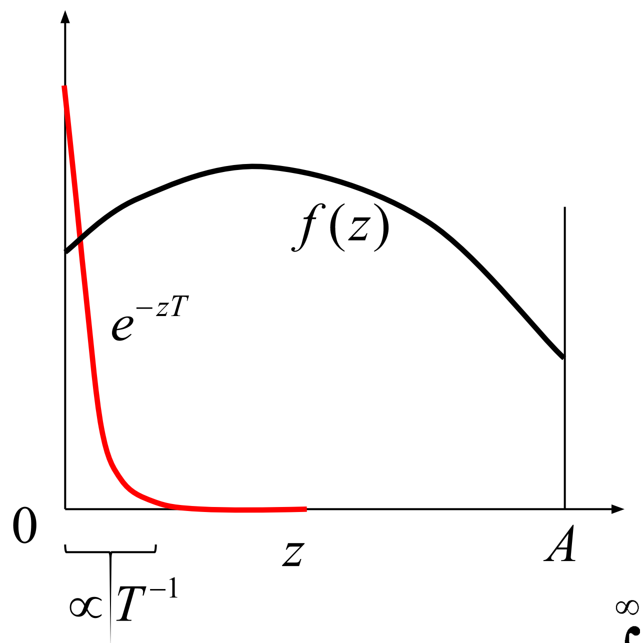
Введение в асимптотические методы. Лекция 3

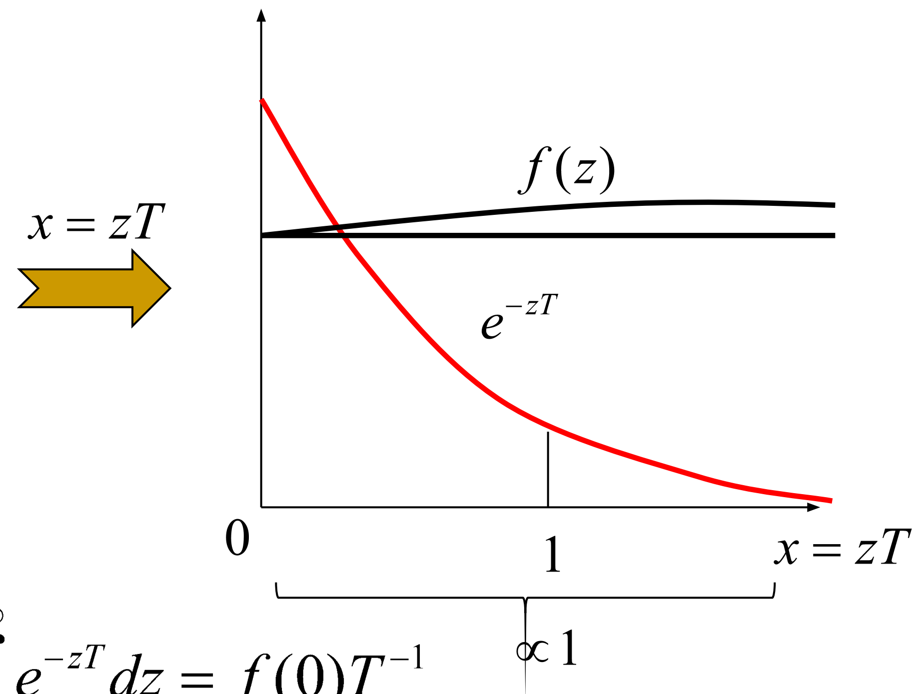
Интегралы: локальные вклады

1. Лемма Ватсона: основная идея

$$I(T)=\int_0^A e^{-zT}f(z)dz \quad (T\to\infty)$$

Ключ: основной вклад в интеграл **локальный**: его дает малая окрестность $z=O\left(T^{-1}\right)$ нуля. Вклад от оставшейся области экспоненциально мал





$$I(T)\approx f(0)\int_0^\infty e^{-zT}dz=f(0)T^{-1}$$

2. Лемма Ватсона: пример

$$I(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-xt}dt}{1+t} \qquad x\to\infty$$

Т.к. основной вклад в интеграл приходит из малой окрестности точки t=0 естественно разложить подынтегральную функцию в нуле

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{k=1}^{n}(-t)^{k-1}+\frac{(-t)^n}{t+1}$$

и почленно проинтегрировать возникающее разложение

$$I(x)=\int_0^\infty e^{-xt}\left(1-t+t^2+\ldots\ \right)dt=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\ldots\ (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}+R_n(x)$$

Оценка остатка

$$|R_n|=\int_0^\infty \frac{e^{-tx}t^n}{1+t}dt<\int_0^\infty e^{-tx}t^n dt=\frac{n!}{x^{n+1}}$$

показывает, что ряд действительно является асимптотическим

3 Лемма Ватсона: окончательная формулировка

$$I(T) = \int_0^A e^{-Tz} f(z)\,dz \quad (T \to \infty)$$

Лемма Ватсона (общий случай)

$$f \sim a_0 z^{\alpha_0} + a_1 z^{\alpha_1} + \ldots + a_n z^{\alpha_n} \quad \left(z \to 0\right)$$

$$I(T) \sim \sum_0^n a_k T^{-\alpha_k - 1} \Gamma(\alpha_k + 1) \quad \left(T \to \infty\right)$$

Используется тот факт, что

$$\int_0^\infty z^\alpha e^{-Tz} dz = \Gamma(\alpha + 1) T^{-\alpha - 1}$$

4. Пример

$$\mathrm{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt = \left(t = x + \tau \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \int_0^\infty e^{-2x\tau} e^{-\tau^2} d\tau$$

А.Р.: $$\mathrm{Erfc}(x) \approx \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{\left(2x^2\right)^2} + \ldots \right)$$

Способ 1 : интегрирование по частям исходного интеграла

Способ 2 : раскладываем $e^{-\tau^2} \approx 1 - \tau^2 + \ldots$ и пользуемся леммой Ватсона

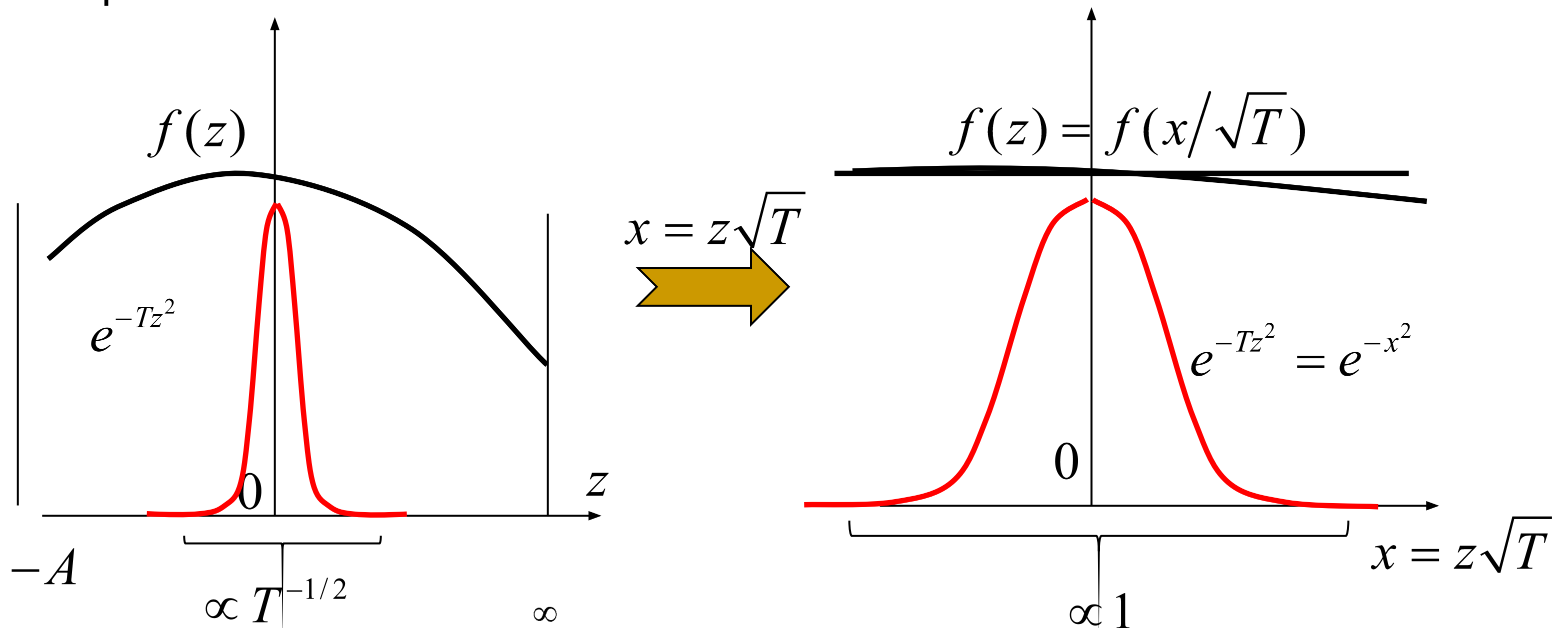
Способ 3 : подчеркивая, что основной вклад приходит из малой $\propto x^{-1}$ окрестности нуля вводим перенормировку $x\tau = u$

$$\mathrm{Erfc}(x) = \frac{2e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-2u} e^{-u^2/x^2} du = \frac{2e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-2u} \left(1 - \frac{u^2}{x^2} + \frac{u^4}{2x^4} + \ldots \right) du$$

5. Интеграл от «шапочки»: основная идея

$$I(T) = \int_{-A}^{A} e^{-Tz^2} f(z)dz \quad (T \to \infty)$$

Ключ: основной вклад в интеграл **локальный**: его дает малая окрестность $z = O\left(T^{-1/2}\right)$ нуля. Вклад от оставшейся области экспоненциально мал



$$I(T) \approx f(0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Tz^2} dz = \sqrt{\pi}\, f(0) T^{-1/2}$$

6. Интеграл от «шапочки»: вычисления

$$I(T)=\int_{-A}^{A} e^{-Tz^2} f(z)dz \quad (T\to\infty)$$

$$\int_{-A}^{A} e^{-Tz^2} f(z)dz = T^{-1/2}\int_{-A\sqrt{T}}^{A\sqrt{T}} e^{-x^2} f(x/T^{1/2})dx =$$

$$\approx T^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left(f_0 + xT^{-1/2}f_0' + \frac{1}{2}x^2T^{-1}f_0'' + \ldots\right)dx =$$

$$\approx T^{-1/2}\left(f_0\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx}_{\sqrt{\pi}} + T^{-1/2}f_0'\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx}_{0} + \frac{1}{2}T^{-1}f''\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx}_{\sqrt{\pi}/2} + \ldots\right) =$$

$$\boxed{\approx \sqrt{\frac{\pi}{T}}\left(f_0 + \frac{f_0''}{4T} + O\left(T^{-2}\right)\right)}$$

7. Обобщение: Метод Лапласа

$$I(T)=\int_{-A}^{A} e^{-Tg(z)} f(z)dz \quad (T\to\infty)$$

Пусть $\min g(z)=g(z_0)$

Тогда основной вклад в интеграл дает малая окрестность точки z_0

$$g(z)=g(z_0)+\frac{1}{2}g''(z_0)\left(z-z_0\right)^2+\ldots \qquad f(z)=f(z_0)+\ldots$$

$$I \approx \int_{-A}^{A}\exp\left[-T\left(g_0+\frac{g_0''}{2}\left(z-z_0\right)^2\right)\right]f_0 dz = \qquad \left(z-z_0=\sqrt{T}\,y\right)$$

$$=f_0 e^{-Tg_0}T^{-1/2}\int_{(-A-t_0)\sqrt{T}}^{(A-t_0)\sqrt{T}}\exp\left[-\frac{g_0''}{2}y^2\right]dy \approx$$

$$\approx f_0 e^{-Tg_0}T^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{g_0''}{2}y^2\right]dy \approx$$

$$\boxed{\approx f(z_0)e^{-Tg(z_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{Tg''(z_0)}} \quad (T\to\infty)}$$

8. Пример. Формула Стирлинга

$$z! = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{z\ln t - t} dt \qquad\qquad z \to \infty$$

$$\left(z\ln t - t\right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad t = z$$ нахождение точки максимума

$$t = z + z^{1/2}\tau$$ перенормировка

$$z\ln t - t = z\ln z - z + z\ln\left(1 + z^{-1/2}\tau\right) - z^{1/2}\tau =$$ разложение по малым $z^{-1/2}\tau$

$$= z\ln z - z - \tfrac{1}{2}\tau^2 + \tfrac{1}{3}z^{-1/2}\tau^3 - \tfrac{1}{4}z^{-1}\tau^4 + \ldots$$

$$z! = e^{z\ln z - z}\int_{'-\infty'}^{'\infty'} e^{-\frac{1}{2}\tau^2}\left(1 + \left(\tfrac{1}{3}z^{-1/2}\tau^3 - \tfrac{1}{4}z^{-1}\tau^4 + \ldots\right) + \frac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3}z^{-1/2}\tau^3 + \ldots\right)^2 + \ldots\right) z^{1/2} d\tau$$

$$\approx \boxed{z^{z+\frac{1}{2}} e^{-z}\sqrt{2\pi}\left(1 + \tfrac{1}{12}z^{-1} + \ldots\right)}$$

Относительная погрешность <0.001 уже при z=1

Представленный пример является обобщением стандартного метода Лапласа: здесь точка минимума не оставалась неподвижной, но двигалась вдоль оси t с изменением z .

9. Интеграл Фурье

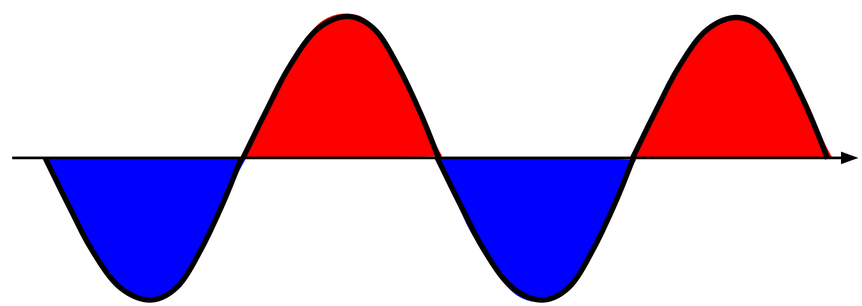
$$I(T)=\int_{A_-}^{A_+} e^{iTz} f(z)\,dz \qquad (T\to\infty)$$

$$I(T)=\int_{A_-}^{A_+} e^{iTz}f(z)\,dz = -iT^{-1}\int_{A_-}^{A_+} f(z)\,de^{iTz} = iT^{-1}fe^{iTz}\Big|_{A_-}^{A_+} + iT^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iTz}f'(z)\,dz$$

$$I(T)\approx\sum_n \frac{i^{n-1}}{T^{n+1}}\left(f^{(n)}(A_+)e^{iTA_+}-f^{(n)}(A_-)e^{iTA_-}\right)$$

1) e^{iTz} быстро осциллирует и осцилляции взаимно уничтожаются во всех внутренних точках интервала. Основной вклад - локальный и приходит с конечных точек интервала

2) При $A_\pm=\pm\infty$ и $f^{(n)}(\pm\infty)=0$ интеграл Фурье убывает с ростом T быстрее любой степенной функции



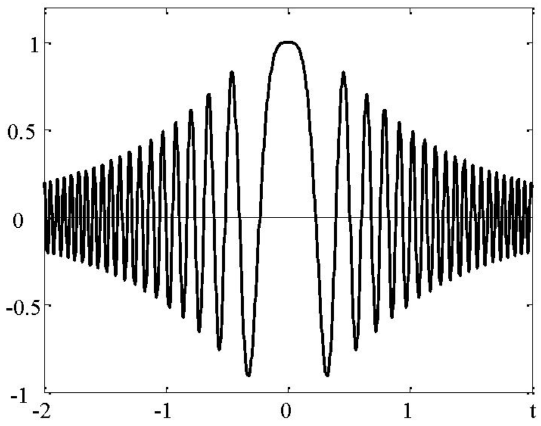
10. Метод стационарной фазы: основная идея

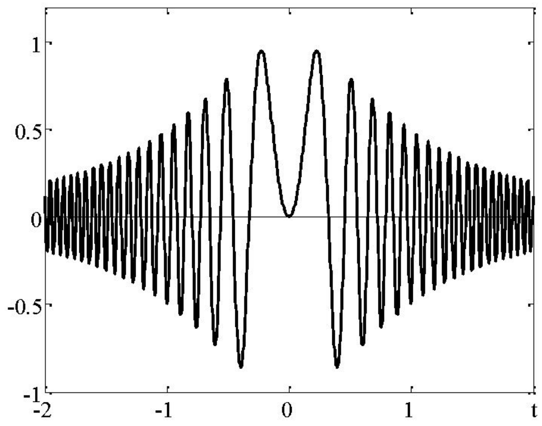
$$I(T) = \int_{A_-}^{A_+} e^{iTg(z)} f(z)dz \qquad (T \to \infty)$$

$g'(z) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad I(T) = -iT^{-1} \int_{A_-}^{A_+} \frac{f(z)}{g'(z)} de^{iTg(z)} = iT^{-1} \frac{f}{g'} e^{iTz} \Big|_{A_-}^{A_+} + o\left(T^{-1}\right)$ все как раньше

$\boxed{g'(z_0) = 0} \quad \Rightarrow \quad$ такие выкладки невозможны

Это подсказывает, что вклад от т.н. стационарных точек z_0с $g'(z_0) = 0$ должен быть больше, чем $O\left(T^{-1}\right)$. Это действительно так, он есть $O\left(T^{-1/2}\right)$





Графики вещественной (слева) и мнимой (справа) частей функции $e^{iTg(z)} f(z)$ при

$g(z) = z^2 \qquad f(z) = 1/(1+z^2)$

$T = 30$

11. Метод стационарной фазы: вычисления

$$I(T)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iTg(z)} f(z)dz \quad (T\to\infty)$$

$\boxed{g'(z_0)=0}$ Основной вклад в интеграл дает малая окрестность точки z_0

$$I(T)\approx\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(iT\left(g(z_0)+\frac{g''(z_0)}{2}(z-z_0)^2\right)\right)f(z_0)dz=$$

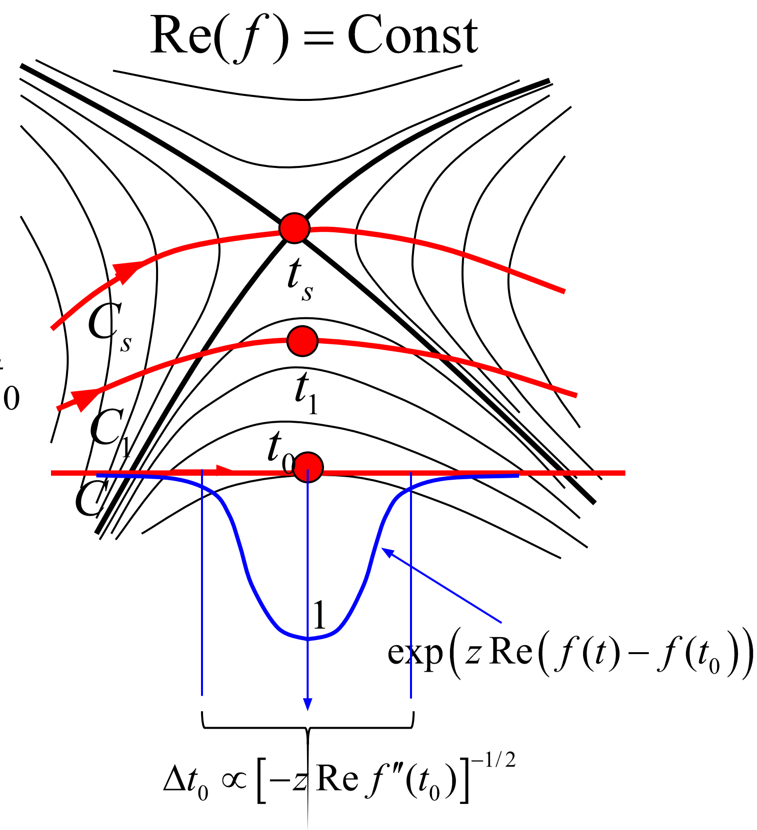
$$=e^{iTg(z_0)}f(z_0)\sqrt{\frac{2}{T\left|g''(z_0)\right|}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\pm ix^2}dx=$$

$$\boxed{\approx e^{iTg(z_0)\pm\pi i/4}f(z_0)\sqrt{\frac{2\pi}{T\left|g''(z_0)\right|}}}$$

Знак совпадает со знаком $g''(z_0)$

12. Метод скорейшего спуска.1-й шаг: деформация контура интегрирования

$$\boxed{\int_C e^{zf(t)} g(t)dt \quad (z \to +\infty)}$$



$\Delta\,\mathrm{Re}(f) = 0$ ⟹ $\mathrm{Re}(f)$ не имеет min, max

Все точки в которых $\nabla\,\mathrm{Re}(f) = 0$ седловые

$e^{z\,\mathrm{Re}(f)}$ имеет острый максимум вблизи t_0

Основной вклад в интеграл дает окрестность t_0

$$\int_C e^{zf(t)} g(t)dt \propto \cancel{e^{zf(t_0)} g(t_0)\Delta t_0}$$

Мешает мнимая часть f

$$\propto \cancel{e^{zf(t_1)} g(t_1)\Delta t_1}$$

$$\boxed{\propto e^{zf(t_s)} g(t_s)\Delta t_s}$$

Мнимая часть f константа

$$C_s \parallel \nabla\,\mathrm{Re}\, f \Rightarrow C_s \perp \nabla\,\mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f\big|_{C_s} = \mathrm{Const}$$

13. Метод скорейшего спуска.2-й шаг: локальный анализ

$$\boxed{\int_C e^{zf(t)} g(t)\,dt \quad \left(z \to +\infty\right)}$$

$$f'(t_s) = 0,\ f''(t_s) \neq 0 \qquad zf(t) = zf(t_s) + \frac{1}{2} zf''(t_s)\left(t - t_s\right)^2 + \frac{1}{6} zf'''(t_s)\left(t - t_s\right)^3 + \ldots$$

Вдоль выбранного пути интегрирования $\quad \mathrm{Re}\left(zf''(t_s)\left(t - t_s\right)^2\right) < 0$

Перенормировка $\quad t = z^{-1/2}\tau$

$$zf(t) = zf(t_s) + \frac{1}{2} f''(t_s)\tau^2 + O(z^{-1/2})$$

$$g(t) = g(t_s) + O(z^{-1/2})$$

$$\int_{C_s} e^{zf(t)} g(t)\,dt = \int_{'-\infty'}^{'\infty'} e^{zf(t_s)} e^{\frac{1}{2} f''(t_s)\tau^2} g(t_s)\left(1 + O(z^{-1/2})\right) z^{-1/2}\,d\tau$$

$$= \boxed{e^{zf(t_s)} g(t_s)\left(\frac{2\pi}{-zf''(t_s)}\right)^{1/2}}\left(1 + O(z^{-1/2})\right)$$

14. Метод скорейшего спуска: резюме

$$\int_C e^{zf(t)} g(t)dt \quad (z \to +\infty)$$

Не меняя значения интеграла так изменяем контур интегрирования, чтобы он проходил через одну или несколько точек перевала и лежал бы в долинах ниже этих точек. Если t_s - самая высокая точка перевала, такая, в которой $\operatorname{Re} f$ имеет наибольшее значение, то ее окрестность порождает главную часть интеграла при $z \to \infty$. Соответствующий вклад определяется формулой

$$e^{zf(t_s)} g(t_s) \left(\frac{2\pi}{-zf''(t_s)} \right)^{1/2}$$

Если имеется несколько точек перевала одинаковой высоты, то вклад каждой из них имеет величину одного и того же порядка, и мы должны просто просуммировать все эти вклады

15. Пример: функция Эйри

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{xt-\frac{1}{3}t^3}\,dt \qquad x \to \infty$$

Контур C, начинается на бесконечности с $\arg t = -2\pi/3$ и заканчивается на бесконечности с $\arg t = 2\pi/3$

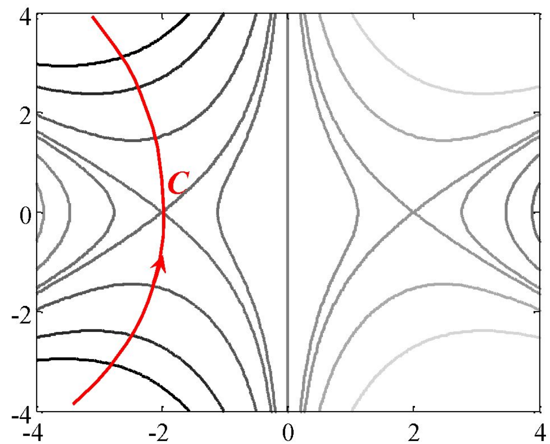
Точки перевала $t = \pm x^{1/2}$

Контур интегрирования должно продеформировать так, чтобы он проходил через левую точку перевала

Вблизи нее:

$$xt - \frac{1}{3}t^3 = -\frac{2}{3}x^{3/2} + x^{1/2}\left(t + x^{1/2}\right)^2 + O\left(\left(t + x^{1/2}\right)^3\right)$$

Ширина интервала, вносящего основной вклад в интеграл есть величина порядка $x^{-1/4}$



Линии уровня Re(g) при x=4 . Более насыщенный цвет линий отвечает меньшим значениям функции

16. Пример: функция Эйри

$$\boxed{\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{xt-\frac{1}{3}t^3}\,dt \qquad x\to\infty}$$

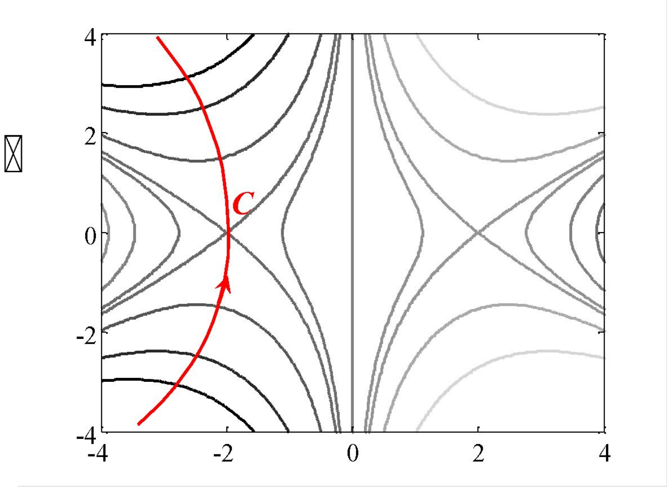
Перенормировка $\quad t = -x^{1/2} + x^{-1/4}\tau$

g(x,t) в новых переменных $\quad xt - \frac{1}{3}t^3 = -\frac{2}{3}x^{2/3} + \tau^2 - \frac{1}{3}x^{-3/4}\tau^3 + \ldots$

$$\mathrm{Ai}(x) \approx \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\pi i}x^{-1/4}\int_{'-i\infty'}^{'i\infty'} e^{\tau^2}\exp\left(-\frac{1}{3}x^{-3/4}\tau^3 + \ldots\right)d\tau \approx$$

$$\approx \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\pi i}x^{-1/4}\int_{'-i\infty'}^{'i\infty'} e^{\tau^2}\left(1 - \frac{1}{3}x^{-3/4}\tau^3 + \frac{1}{18}x^{-3/2}\tau^6 + \ldots\right)d\tau \approx$$

$$\boxed{\approx \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\pi^{1/2}x^{1/4}}\left(1 - \frac{5}{48}x^{-3/2}\right)}$$



17. Упражнения к лекции 3

1. Найти асимптотическое разложение при $x \to \infty$ интегралов

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} t^{-n} e^{-xt} dt, \qquad \Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$$

2. Получить главный член асимптотического представления интеграла при $x \to \infty$

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt^2}}{1+t^2} dt$$

3. Найти асимптотическое поведение интеграла при $x \to \infty$ и $z = O(1)$

$$K_x(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt - z \operatorname{ch} t} dt$$