Введение в асимптотические методы. Лекция 5

Регулярные возмущения в дифференциальных уравнениях

1. Регулярные возмущения

- К сожалению, немногие возмущения ДУ регулярны
- Работать с регулярными возмущениями просто: применимы “очевидные” разложения
- Задачи могут быть возмущены в

уравнении

граничных условиях

положении границы

просто

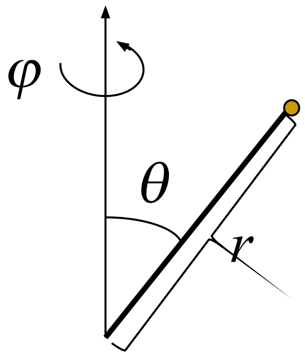
чуть сложнее

- Далее приводятся всего 2 примера регулярно возмущенных задач, оба с возмущением в положении границы

2. Полиномы Лежандра

Сферические координаты

$$\Delta u(r,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}$$



Ищем решение вида

$$u = \frac{\Theta_n(\theta)}{r^{n+1}} \qquad u = \Theta_n(\theta) r^n$$

Задача на собственные значения

$$n(1+n)\Theta_n + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Theta_n}{d\theta} = 0$$

$$y = \cos\theta$$

$$\Theta_n(\theta) = P_n(\cos\theta)$$

$$n(1+n)P_n(y) + \frac{d}{dy}\left(1-y^2\right)\frac{dP_n(y)}{\partial y} = 0$$

Задача на собственные значения имеет решения при n=1,2,….
Собственные функции - полиномы Лежандра

$$P_0(y) = 1, \quad P_1(y) = y, \quad P_2(y) = \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}, \quad \dots$$

3. Полиномы Лежандра

Система полиномов Лежандра полна и ортогональна

$$n(1+n)P_n(y)+\frac{d}{dy}\left(1-y^2\right)\frac{dP_n(y)}{\partial y}=0 \qquad \times P_m(y) \qquad \int_{-1}^{1}\bullet dy$$

$$n(1+n)\int_{-1}^{1}P_n(y)P_m(y)dy=\int_{-1}^{1}\left(1-y^2\right)P_n'(y)P_m'(y)dy$$

$$-$$

$$m(1+m)\int_{-1}^{1}P_n(y)P_m(y)dy=\int_{-1}^{1}\left(1-y^2\right)P_n'(y)P_m'(y)dy$$

ортогональность

$$\int_{-1}^{1}P_n(y)P_m(y)dy=0, \qquad n\neq m$$

$$\begin{cases}\Delta u(r,\theta)=0, & r<1\\ r=1: & u=f(\theta)\end{cases}$$

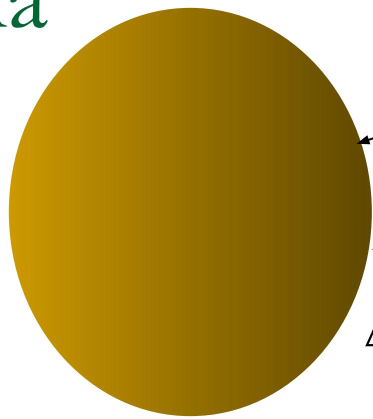
$$\begin{cases}\Delta u(r,\theta)=0, & r>1\\ r=1: & u=f(\theta)\end{cases}$$

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(\cos\theta)$$

$$\boxed{u=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(\cos\theta)\,r^n}$$

$$\boxed{u=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(\cos\theta)\,r^{-n-1}}$$

4. Потенциал вокруг близкого к сфере тела



$u=1$

$r=1+\varepsilon P_2\left(\cos\theta\right)$

С точностью $O\left(\varepsilon^2\right)$
эллипсоид вращения того же объема, что и сфера радиуса 1.

$\Delta u(r,\theta)=0$

$$u=u_0\left(r,\theta\right)+\varepsilon u_1\left(r,\theta\right)+\varepsilon^2 u_2\left(r,\theta\right)+\ldots$$

Граничное условие

$$1=u\Big|_{r=1+\varepsilon P_2}=u\Big|_{r=1}+\varepsilon\, P_2\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}+\frac{\left(\varepsilon P_2\right)^2}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right|_{r=1}+\ldots=$$

$$=u_0\Big|_{r=1}+\varepsilon\left(u_1\Big|_{r=1}+P_2\left.\frac{\partial u_0}{\partial r}\right|_{r=1}\right)+\varepsilon^2\left(u_2\Big|_{r=1}+P_2\left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=1}+\frac{P_2^2}{2}\left.\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}\right|_{r=1}\right)+\ldots$$

5. Потенциал вокруг близкого к сфере тела

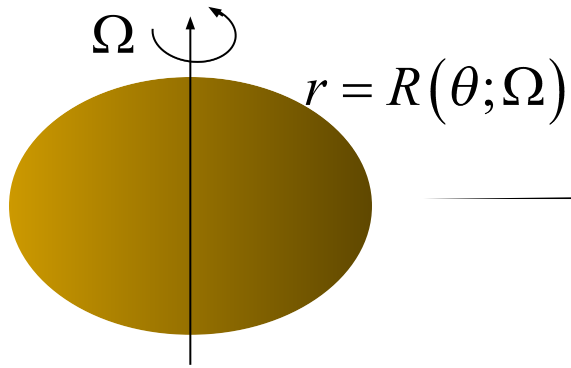
$$\varepsilon^0 \begin{cases} \Delta u_0 = 0 \quad r > 1 \\ u_0(1,\theta) = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad u_0 = \frac{1}{r}$$

$$\varepsilon^1 \begin{cases} \Delta u_1 = 0 \quad r > 1 \\ u_1(1,\theta) = -P_2 \left.\frac{\partial u_0}{\partial r}\right|_{r=1} = P_2(\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow \quad u_1 = \frac{P_2(\cos\theta)}{r^2}$$

$$\varepsilon^2 \begin{cases} \Delta u_2 = 0 \quad r > 1 \\ u_2(1,\theta) = 2P_2^2(\cos\theta) = \\ \quad = \frac{36}{35}P_4 + \frac{4}{7}P_2 + \frac{2}{5}P_0 \end{cases} \Rightarrow \quad u_2 = \frac{36P_4(\cos\theta)}{35r^5} + \frac{4P_2(\cos\theta)}{7r^3} + \frac{2}{5r}$$

Эл. емкость $C = 4\pi \times$ коэффициент при $r^{-1} = 4\pi\left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \dots\right)$

6. Форма медленно вращающегося гравитационного жидкого тела



$$\Delta u = \begin{cases} 1 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

$u, \partial u / \partial n$ непрерывны при $r = R$

$u \to 0 \qquad (r \to \infty)$

$r = R: \qquad u - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2\theta = \mathrm{Const}$ (свободная поверхность – эквипотенциаль)

$$\int_{r<R} dV = \frac{4\pi}{3}$$ (условие нормировки)

$u = u_0(r,\theta) + \Omega^2 u_1(r,\theta), \qquad R = 1 + \Omega^2 R_1(\theta)$ асимптотическое разложение

$$\Delta u_0 = \begin{cases} 1 & r < 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \qquad \Delta u_1 = \begin{cases} 0 & r < 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases}$$ уравнение

$u_0 \to 0, \quad u_1 \to 0 \qquad (r \to \infty)$ поведение на бесконечности

$$\int_0^\pi R_1(\theta)\sin\theta \, d\theta = 0$$ нормировка

7. Форма медленно вращающегося гравитационного жидкого тела

$$u\big|_{r=R} = u\big|_{r=1} + \Omega^2 R_1 \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=1} = u_0\big|_{r=1} + \Omega^2\left(u_1\big|_{r=1} + R_1 \frac{\partial u_0}{\partial r}\bigg|_{r=1}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{r=R} = \left[1+\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{d\theta}\right)^2\right]^{-1/2}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{R^2}\frac{dR}{d\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\bigg|_{r=R} =$$

$$= \frac{\partial u_0}{\partial r}\bigg|_{r=1} + \Omega^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\bigg|_{r=1} + R_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}\bigg|_{r=1} - \frac{dR_1}{d\theta}\frac{\partial u_0}{\partial \theta}\bigg|_{r=1}\right) + O\left(\Omega^4\right)$$

$$\left[u_0\right]_{r=1} = 0, \left[u_1\right]_{r=1} = 0, \left[\partial u_0 / \partial r\right]_{r=1} = 0, \left[\partial u_1 / \partial r\right]_{r=1} = -R_1\left[\partial^2 u_0 / \partial r^2\right]_{r=1}$$ непрерывность

$$u_0\big|_{r=1} = \mathrm{Const}, \quad \left(u_1 + R_1\frac{\partial u_0}{\partial r}\right)\bigg|_{r=1} = \frac{1}{2}\sin^2\theta + \mathrm{Const},$$ эквипотенциальность

8. Форма медленно вращающегося гравитационного жидкого тела

$$\Omega^0: \quad \Delta u_0 = \begin{cases} 1 & r<1 \\ 0 & r>1 \end{cases} \qquad u_0\big|_{r=\infty} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u_0 = \begin{cases} \frac{1}{6}r^2 - \frac{1}{2} & r<1 \\ -\frac{1}{3}r^{-1} & r>1 \end{cases}$$

$$\left[u_0\right]_{r=1} = \left[\partial u_0/\partial r\right]_{r=1} = 0 \qquad u_0\big|_{r=1} = \mathrm{Const}$$

$$\Omega^2: \quad \Delta u_1 = 0 \qquad u_1\big|_{r=\infty} = 0 \qquad \left[u_1\right]_{r=1} = 0 \qquad \left[\partial u_1/\partial r\right]_{r=1} = R_1 \qquad \int_0^{\pi} R_1(\theta)\sin\theta\, d\theta = 0$$

$$u_1\big|_{r=1} + \tfrac{1}{3}R_1 = \tfrac{1}{2}\sin^2\theta + \mathrm{Const} = -\tfrac{1}{3}P_2(\cos\theta) + \mathrm{Const}$$

$$R_1 = aP_2(\cos\theta) \qquad u_1 = c\begin{cases} r^2 P_2(\cos\theta) & r<1 \\ r^{-3}P_2(\cos\theta) & r>1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad -5c = a, \quad c + \frac{1}{3}a = -\frac{1}{3}$$

$$c = \frac{1}{2}, \quad a = -\frac{5}{2}$$

$$R_{\text{экв}} - R_{\text{пол}} = \Omega^2\left(R_1(\pi/2) - R_1(0)\right) = \frac{15}{4}\Omega^2$$

9. Приложение к Земле

Считаем, что Земля жидкая (?) и однородная (??)

Известно, что $R^*_{\text{экв}} - R^*_{\text{пол}} = 21\ \text{км}, \quad R^* = 6400\ \text{км}$

Какова должна быть скорость вращения Земли, чтобы факты соответствовали нашей теории?

$$\frac{R^*_{\text{экв}} - R^*_{\text{пол}}}{R^*} = \frac{15}{4}\Omega^2 \quad \Rightarrow \quad \Omega^2 = \frac{4 \cdot 21}{15 \cdot 6400} = 8.75 \cdot 10^{-4}$$

Выразим безразмерную величину Ω через угловую скорость вращения Земли ω и ускорение свободного падения g

Поведение истинного гравитационного потенциала на ∞ $\quad u^* = -g\dfrac{\left(R^*\right)^2}{r^*} = -\dfrac{gR^*}{r}$

Поведение безразмерного гравитационного потенциала на ∞ $\quad u = -\dfrac{1}{3r}$

Истинные потенциалы в задаче нормированы на $3gR^*$

Центробежные силы
$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}\Omega^2\left(r^*/R^*\right)^2 \sin^2\theta \\ \frac{1}{2}\omega^2\left(r^*\right)^2 \sin^2\theta \end{array}\right\} \boxed{\Omega^2 = \frac{\omega^2 R^*}{3g}} \qquad \omega = \Omega\sqrt{\frac{3g}{R^*}} = 6.34 \cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 27.5\ \text{час}$$

10. Возмущения в уравнениях: пример

$$0 < y < 1: \quad \frac{dy}{dx} + y + \varepsilon y^2 = x, \qquad y(1) = 1$$

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \dots$$

$$y_0' + y_0 = x, \qquad y_0(1) = 1 \qquad \Rightarrow y_0 = x - 1 + e^{1-x}$$

$$y_1' + y_1 = -y_0^2 = \left(x - 1 + e^{1-x}\right)^2, \quad y_1(1) = 0 \quad \Rightarrow y_1 = -x^2 + 4x - 5 - \left(x^2 - 2x\right)e^{1-x} + e^{2(1-x)}$$

$$y \sim x - 1 + e^{1-x} + \varepsilon\left(-x^2 + 4x - 5 - \left(x^2 - 2x\right)e^{1-x} + e^{2(1-x)}\right) + \dots$$

Полученное разложение равномерно пригодно на интервале $x \in (0,1)$

Если интересует $x \in (1,\infty)$ то разложение не равномерно пригодно

Оно разваливается при больших $x \propto \varepsilon^{-1}$

Что делать в этой ситуации мы обсудим на следующей лекции, когда будем рассматривать сингулярно возмущенные задачи

11. Упражнение к лекции 5

1. Ламинарное течение жидкости в слабо изогнутой щели

$$\begin{cases} \Delta u = -1 & |y| < h(x,\varepsilon) \equiv 1 + \varepsilon \cos kx \\ u = 0 & y = \pm h(x,\varepsilon) \end{cases} \qquad u = v_z, \quad -1 =$$

Безразмерный перепад давления вдоль оси z

Получить 3 главных члена в асимптотическом разложении и подсчитать средний на единицу ширины щели поток

$$Q = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} \int_{-h(x)}^{h(x)} u(x,y)\,dy\,dx$$