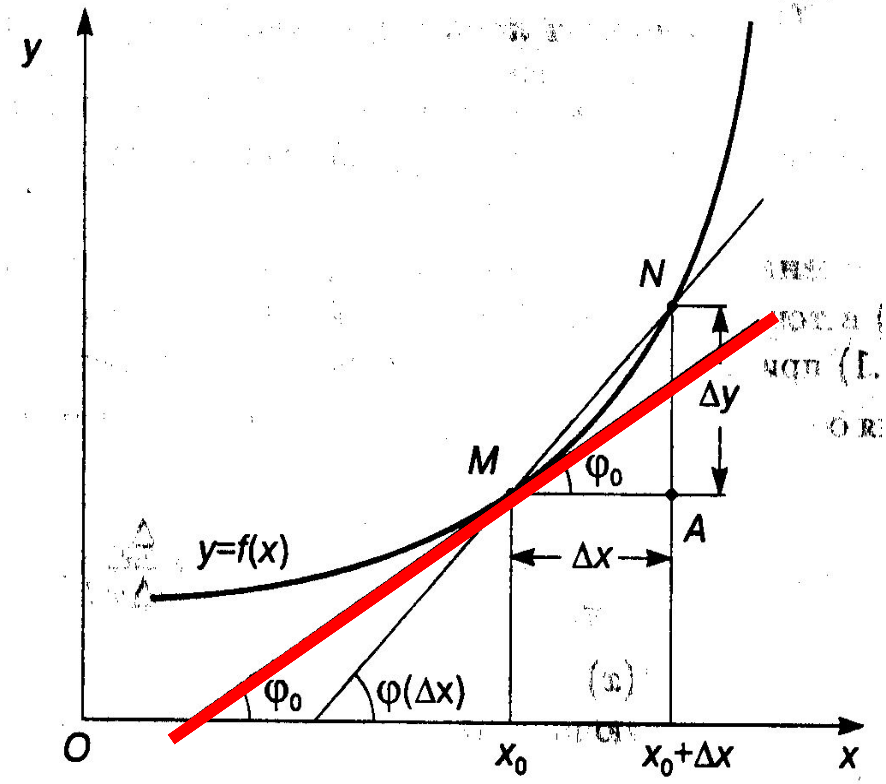
Приложения производной

Геометрический смысл производной

- Значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной, проведенной в данной точке к графику этой функции:

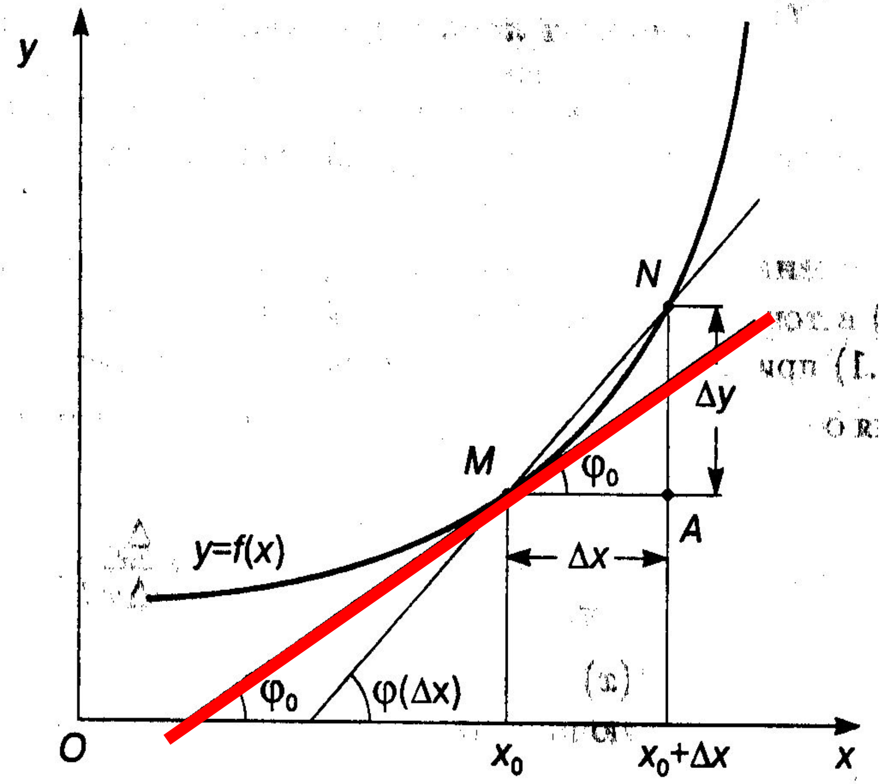
$$f'(x_0) = k_{касат} = tg\varphi_0$$



Уравнение касательной

- Уравнение касательной к графику функции f(x) в точке M (x_0,y_0) имеет вид

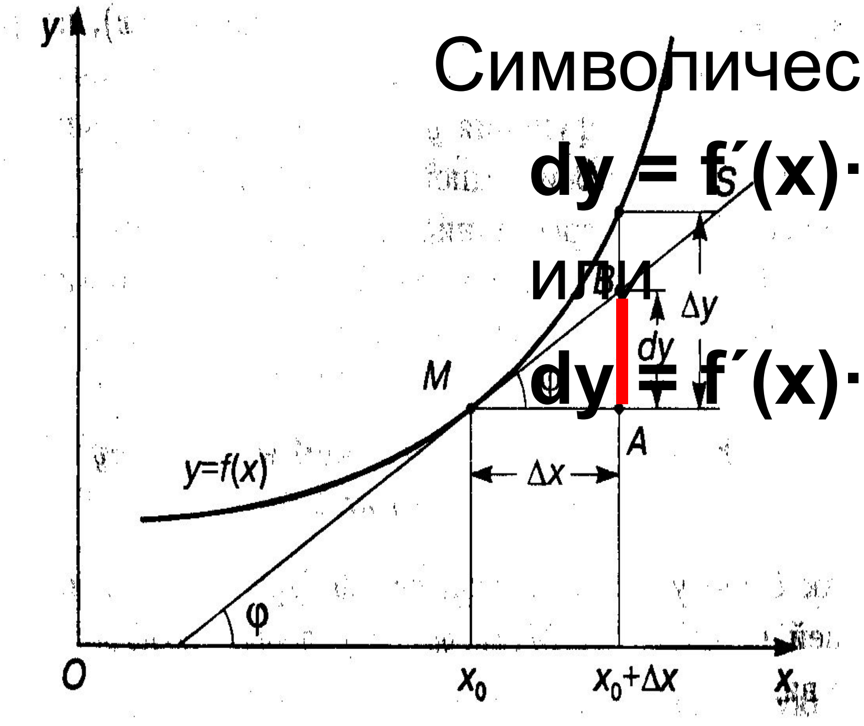
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$



Дифференциал функции

- **Дифференциалом функции y = f(x) в точке x_0** называется линейная часть приращения дифференцируемой функции в этой точке.

Обозначение: **dy**



Символически:

$dy = f'(x)\cdot\Delta x$

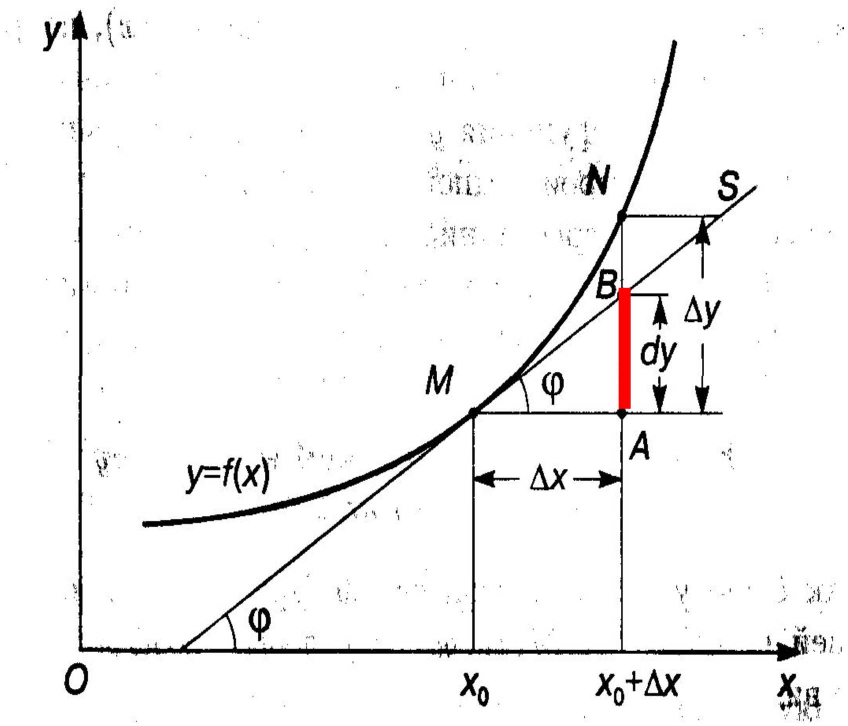
или

$dy = f'(x)\cdot dx$

Приближенные вычисления

- Формула для приближенных вычислений с помощью дифференциала (производной) имеет вид

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$



Правило Лопиталя

- Пусть функции f(x) и g(x) определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки а за исключением, быть может, самой точки а. Кроме того, пусть $\lim_{x \to a} f(x) =$, $\lim_{x \to a} g(x) =$ причем g'(x) ≠ 0 в указанной окрестности точки а. Тогда если существует предел отношения (конечный или бесконечный)

  $$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

  то существует и предел , $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

  причем справедлива формула

  $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- Правило Лопиталя можно применять неоднократно

Ряд Тейлора

- Функцию f(x), имеющую (n+1) производных в точке $x = x_0$, можно разложить в степенной ряд по формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n$$

Ряд Маклорена

- Функцию f(x), имеющую (n+1) производных в точке x = 0, можно представить по формуле Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Разложения функций

- Разложения трансцендентных функций по формуле Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Схема исследования функции

1. Область определения
2. Четность-нечетность
3. Пересечение с осями координат
4. Непрерывность, асимптоты графика
5. Промежутки монотонности и экстремумы (с помощью y')
6. Промежутки выпуклости графика и точки перегиба (с помощью y'')
7. График по результатам исследования

Асимптоты графика

- Вертикальные ($x = a$): среди точек разрыва второго рода из условия

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

- Наклонные ($y = \kappa x + b$)

и горизонтальные ($y = b$):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx].$$