Лекция №4

Теорема 1. (формулы Крамера) Всякая невырожденная система линейных уравнений имеет единственное решение ($c_1, \dots, c_n$) вида $c_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ - определитель матрицы A – коэффициентов системы, а Δ_i - определитель матрицы, которая получается из матрицы A заменой ее i-го столбца на столбец свободных членов.

Лемма. *Для любой квадратной матрицы* $A = (a_{ij})$ размерности n выполняется равенство:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = 0 \text{, если } i \neq j.$$

Пример 1. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть $A = (a_{ij})$ квадратная матрица порядка n и $|A| \neq 0$. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения к элементу a_{ij} матрицы A.

Пример 2. Решить систему линейных уравнений примера 1 в матричном виде:

$$A \cdot X = B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Пример 3. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, если $|A| \neq 0$.

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений

- Пусть система имеет вид:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix} \qquad (1)$$

<u>Опр.</u> Расширенной матрицей системы (1) называется матрица размерности n на n+1 вида:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Опр. Элементарными преобразованиями расширенной матрицы будем называть следующие:

- перестановка двух строк матрицы;
- умножение строки матрицы на любое число и прибавление к другой строке;
- перестановка двух столбцов матрицы (без участия последнего столбца).

Утверждение. При элементарных преобразованиях расширенной матрицы системы линейных уравнений множество решений системы не меняется.

- Метод Гаусса состоит в том, чтобы с помощью элементарных преобразований расширенной матрицы получить в результате вычислений матрицу вида:

$$C = \left(\begin{array}{cccc|c} l_{11} & \dots\dots & & * & * \\ & \dots\dots\dots\dots & & & \\ 0 & & \dots\dots & l_{rr} & * \\ \hline & & 0 & & * \end{array}\right)$$

Матрицей С задается система линейных уравнений, эквивалентная исходной, т.е. с тем же множеством решений. При этом для новой системы решения легко вычисляются и описываются.

Пример: Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2 \end{cases}$$