Производная

функции одной переменной

Основные обозначения

- Функция y = f(x) задана на множестве X
- Пусть $x_0 \in X$. Найдем $y_0 = f(x_0)$.
- Придадим **аргументу приращение Δx** так, чтобы $x = x_0 + \Delta x \in X$
- Найдем $y = f(x_0+\Delta x)$.
- Обозначим $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

  Δy - приращение функции.
- Найдем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Определение производной

- **Производной функции y = f(x) в точке x_0** называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента в этой точке при $\Delta x \to 0$ (если он существует).

- Обозначения: **f´(x)** или **y'_x** или $\dfrac{df}{dx}$ или $\dfrac{dy}{dx}$

- Символическая запись определения:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (*)$$

Частные случаи определения

- Если в точке x_0 предел (*) бесконечен, то говорят, что в точке x_0 функция имеет **бесконечную производную:** $f'(x_0)=\infty$
- Если в точке x_0 предел (*) – правосторонний, т.е. найден при $\Delta x \to 0+$, то найденная производная называется **правой** и обозначается $f'_+(x_0)$
- Аналогично определяется **левая производная** функции в точке: $f'_-(x_0)$
- Если функция имеет в точке производную, то она имеет в этой точке правую и левую производные, и все они равны между собой – **достаточное условие дифференцируемости** функции.

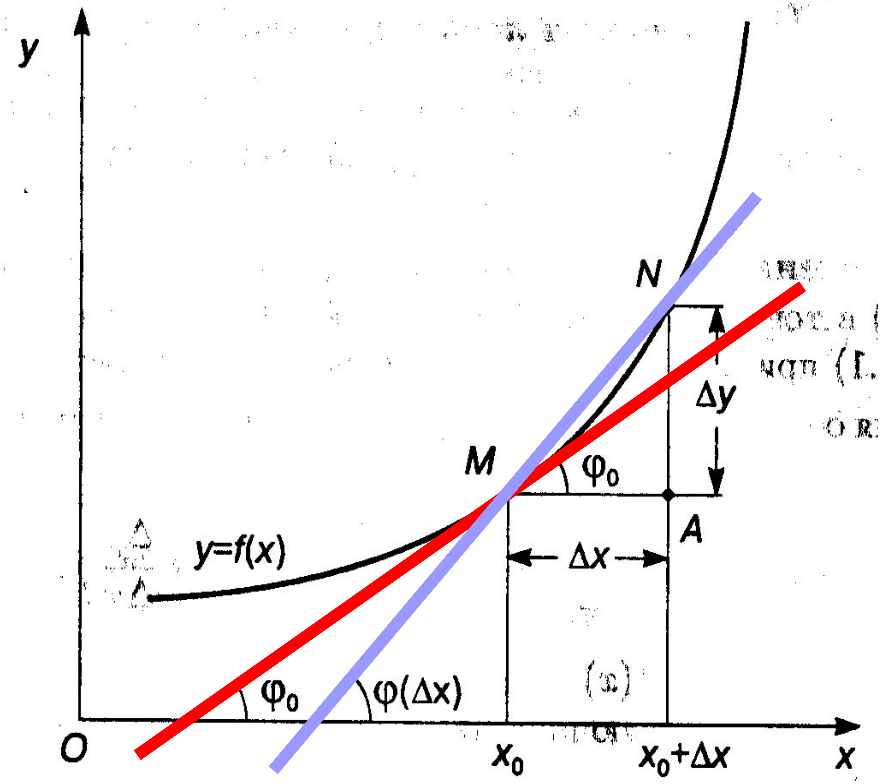
Дифференцирование функции

- Операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**.
- Если функция имеет конечную производную в точке, то называется **дифференцируемой в** этой **точке;** функция, дифференцируемая в каждой точке промежутка, называется **дифференцируемой на** этом **промежутке**.
- Дифференцируемость (гладкость) – одно из основных свойств функции.
- Если функция f(x) дифференцируема на множестве X, то ее производная f´(x) является функцией, определенной на множестве X.

Связь дифференцируемости и непрерывности функции

- **Теорема:** Если функция дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.
- Обратное утверждение неверно.
- Непрерывность – **необходимое условие** дифференцируемости.
- Теорема: Если функция разрывна в точке, то в этой точке ее производная бесконечна или не существует

Геометрический смысл производной



Пусть M $(x_0, f(x_0))$

N $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$

Тогда $\Delta x = MA$

$\Delta y = NA$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{NA}{MA} = tg\varphi$$

При $\Delta x \to 0$ $\varphi \to \varphi_0$

$$tg\varphi \to tg\varphi_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to tg\varphi_0$$

Геометрический смысл производной

- Значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной, проведенной в данной точке к графику функции:

$$f'(x_0) = k_{касат} = tg\varphi_0$$

- Угол наклона касательной к графику в точке x_0:

$$\varphi_0 = arctg\_f'(x_0)$$

- Уравнение касательной к графику функции в точке x_0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Физический смысл производной

- **Механический смысл производной**: Производная $\mathbf{s'(t_0)}$ пути по времени в момент t_0 есть **мгновенная скорость** движения материальной точки в момент времени. Производная пути по времени есть скорость движения материальной точки по прямой:

  $$\mathbf{s'(t)=v(t)}$$

- **Обобщенный физический смысл:** Если течение некоторого процесса описывает функция $\mathbf{y=f(x)}$, то производная этой функции $\mathbf{f'(x)}$ описывает **скорость протекания** этого процесса.

Правила дифференцирования

- Производная суммы равна сумме производных:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

- Производная произведения находится по формуле:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

В частности, постоянный множитель выносится за зна
производной:

$$(cu)' = c \cdot u'$$

- Производная частного находится по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

- Производная сложной функции равна произведению
производных всех преобразований, начиная с последнего:

$$y = f(u), u = g(x) \Rightarrow y' = f'(u) \cdot g'(x)$$

Дифференцирование функций, заданных неявно

- Если функция y от x задана уравнением F(x,y)=0, то она **задана неявно**.

- Для нахождения производной неявно заданной функции, надо:

1. продифференцировать по x обе части уравнения;
2. из полученного уравнения выразить **y´.**

Дифференцирование функций, заданных параметрически

- Если функция y от x задана уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \phi(t), \end{cases} \quad t \in T$$

то говорят, что она **задана параметрически** (t – параметр уравнений).

- Производную функции, заданной параметрически, находят по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Производные высших порядков

- Производная **f´(x)** сама является функцией аргумента х, для нее можно найти производную **(f´(x))´ - производная второго порядка.**
- Обозначение: **f´´(x)** или **f⁽²⁾(x)** или **f^II(x)** или $\frac{d^2 f}{dx^2}$
- Производная второй производной есть производная третьего порядка и т.д.
- **Производной n-го порядка** называется производная от производной (n-1)-го порядка