

Лекция №3

Теорема 1. Всякая квадратная матрица A размерности n разлагается в произведение одной диагональной матрицы и нескольких трансвекций.

Док-во: только схематично индукцией по n .

Идею доказательства рассмотрим на примере матрицы размерности 2.



Теорема 2. Для любой квадратной матрицы A равносильны следующие утверждения:

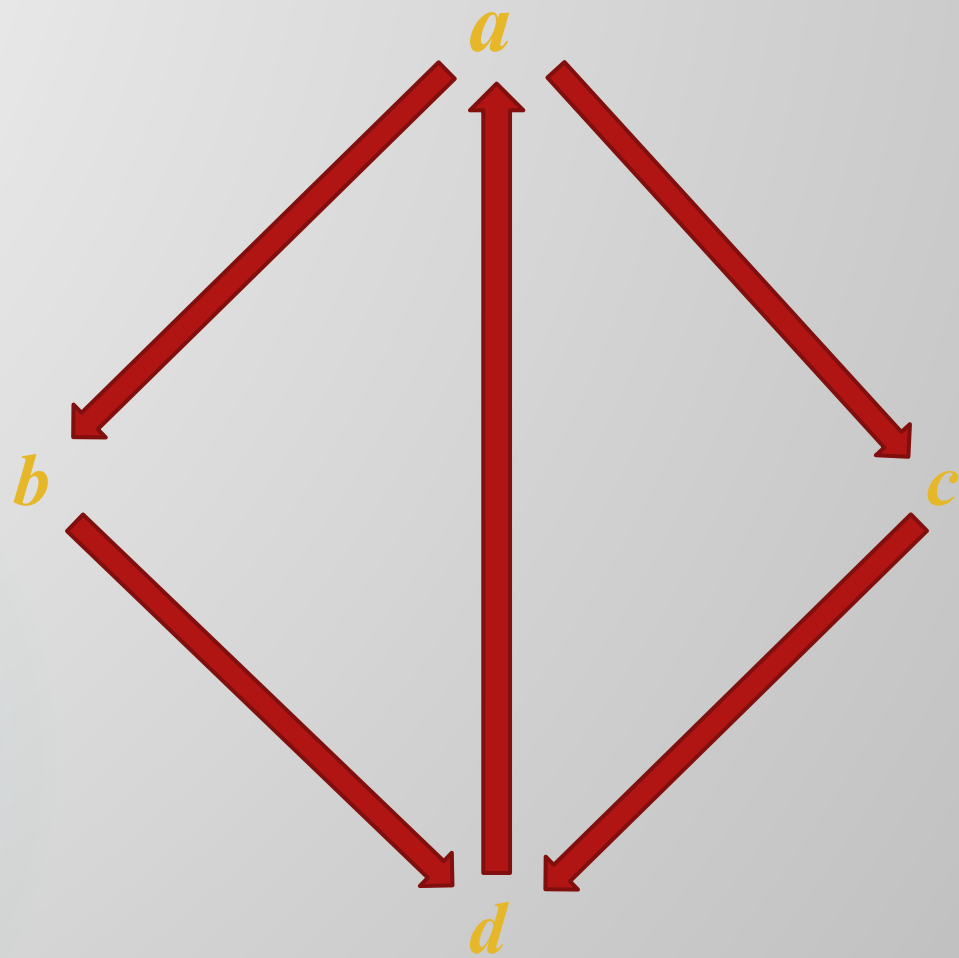
a) $\exists X$ – матрица такая, что $X \cdot A = A \cdot X = E$;

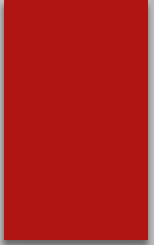
b) $\exists Y$ – матрица такая, что $Y \cdot A = E$;

c) $\exists Z$ – матрица такая, что $A \cdot Z = E$;

d) $\det A \neq 0$.

Док-во:





Теорема 3: Для любых квадратных матриц A и B размерности n

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B .$$

Док-во: 1 случай: $|A| = 0$ или $|B| = 0$

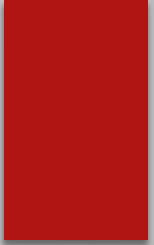
2 случай: $|A| \neq 0$ и $|B| \neq 0$

Системы линейных уравнений

Определение: Система m линейных уравнений с n неизвестными в общем виде имеет следующий вид:

[illegible]

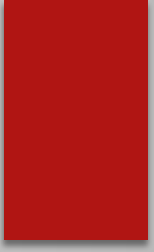
где $x_1, x_2, \dots, x_n$ - неизвестные, подлежащие определению, $a_{11}, \dots, a_{mn}$ - коэффициенты системы, $b_1, b_2, \dots, b_m$ - свободные члены.



Если все свободные члены $b_1, b_2, \dots, b_m$ - равны нулю, то система называется однородной.

Система (1) называется квадратной, если число уравнений m равно числу неизвестных, т.е. $m = n$.

Определение: Решением системы (1) называется такая совокупность n чисел $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, которая при подстановке в систему (1) на место неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ обращает все уравнения этой системы в верные числовые тождества.



Определение: Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение , и несовместной, если у нее не существует ни одного решения.

Пример: Система уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases} \text{ является несовместной.}$$

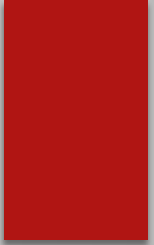
Систему уравнений удобно записывать в матричном виде.

Пусть: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных. $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ - столбец свободных членов.

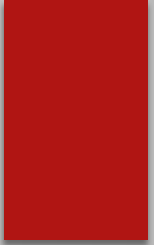
Тогда систему (1) можно записать в матричном виде:

$$A \cdot X = B \quad (2)$$



Определение: Система линейных уравнений (1) называется невырожденной, если $m = n$ и $\det A \neq 0$, где $A = (a_{ij})$.

Теорема 1: Всякая невырожденная система линейных уравнений имеет единственное решение $(c_1, \dots, c_n)$ вида $c_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ - определитель матрицы A — коэффициентов системы, а Δ_i - определитель матрицы, которая получается из матрицы A заменой ее i -го столбца на столбец свободных членов.



▶ **Лемма.** Для любой квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ размерности n .

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{jk} = 0, \text{ если } i \neq j.$$