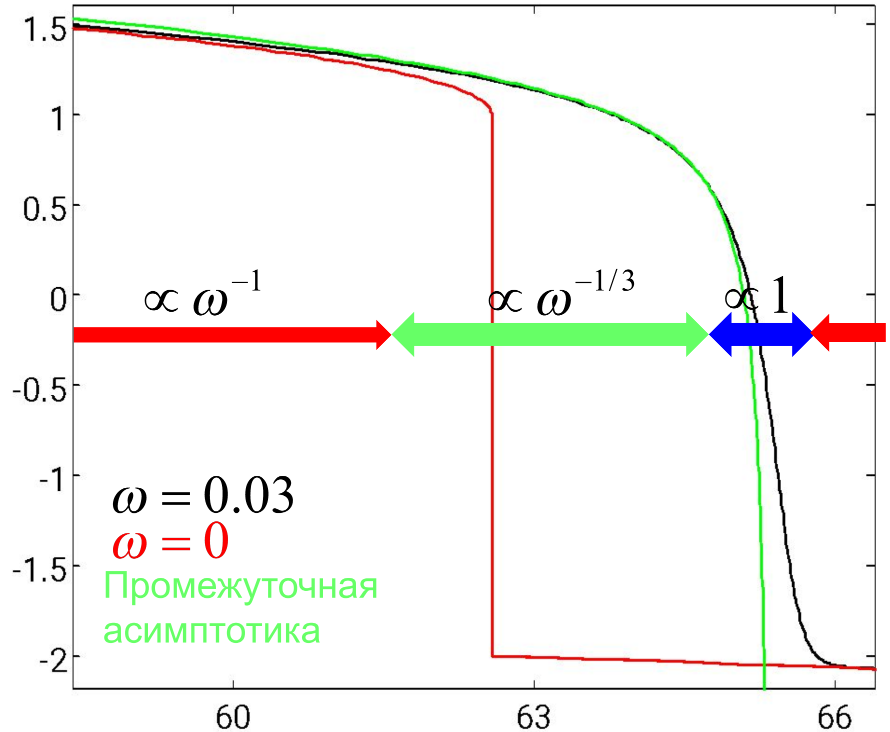
$$\tau \to \tau_0 : \qquad y_0 \sim (\tau - \tau_0)^{-1}$$

11. Промежуточная фаза

$$\omega^{1/3}: \qquad y_1' + 6y_1 y_0 + y_0^3 = 0$$

$$\tau \to \tau_0: \quad y_0 \propto (\tau - \tau_0)^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \tau \to \tau_0: \quad y_1 \propto (\tau - \tau_0)^{-2}$$



Где промежуточное разложение перестает быть справедливым?

$$\rho \approx 1 + (B\omega/3)^{1/3}\left((\tau_0 - \tau)^{-1} + \ldots\right) +$$

$$+ (B\omega/3)^{2/3}\left((\tau_0 - \tau)^{-2} + \ldots\right)$$

Соизмеримы, когда $\tau - \tau_0 \propto (\omega B/3)^{1/3}$ При этом все члены $\propto 1$

Это дает нам нужную перенормировку для следующей фазы

12.Быстрая фаза

Перенормировка: $t - t_* = t_{new},\ \rho \quad \Rightarrow$

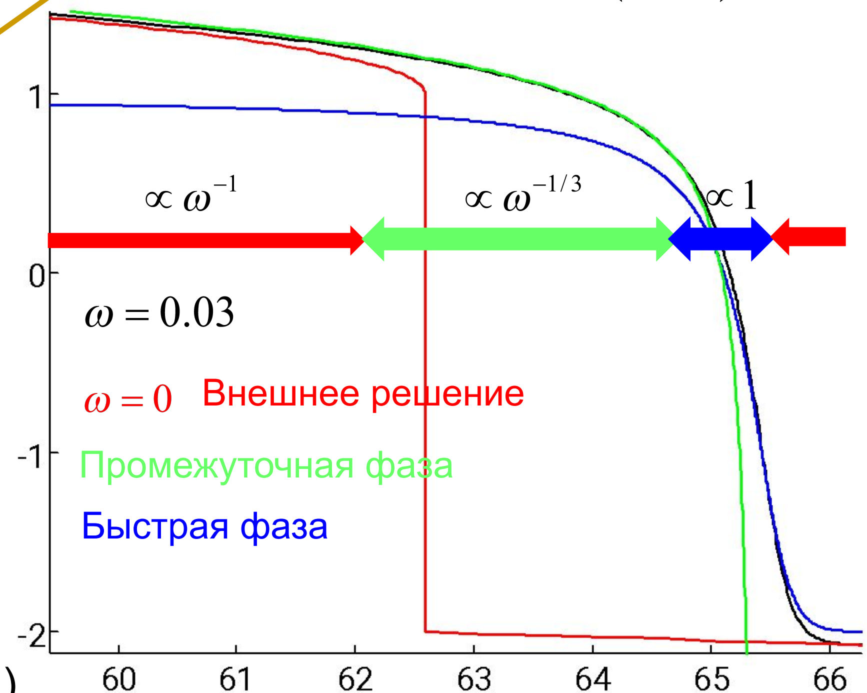
$$\boxed{\begin{array}{l} \rho' + (\rho-1)^2(\rho+2) = \cancel{O\left(\omega^{2/3}\right)} \\ t \to -\infty: \qquad \rho \approx 1 + \dfrac{1}{3t} \end{array}}$$

Сращивание:

$$\frac{d\rho}{(\rho-1)^2(\rho+2)} = dt$$

$$\frac{1}{9}\ln\frac{2+\rho}{1-\rho} + \frac{1}{3(1-\rho)} = t + \cancel{Const}$$

$$t_0^* = T_0\omega^{-1} + \tau_0\left(9B\omega\right)^{-1/3}$$

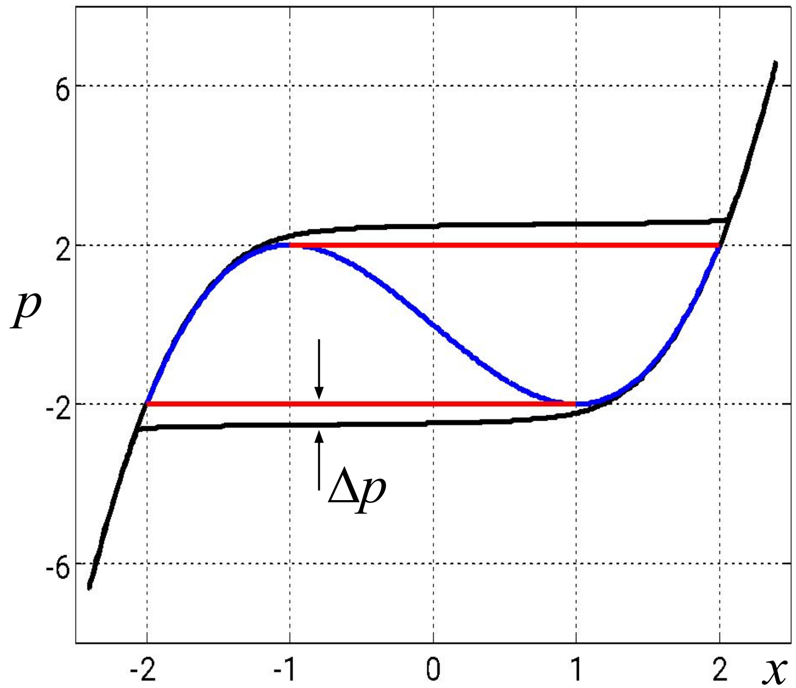


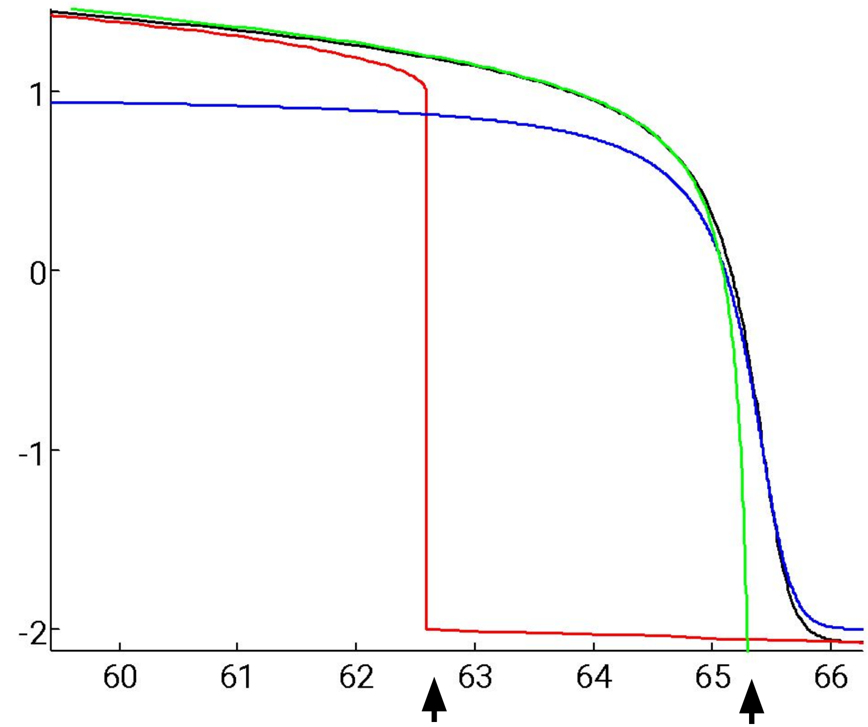
Максимум скорости (максимальная скорость фазового перехода) достигается на этой фазе

$$\left|\frac{d\rho}{dt}\right|_{\max} = 12 \qquad \text{при} \qquad \rho = -1$$

Он не зависит от внешних условий (констант p_0, ω в правой части уравнения)

13.Площадь петли гистерезиса





$$\frac{T_0}{\omega} \qquad \frac{T_0}{\omega}+\frac{\tau_0}{\sqrt[3]{3B\omega}}$$

$$S(\omega)-S(0)\propto 1\cdot\Delta p$$

$$\Delta p = p_0\cos\left(T_0+(\propto\omega^{2/3})\right)-p_0\cos\left(T_0\right)\propto\omega^{2/3}$$

$$\boxed{S(\omega)-S(0)\propto\omega^{2/3}}$$

14. Упражнение к лекции 8

1. Рассмотреть осесимметричную задачу о теплообмене сферы с обтекающим ее потенциальным потоком идеальной жидкости при больших значениях критерия Пекле

$$\vec{V} \cdot \nabla T = \varepsilon^2 \Delta T, \qquad r > 1$$

$$T\big|_{r=1} = 1, \quad T\big|_{r=\infty} = 0.$$

Используйте полярные координаты, в которых поле скоростей имеет вид

$$V_r = \cos\theta\left(1 - \frac{1}{r^3}\right), \quad V_\theta = -\sin\theta\left(1 + \frac{2}{r^3}\right), \quad V_\varphi = 0$$

2. Рассмотреть следующую «трехпалубную» задачу:

$$x^3 y' = \varepsilon\left(\left(1+\varepsilon\right)x + 2\varepsilon^2\right)y^2, \quad 0 < x < 1$$

$$y(1) = 1 - \varepsilon$$

Вычислить последовательно два члена внешнего, затем два члена погранслойного, и наконец один член подслойного разложения.