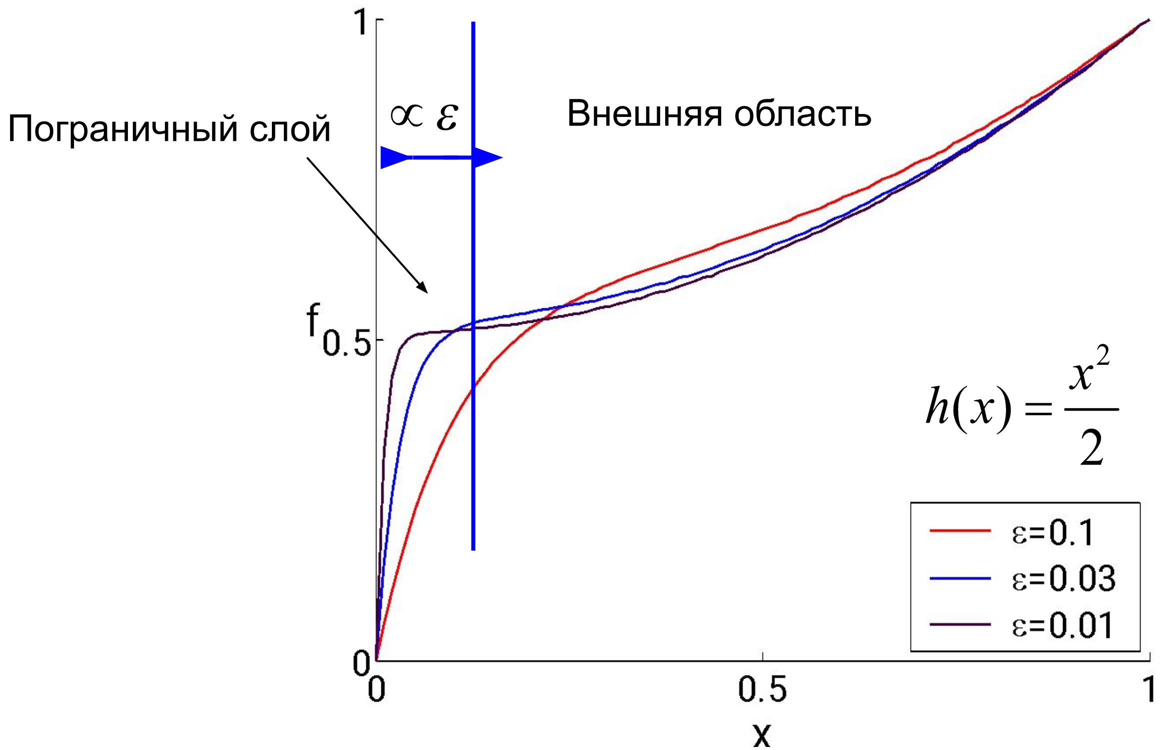
Введение в асимптотические методы. Лекция 6

Сращивание асимптотических разложения: модельные задачи

1. Модельная сингулярная задача

Модельная задача: $\boxed{\varepsilon f'' + f' = h', \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1}$

$$f = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x e^{(t-x)/\varepsilon} h(t)\,dt + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 e^{(t-1)/\varepsilon} h(t)\,dt\right)\frac{1-e^{-x/\varepsilon}}{1-e^{-1/\varepsilon}}$$



2. Внешнее разложение

$$\boxed{\varepsilon f'' + f' = h', \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1}$$

$$f = f_0(x) + \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x) + \ldots$$

$$f_0' = h', \quad \cancel{f_0(0) = 0}, \quad f_0(1) = 1$$
$$f_1' = -f_0'', \quad \cancel{f_1(0) = 0}, \quad f_1(1) = 0$$
$$f_2' = -f_1'', \quad \cancel{f_2(0) = 0}, \quad f_2(1) = 0$$

Нельзя удовлетворить обоим граничным условиям. Значит существуют погранслои, в которых данное АР неприменимо. Нам **известно**, что ПС находится в точке x=0, но не x=1.

$$f_0(x) = h(x) - h(1) + 1$$
$$f_1(x) = -\left(h'(x) - h'(1)\right)$$
$$f_2(x) = \left(h''(x) - h''(1)\right)$$

То, что внешнее разложение полностью определено, является **спецификой** рассматриваемой задачи. В общем случае оно содержит неопределенные константы интегрирования.

3. Внутреннее разложение

$$\varepsilon f'' + f' = h', \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

Погранслойная координата: $\xi = x/\varepsilon$

Нам **известно**, что ПС находится в точке x=0, и имеет ширину .$\propto \varepsilon$

$$f(x,\varepsilon) = F(\xi,\varepsilon)$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{d^2F}{d\xi^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{dF}{d\xi} = h'(\varepsilon\xi) = h'(0) + \varepsilon h''(0)\xi + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 h'''(0)\xi^2 + \ldots$$

$$F = F_0(\xi) + \varepsilon F_1(\xi) + \varepsilon^2 F_2(\xi) + \ldots$$

?

$$\frac{d^2F_0}{d\xi^2} + \frac{dF_0}{d\xi} = 0, \quad F_0(0) = 0 \qquad F_0 = A_0\left(1 - e^{-\xi}\right)$$

$$\frac{d^2F_1}{d\xi^2} + \frac{dF_1}{d\xi} = h'(0), \quad F_1(0) = 0 \qquad F_1 = h'(0)\xi + A_1\left(1 - e^{-\xi}\right)$$

$$\frac{d^2F_2}{d\xi^2} + \frac{dF_2}{d\xi} = \xi h''(0), \quad F_2(0) = 0 \qquad F_2 = h''(0)\left(\tfrac{1}{2}\xi^2 - \xi\right) + A_2\left(1 - e^{-\xi}\right)$$

4. Сращивание: правило Ван Дайка

Внешний предел внутреннего разложения равен внутреннему пределу внешнего разложения

$$E_2^{(m)}\left\{\left(E_1^{(n)}f\right)(\xi,\varepsilon)\right\} \equiv E_1^{(n)}\left\{\left(E_2^{(m)}F\right)(x,\varepsilon)\right\}$$

$$m = n = 3$$

1) подставляем во внешнее разложение $x = \varepsilon\xi$ и проводим разложение полученного выражения по ε с удержанием трех главных членов

$$E_2^{(3)}\left\{\left(E_1^{(3)}f\right)(\xi,\varepsilon)\right\} = \left(h(\varepsilon\xi) - h(1) + 1\right) - \varepsilon\left(h'(\varepsilon\xi) - h'(1)\right) + \varepsilon^2\left(h''(\varepsilon\xi) - h''(1)\right) =$$

$$= \left(h(0) + \varepsilon h'(0)\xi + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 h''(0)\xi^2 - h(1) + 1\right) - \varepsilon\left(h'(0) + \varepsilon h''(0)\xi - h'(1)\right) + \varepsilon^2\left(h''(0) - h''(1)\right)$$

2) подставляем во внутреннее разложение $\xi = x/\varepsilon$ и проводим разложение полученного выражения по ε с удержанием трех главных членов

$$E_1^{(3)}\left\{\left(E_2^{(3)}F\right)(x,\varepsilon)\right\} = A_0\left(1 - e^{-x/\varepsilon}\right) + \varepsilon\left(h'(0)x\varepsilon^{-1} + A_1\left(1 - e^{-x/\varepsilon}\right)\right) +$$

$$+\varepsilon^2\left(h''(0)\left(\tfrac{1}{2}x^2\varepsilon^{-2} - x\varepsilon^{-1}\right) + A_2\left(1 - e^{-x/\varepsilon}\right)\right) =$$

$$\left(A_0 + h'(0)x + \tfrac{1}{2}h''(0)x^2\right) + \varepsilon\left(A_1 - h''(0)x\right) + \varepsilon^2 A_2$$

5. Сращивание: правило Ван Дайка

Внешний предел внутреннего разложения равен внутреннему пределу внешнего разложения

$$E_2^{(m)}\left\{\left(E_1^{(n)} f\right)(\xi,\varepsilon)\right\} \equiv E_1^{(n)}\left\{\left(E_2^{(m)} F\right)(x,\varepsilon)\right\}$$

$$m = n = 3$$

3) переходим в первом из этих разложений от переменной ξ к переменной x

$$E_2^{(3)}\left\{\left(E_1^{(3)} f\right)(\xi,\varepsilon)\right\}\Big|_{\xi=x/\varepsilon} = \left(h(0)+h'(0)x+\tfrac{1}{2}h''(0)x^2-h(1)+1\right)-$$
$$-\varepsilon\left(h'(0)+h''(0)x-h'(1)\right)+\varepsilon^2\left(h''(0)-h''(1)\right)$$

4) сравнивая полученное выражение с

$$E_1^{(3)}\left\{\left(E_2^{(3)} F\right)(x,\varepsilon)\right\} = \left(A_0+h'(0)x+\tfrac{1}{2}h''(0)x^2\right)+\varepsilon\left(A_1-h''(0)x\right)+\varepsilon^2 A_2$$

находим

$$A_0 = h(0)-h(1)+1,$$
$$A_1 = h'(1)-h'(0),$$
$$A_2 = h''(0)-h''(1).$$

6. Равномерно пригодное разложение

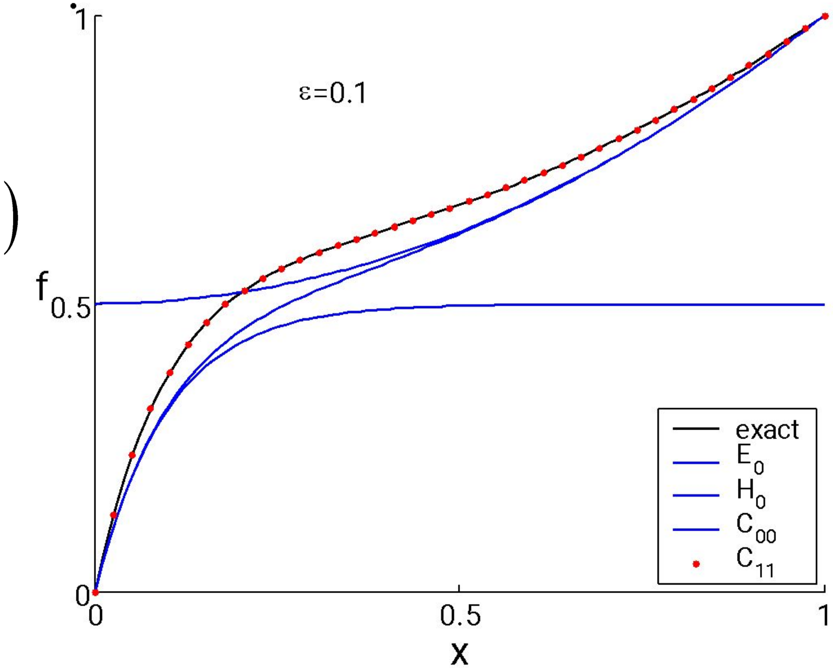
$$\underbrace{C_{n,m} f}_{\text{составное разложение}} = \underbrace{E_1^{(n)} f}_{\text{внешнее}} + \underbrace{E_2^{(m)} F}_{\text{внутреннее}} - \underbrace{E_1^{(n)} \left\{ \left(E_2^{(m)} F \right)(x,\varepsilon) \right\}}_{\text{общая часть}}$$

$$C_{1,1} f = \left(h(x) - h(1) + 1 \right) + \left(h(0) - h(1) + 1 \right)\left(1 - e^{-x/\varepsilon} \right) - \left(h(0) - h(1) + 1 \right) =$$

$$= h(x) - h(1) + 1 - \left(h(0) - h(1) + 1 \right) e^{-x/\varepsilon}.$$

$$C_{22} f = C_{11} f -$$

$$-\varepsilon \left(h'(x) - h'(1) - \left(h'(0) - h'(1) \right) e^{-x/\varepsilon} \right)$$



7. Толщина погранслоя

Толщина ПС $\propto \varepsilon^{\alpha}$ $\alpha > 0,$ $\alpha = ?$ Погранслойная координата $\xi = x / \varepsilon^{\alpha}$

$$\boxed{\varepsilon f_{xx} \quad + \quad f_x \quad = \quad h_x}$$

$\alpha = 0$			……баланс……	внешнее
$0 < \alpha < 1$			главный	перекрытие
$\alpha = 1$	……….баланс………....			внутреннее
$\alpha > 1$	главный			под-внутреннее

Потенциально интересны те перенормировки, которые обеспечивают баланс 2-х или более членов уравнения !

Важно, что в области перекрытия внешнего и внутреннего разложения, т. е. при $0 < \alpha < 1$ внешняя и внутренняя задачи имеют в качестве главного один и тот же (конвективный) член. Именно это обстоятельство в конечном итоге и позволяет срастить внешнее и внутреннее разложения.

8. Толщина погранслоя: пример 2

$$\varepsilon f'' + \sqrt{x} f' + f = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

Внешнее АР $\qquad \sqrt{x} f_0' + f_0 = 0, \quad f_0(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad f_0 = e^{-2\left(\sqrt{x}-1\right)}$

Толщина ПС $\qquad \xi = x/\varepsilon^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^{1-2\alpha} f'' + \varepsilon^{-\alpha/2}\sqrt{\xi} f' + f = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 2\alpha = -\alpha/2 \quad \alpha = \dfrac{2}{3}$

Внутреннее АР $\qquad g_0'' + \sqrt{\xi} g_0' = 0, \; g_0(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad g_0 = A\int\limits_0^{\xi} \exp\left(-\tfrac{2}{3}\xi\sqrt{\xi}\right) d\xi$

Сращивание $\qquad f_0(0) = g_0(\infty) \quad \Rightarrow \quad A = e^2 \Big/ \int\limits_0^{\infty} \exp\left(-\tfrac{2}{3}\xi\sqrt{\xi}\right) d\xi$

9. Толщина погранслоя: пример 3

Во многих задачах толщина пограничного слоя подсказывается самим видом внешнего разложения

$$\frac{dy}{dx} + y + \varepsilon y^2 = x, \qquad x > 1; \qquad y(1) = 1$$

$$y = x - 1 + e^{1-x} + \varepsilon\left(-x^2 + 4x - 5 - \left(x^2 - 2x\right)e^{1-x} + e^{2(1-x)}\right) + \ldots$$

главный и следующий члены разложения становятся соизмеримы, а значит, разложение разваливается при $x \sim \varepsilon^{-1}$

Пограничный слой в этой задаче лежит на бесконечности, и при его изучении необходимо нормировать пространственную координату на ε^{-1}. В отличие от рассмотренных выше задач, здесь оказывается необходимым перенормировать также и искомую функцию . На этого также указывает полученное разложение : при $x \propto \varepsilon^{-1}$ оба его члена разложения имеют порядок ε^{-1}. Поэтому подходящей перенормировкой при изучении ПС будет

$$\xi = x\varepsilon, \quad Y = y\varepsilon$$

10. Толщина погранслоя: пример 3

$$\varepsilon \frac{dY}{d\xi} + Y + Y^2 = \xi$$

В главном члене $\quad Y + Y^2 = \xi \quad \Rightarrow \quad Y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4\xi}}{2}$

Для выбора знака нужно срастить главные члены внутреннего и внешнего разложений

$$E_2^{(1)}\left\{\left(E_1^{(1)} y\right)(\xi,\varepsilon)\right\} = \frac{\xi}{\varepsilon} - 1 + e^{1-\xi/\varepsilon} \sim \varepsilon^{-1}\xi = x$$

верный выбор

$$E_1^{(1)}\left\{\left(E_2^{(1)} \varepsilon^{-1} Y\right)(x,\varepsilon)\right\} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4x\varepsilon}}{2\varepsilon} \sim \frac{-1 \pm (1+2x\varepsilon)}{2\varepsilon} = \begin{cases} x & +\sqrt{} \\ -\varepsilon^{-1} & -\sqrt{} \end{cases}$$

Составное разложение

$$C_{1,1}(y) = \left(x - 1 + e^{1-x}\right) + \left(\frac{\sqrt{1+4x\varepsilon} - 1}{2\varepsilon}\right) - x = e^{1-x} - 1 + \frac{2x}{1+\sqrt{1+4x\varepsilon}}$$

11. Где пограничный слой?

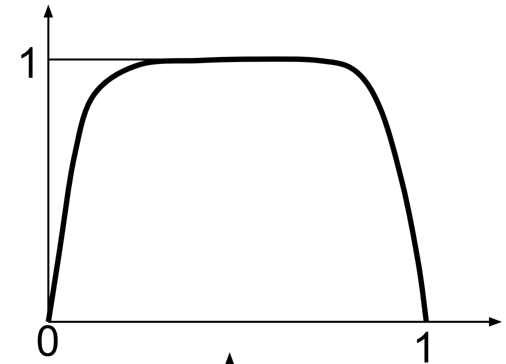
Помогают узнать:

- Численные расчеты
- Физические соображения
- Если угадано неправильно, то не удастся срастить разложения

Пример 1: 2 ПС на обоих концах интервала

$$\varepsilon^2 f'' - f = -1, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 0$$

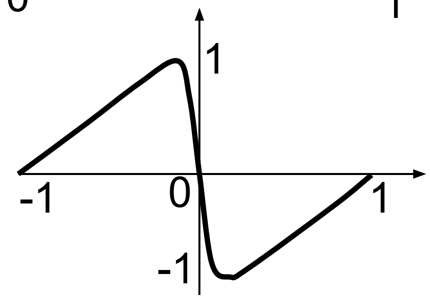
$$f \approx 1 - e^{-x/\varepsilon} - e^{(x-1)/\varepsilon}$$



Пример 2: ПС в середине интервала

$$\varepsilon f'' + 2xf' = 2x, \quad f(-1) = 0, \quad f(1) = 0$$

$$f \approx x - \operatorname{erf}\left(x/\sqrt{\varepsilon}\right)$$



12. Где пограничный слой? Пример 4

$$\varepsilon y'' + yy' - y = 0, \qquad 0 < y < 1$$

$$y(0) = A, \quad y(1) = B.$$

Главный член внешнего разложения $\quad y_0 y_0' - y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0,\ y_0 = x + \mathrm{const}$

$$y_{0R}(x) = x + B - 1$$

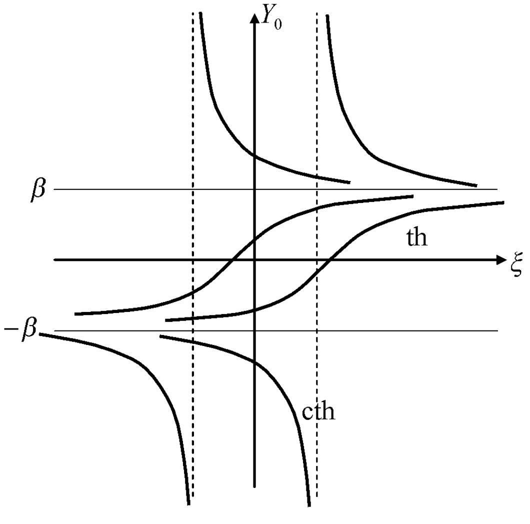
$$y_{0L}(x) = x + A$$

Погранслой $\quad \xi = (x - x_d)/\varepsilon, \quad Y(\xi,\varepsilon) = y(x,\varepsilon) \qquad Y = Y_0(\xi) + \varepsilon Y_1(\xi) + \ldots$

$$Y_0'' + Y_0 Y_0' = 0 \qquad Y_0' + \frac{1}{2}Y_0^2 = \frac{1}{2}\beta^2$$

$$Y_0(\xi) = \beta \operatorname{th}\frac{\beta}{2}(\xi + k)$$

$$Y_0(\xi) = \beta \operatorname{cth}\frac{\beta}{2}(\xi + k)$$



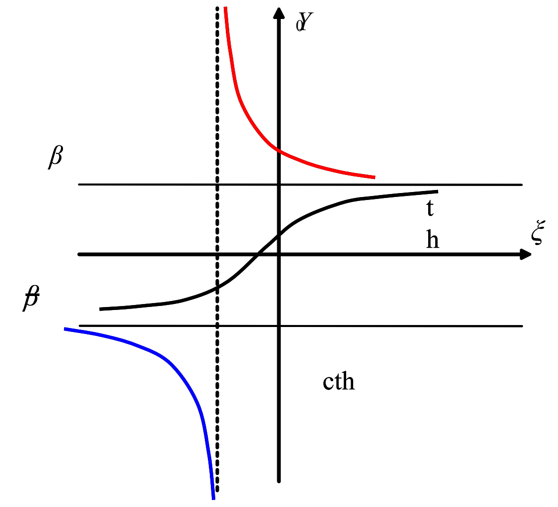
13. Пример 4: режимы 1, 2

$$A > B - 1 > 0 \qquad x_d = 0$$

$$y_{0R}(x) = x + B - 1 \qquad Y_0(\xi) = \beta\,\mathrm{cth}\frac{\beta}{2}(\xi + k)$$

сращивание $\beta = B - 1$

граничное условие $A = (B-1)\,\mathrm{cth}\left(\frac{B-1}{2}k\right)$

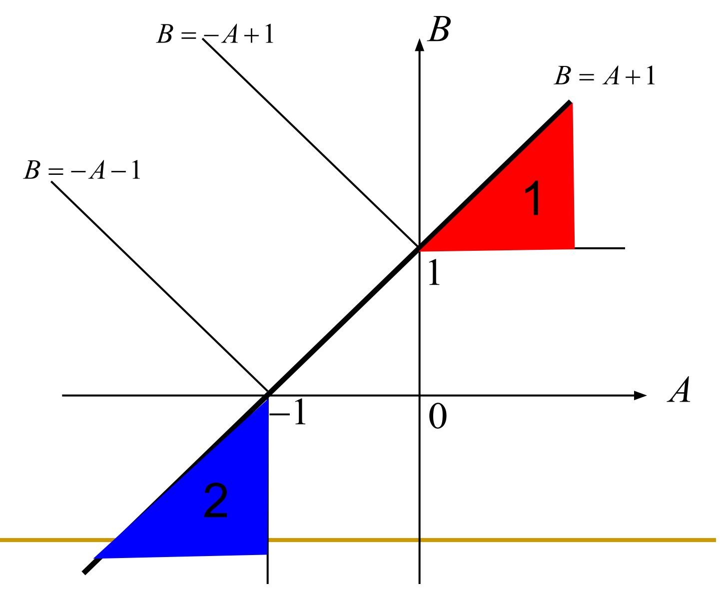


$$B < A + 1 < 0 \qquad x_d = 1$$

$$y_{0L}(x) = x + A \qquad Y_0(\xi) = \beta\,\mathrm{cth}\frac{\beta}{2}(\xi + k)$$

сращивание $\beta = -(A+1)$

граничное условие $B = -(A+1)\,\mathrm{cth}\left(\frac{-A-1}{2}(1+k)\right)$



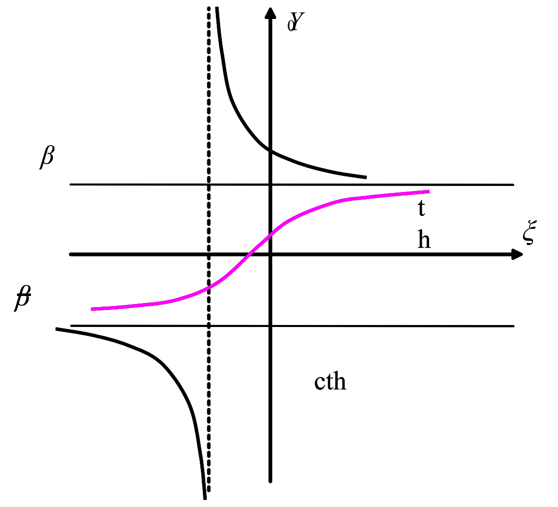
14. Пример 4: режимы 3, 4

$|A| < B-1,\ B-1>0$ $\qquad x_d = 0$

$y_{0R}(x) = x + B - 1 \qquad Y_0(\xi) = \beta \operatorname{th}\frac{\beta}{2}(\xi + k)$

сращивание $\qquad \beta = B - 1$

граничное условие $\qquad A = (B-1)\operatorname{th}\left(\frac{B-1}{2}k\right)$

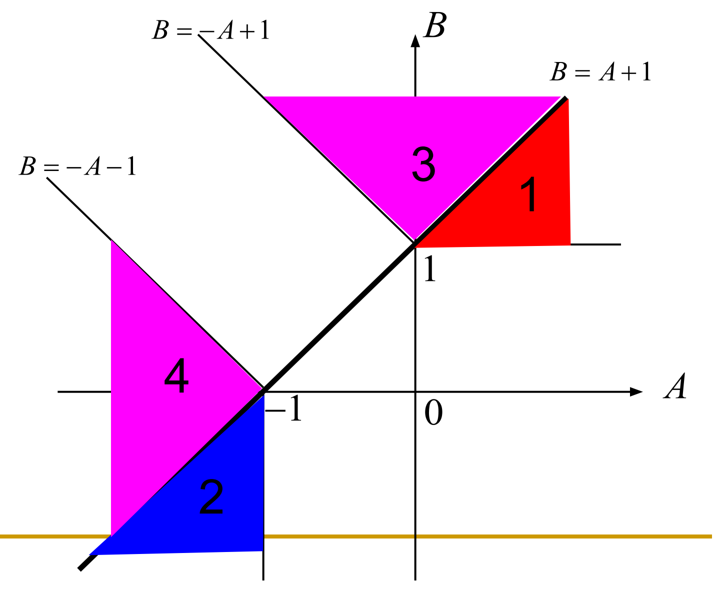


$|B| < -A-1,\ A+1<0$ $\qquad x_d = 1$

$y_{0L}(x) = x + A \qquad Y_0(\xi) = \beta \operatorname{th}\frac{\beta}{2}(\xi + k)$

сращивание $\qquad \beta = -(A+1)$

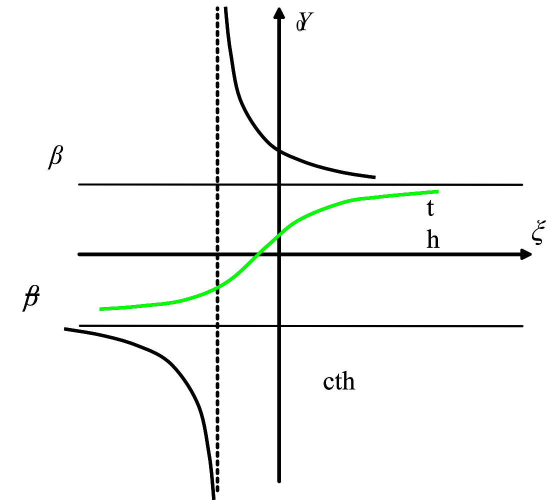
граничное условие $\qquad B = -(A+1)\operatorname{th}\left(\frac{-A-1}{2}(1+k)\right)$



15. Пример 4: режим 5

$B > A+1,\ -(B+1) < A < 1-B$ $\qquad 0 < x_d < 0$

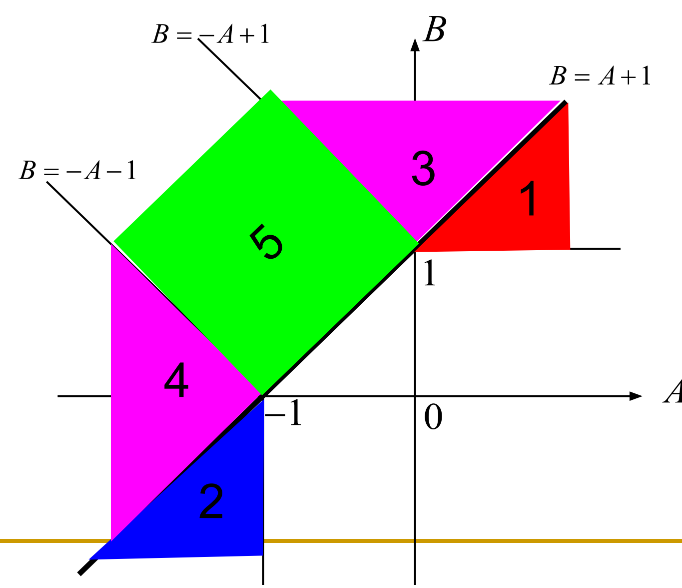
$$y_0 = \begin{cases} x+B-1 & x > x_d \\ x+A & x < x_d \end{cases} \qquad Y_0(\xi) = \beta \,\mathrm{th}\frac{\beta}{2}(\xi+k)$$



сращивание $\qquad \beta = x_d + B - 1 = -A - x_d$

$$x_d = \frac{1-A-B}{2}$$

$$Y_0(\xi) = \frac{B-A-1}{2}\,\mathrm{th}\,\frac{B-A-1}{4}\xi$$



16. Упражнения к лекции 6

1. Рассмотреть при $0 < m < 1, \varepsilon \to 0$ задачу

$$0 < x < 1: \quad \varepsilon x^m y' + y = 1, \quad y(0) = 0$$

2. Рассмотреть задачу $\varepsilon y'' + x^{1/2} y' + y = 1, \quad 0 < x < 1$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

Вначале найти перенормировку для пограничного слоя вблизи и получить главный член внутреннего разложения. Далее найти главный член внешнего разложения и срастить разложения

3. Определить где находятся погранслои и найти главные члены внешнего и внутреннего разложений для задач

$$0 < x < 1: \quad \varepsilon y'' - y = 1, \qquad y(0) = y(1) = 0$$

$$-1 < x < 1: \quad \varepsilon y'' + 2y\left(1 - y^2\right) = 0, \qquad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1$$