ЛЕКЦИЯ 3. НАГРЕВ МАТЕРИАЛОВ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НАГРЕВАНИЯ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Лазерный нагрев по своей физической сущности не отличается от других видов нагрева.

Однозначной характеристикой теплового действия является температура, а сам нагрев состоит в увеличении амплитуды тепловых колебаний решетки

Перенос тепла в твердом теле осуществляется механизмами теплопроводности.

Для металлов и сильно вырожденных полупроводников основным является электронная теплопроводность, а для неметаллов – решеточная.

Особенности лазерного нагрева:

1. Высокие градиенты температуры $\frac{\partial T}{\partial x} \approx 10^{9}\ \mathrm{K}/\textit{м}$

2. Высокие скорости нагрева и охлаждения $\frac{\partial T}{\partial t} \approx 10^{13}\ K/c$

Высокие скорости нагревания и охлаждения и большие пространственные градиенты температуры обуславливают особенности лазерного нагрева и могут привести и приводят к значительным отличиям в протекании тепловых процессов, стимулированных лазерным воздействием.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НАГРЕВАНИЯ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Результат теплового действия лазерного излучения будет определяться следующими группами параметров:

1. Параметры нагревающего излучения

   Плотность мощности q
   Длительность импульса τ
   Форма и размер зоны облучения (радиус пучка в зоне обработки r_0)
   ….

2. Оптические характеристики материала

   Поглощательная способность A
   Коэффициент поглощения α

3. Теплофизические характеристики материала

   Удельная теплоемкость c
   Коэффициент теплопроводности k

ОСНОВНЫЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

1. Удельная теплоемкость – показывает количество теплоты, которое необходимо сообщить единице объема (массы) материала, чтобы нагреть его на один градус.

$c_V = \dfrac{dQ}{dVdT}$ - теплоемкость единицы объема [Дж/(м^3·K)].

$$c_V = c_m \rho$$

$c_m = \dfrac{\Delta Q}{m\Delta T}$ - теплоемкость единицы массы [Дж/(кг·K)]. (ρ - плотность)

В дальнейшем $c = c_{V.}$

2. Тепловой поток – количество тепла проходящее в единицу времени через изотермическую поверхность и отнесенное к единице площади изотермической поверхности.

$\boldsymbol{j}_Q = \boldsymbol{n}\dfrac{dQ}{dtdS}$ **n** – единичная нормаль к изотермической поверхности, направленная в сторону уменьшения температуры.

Необходимым условием наличия теплового потока является наличие температурного градиента. Опыт показывает, что передача тепла теплопроводностью происходит по нормали к изотермической поверхности от мест с большей температурой к местам с меньшей температурой.

ОСНОВНЫЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

3. Коэффициент теплопроводности

Закон Фурье: величина теплового потока в некоторой точке прямо пропорциональна градиенту температур в этой точке.
Коэффициент пропорциональности называется коэффициентом теплопроводности.

$\boldsymbol{j}_Q = -k\ gradT$ $\quad$ k – коэффициент теплопроводности [Вт/(м·К)]

4. Коэффициент температуропроводности

$a = \dfrac{k}{c}$ $\quad$ - коэффициент температуропроводности [м^2/с]

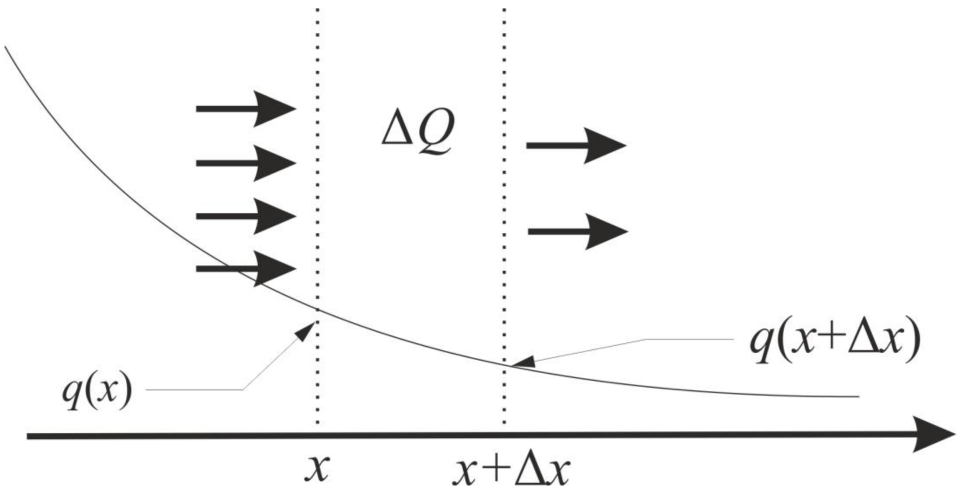
В отличие от теплопроводности k , которая характеризует способность материала проводить тепло, температуропроводность a характеризует распространение по веществу волны температуры.

5. Плотность мощности объемных источников тепла (объемная плотность мощности тепловых источников) – энергия, выделяемая в виде тепла за единицу времени в единице объема среды.

$q_v = \dfrac{dQ}{dtdV}$ $\quad$ - плотность мощности объемных источников тепла [Вт/м^3]

СВЯЗЬ q_v С ЗАКОНОМ ПОГЛОЩЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В МАТЕРИАЛЕ

$q(x)$ – закон убывания плотности мощности в материале. q_v - ?



Энергия ΔQ выделившаяся в слое между плоскостями x и $x+\Delta x$ за время Δt равна:

$$\Delta Q = q(x)S\Delta t - q(x+\Delta x)S\Delta t$$

$$q_v = \left.\frac{\Delta Q}{S\Delta t\Delta x}\right|_{\Delta x\to 0} = -\frac{\partial q(x)}{\partial x}$$

$$q_v = -\frac{\partial q(x)}{\partial x}$$

- объемная плотность мощности тепловых источников, обусловленная поглощением излучения по закону $q(x)$ равна производной $q(x)$ по x взятой с обратным знаком.

Обычно справедлив закон Бугера: $q(x) = Aq_0 \exp(-\alpha x)$

$$q_v(x) = A\alpha q_0 \exp(-\alpha x)$$

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассуждая аналогичным образом можно показать, что количество теплоты сообщенное единице объема среды в единицу времени равно:

$$\frac{dQ}{dVdt} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} + q_v$$

С другой стороны: $$\frac{dQ}{dVdt} = c\frac{dT}{dt}$$

По закону Фурье: $$j_Q = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

Окончательно получим **уравнение теплопроводности**:

$$c\frac{\partial T}{\partial t} - k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = q_v \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q_v}{c}$$

Обобщение на трехмерный случай с непостоянными коэффициентами:

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = div\left(kgradT\right) + q_v$$

Здесь $T = T(\mathbf{r}, t)$, коэффициенты c, k и объемный источник q_v могут быть функциями координат, времени и температуры.

НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Для того чтобы получить однозначное решение уравнения теплопроводности необходимо задать **начальные и граничные условия.**

Начальное условие для уравнения теплопроводности обычно состоит в задании температуры в начальный момент времени во всех точках облучаемого лазерным излучением образца.

$T(x,0)=T_0(x)$ (обычно T_0 постоянна по объему и равна комнатной температуре)

Если процесс реагирует только на перепад температуры, то можно принять $T_0 = 0$.

Если процесс «ощущает» абсолютную температуру, то нельзя считать $T_0 = 0$.

Граничные условия определяют условия теплового взаимодействия тела с окружающей средой, могут быть заданы в различной форме в зависимости от характера теплообмена с окружающей средой.

Выделяют 3 типа граничных условий:

1. граничные условия 1-го рода
2. граничные условия 2-го рода
3. граничные условия 3-го рода

НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Граничные условия 1-го рода заключаются в задании распределения температуры на поверхности тела во все моменты времени.

$T(0,t) = T_s(t)$ $T_s(t)$ - некоторая заданная функция (возможно, что $T_s(t) = const$)

Граничные условия 2-го рода задают значения плотности теплового потока для каждой точки поверхности тела:

$$-k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = q_S(t)$$

Для теплоизолированной поверхности $q_s = 0$

При лазерном воздействии для сильно поглощающих сред (большие α) источник можно считать не объемным а поверхностным, тогда $q_s = Aq_0$.

Вклад в q_s может быть отрицательным ($-q_l$) если есть тепловые потери, связанные радиационным или конвективным теплообменом.

При лазерных воздействиях как правило $Aq_0 >> q_l$

Если заданы температура окружающей среды $T_{ср}$ и закон теплообмена между окружающей средой и поверхностью обрабатываемого материала, то говорят, что в тепловой задаче заданы **граничные условия III рода**.

$$-k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \beta\left(T - T_{cp}\right)$$

β – коэффициент теплопередачи [Вт/(м^2·К)]

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1. **Метод интегральных преобразований (операционный метод).**

Операционный метод основан на преобразовании искомой функции $T(x, t)$ по одной из переменных, причем это преобразование (обычно используется преобразование Лапласа по времени) выбирается с таким расчетом, чтобы уравнение для новой (преобразованной) функции было значительно проще исходного. Находят решение преобразованного уравнения, а затем, применяя к нему обратное преобразование, определяют решение исходного уравнения.

2. **Метод источников (метод функций Грина)**

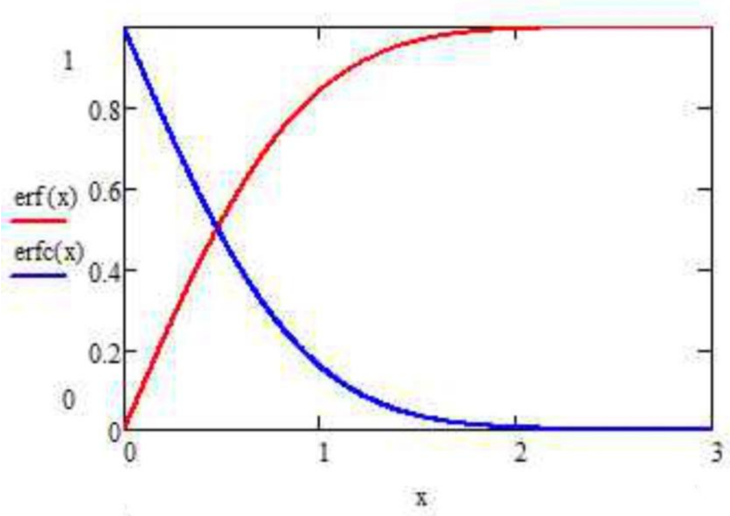
Идея метода состоит в том, что сначала находят специальное решение краевой задачи теплопроводности того же типа (так называемую функцию Грина) , но более простое. Через него определяют интегральное представление решения исходной задачи. Функция Грина описывает влияние мгновенного точечного теплового источника на температурное поле. Решение задачи для произвольного источника получается суммированием (интегрированием) вкладов от точечных источников.

3. **Численные методы решения**

ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

$$erf\left(z\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp\left(-t^2\right)dt$$ - интеграл вероятностей

$$erfc\left(z\right)=1-erf\left(z\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty \exp\left(-t^2\right)dt$$ - дополнительный интеграл вероятностей



$$erf(0)=0 \qquad erf(+\infty)=1$$

$$erfc(0)=1 \qquad erfc(+\infty)=0$$

$$\frac{d}{dz}erf\left(z\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-z^2\right)$$

$$\frac{d}{dz}erfc\left(z\right)=\frac{-2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-z^2\right)$$

Справедливо разложение: $erf\left(z\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n z^{2n+1}}{n!\left(2n+1\right)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{10}-...\right)$

При малых z можно ограничиться первым членом: $erf\left(z\right)\approx\frac{2z}{\sqrt{\pi}}$

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВЕРОЯТНОСТИ

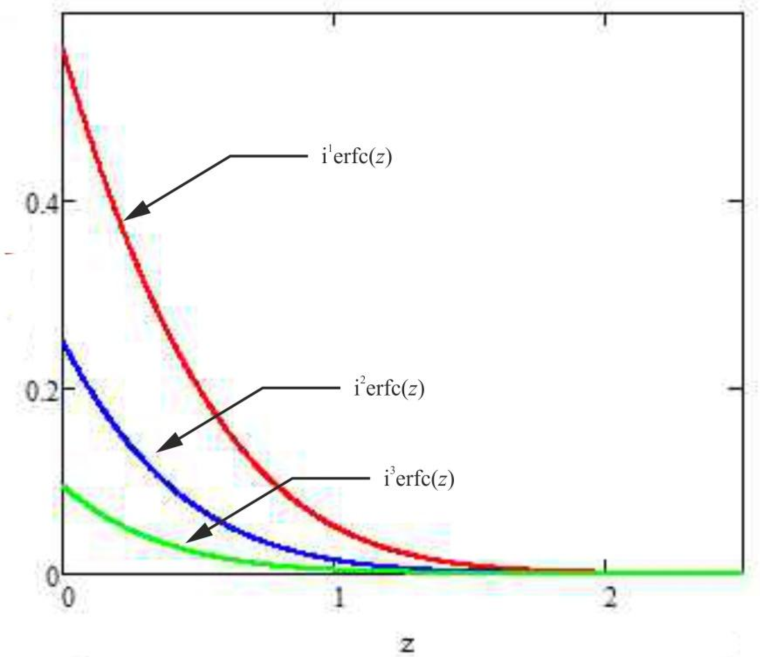
Кратными интегралами вероятности называются функции, определяемы выражениями:

$$i^1 erfc(z) = \int_z^\infty erfc(t)\,dt$$

$$i^2 erfc(z) = \int_z^\infty i^1 erfc(t)\,dt$$

....

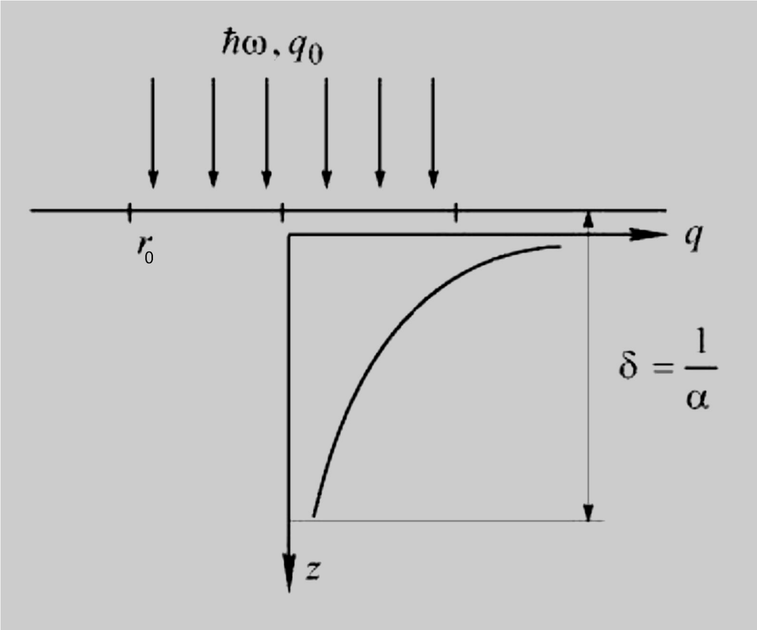
$$i^n erfc(z) = \int_z^\infty i^{n-1} erfc(t)\,dt$$



В дальнейшем нам понадобится только $i^1 erfc(z) = ierfc(z)$

Справедливо рекуррентное соотношение $ierfc(z) = \dfrac{\exp(-z^2)}{\sqrt{\pi}} - z\,erfc(z)$

НАГРЕВ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО СПАДАЮЩИМ С ГЛУБИНОЙ ТЕПЛОВЫМ ИСТОЧНИКОМ



$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Aq_0\alpha \exp(-\alpha x)}{c}$$

$$k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

$$T(x,0) = T_0$$

$$T(\infty,t) = T_0$$

Решение имеет вид:

$$T(x,t) = \frac{Aq_0}{2k\alpha}\left(4\alpha\sqrt{at}\, ierfc\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - 2e^{-\alpha x} + \right.$$

$$\left. + e^{\alpha^2 at}\left(e^{-\alpha x} erfc\left(\alpha\sqrt{at} - \frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + e^{\alpha x} erfc\left(\alpha\sqrt{at} + \frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right)\right) + T_0$$

НАГРЕВ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО СПАДАЮЩИМ С ГЛУБИНОЙ ТЕПЛОВЫМ ИСТОЧНИКОМ

На поверхности:

$$T(0,t) = \frac{Aq_0}{k\alpha}\left[\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\sqrt{at} + \exp\left(\alpha^2 at\right) erfc\left(\alpha\sqrt{at}\right) - 1\right] + T_0$$

Рассмотрим 2 предельных случая:

1. Теплопроводность ещё не работает (короткие длительности воздействия)

$$\sqrt{at} << \delta$$

$$\exp\left(\frac{at}{\delta^2}\right) \approx 1 + \frac{at}{\delta^2}$$

$$erfc\left(\frac{\sqrt{at}}{\delta}\right) = 1 - \frac{2\sqrt{at}}{\delta\sqrt{\pi}}$$

$$\Rightarrow$$

$$T(0,t) \approx \frac{Aq_0 t}{c\delta} + T_0$$ - адиабатический нагрев

Это решение может быть получено сразу из уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{Aq_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)}{c\delta}$$

$$T(x,t) = \frac{Aq_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) t}{c\delta} + T_0$$

НАГРЕВ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО СПАДАЮЩИМ С ГЛУБИНОЙ ТЕПЛОВЫМ ИСТОЧНИКОМ

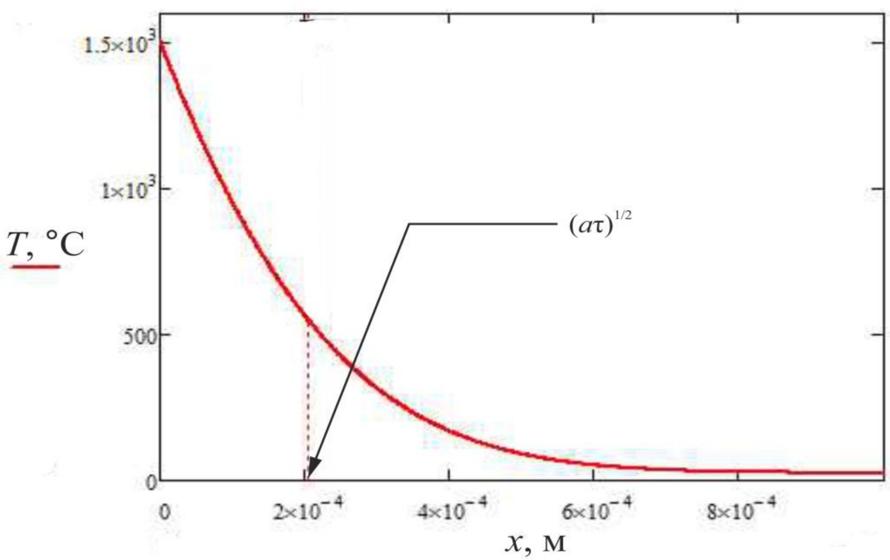
2. Теплопроводность уносит тепло вглубь $\delta << \sqrt{at}$

$$ierfc\left(\frac{\sqrt{at}}{\delta}\right) \approx \frac{\delta \exp\left(-\frac{at}{\delta^2}\right)}{\sqrt{at}\sqrt{\pi}}$$

На поверхности: $$T(0,t) = \frac{2Aq_0\sqrt{at}}{k\sqrt{\pi}} + T_0$$

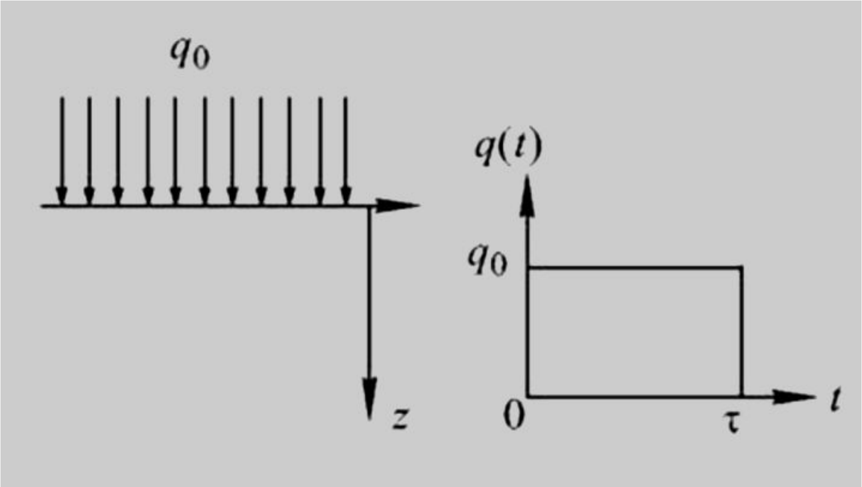
$$T(x,t) = \frac{2Aq_0\sqrt{at}}{k} ierfc\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + T_0$$

Распределение температуры по глубине в стали после воздействия импульса с $q_0 = 8\cdot10^4$ Вт/см^4 и длительностью $\tau = 2$ мс.



Характерный масштаб прогретый импульсом лазерного излучения длительностью τ для сильнопоглощающей среды l_T может быть оценен как $l_T \approx \sqrt{a\tau}$

НАГРЕВ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОВЕРХНОСТНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА



$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = Aq_0$$

$$T(0,x) = T(\infty,t) = T_0$$

Решение имеет вид:

$$T(x,t) = \frac{2Aq_0\sqrt{at}}{k}ierfc\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + T_0$$

На поверхности:

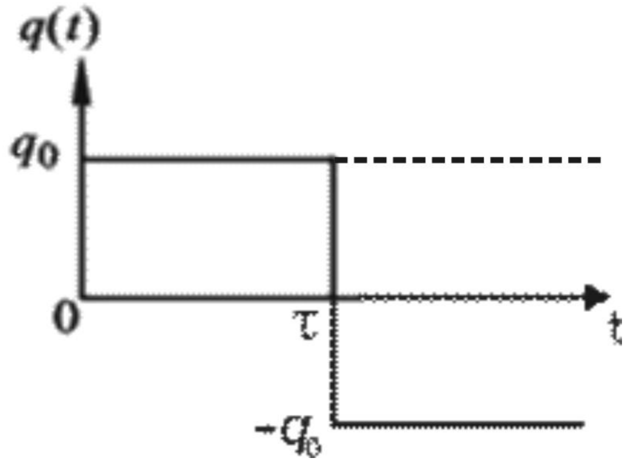
$$T(0,t) = \frac{2Aq_0\sqrt{at}}{k\sqrt{\pi}} + T_0$$

Решение то же, что и для экспоненциально спадающего источника при δ→0.

ОСТЫВАНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОСЛЕ НАГРЕВА ПОВЕРХНОСТНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Зная, как нагревается полупространство постоянным во времени излучением можно определить изменение температуры при остывании полупространства после окончания импульса излучения.

Воспользуемся следующим приемом: в момент окончания импульса включим отрицательный поток на поверхности равный по величине нагревающему потоку.



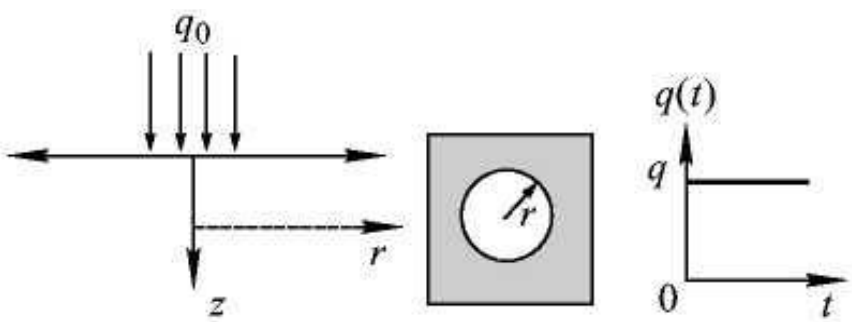
После окончания воздействия ($t > \tau$) распределение температуры будет определяться зависимостью:

$$T(x,t) = \left(T(0,\tau) - T_0\right)\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\left(\sqrt{t}\ ierfc\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \sqrt{t-\tau}\ ierfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-\tau)}}\right)\right) + T_0$$

Используя полученное выражение можно оценивать скорость охлаждения (важно для закалки).

На поверхности: $$\frac{\partial T(0,t)}{\partial t} = \frac{\left(T(0,\tau) - T_0\right)}{2\sqrt{\tau}}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\right)$$

НАГРЕВ МАТЕРИАЛА ПОСТОЯННЫМ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ, ЛУЧ СФОКУСИРОВАН В ПЯТНО КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ



$$q(r) = \begin{cases} Aq_0, & 0 \le r \le r_0 \\ 0, & r > r_0 \end{cases}$$

Решение имеет вид: $$T(z,0,t) = \frac{2Aq_0\sqrt{at}}{k}\left(ierfc\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - ierfc\left(\frac{\sqrt{r_0^2 + x^2}}{2\sqrt{at}}\right)\right) + T_0$$

При $\sqrt{at} << r_0$ $$T(0,0,t) \approx \frac{2Aq_0\sqrt{at}}{k\sqrt{\pi}} + T_0$$

При $\sqrt{at} >> r_0$ $$T(0,0,t) \approx \frac{Aq_0 r_0}{k} + T_0 \qquad T(z,0) = \frac{Aq_0}{k}\left(\sqrt{r_0^2 + x^2} - x\right) + T_0$$

При $\sqrt{at} >> r_0$ устанавливается стационарное распределение температуры.

РЕЖИМЫ ЛАЗЕРНОГО НАГРЕВА

1. Источник тепла поверхностный, одномерный теплоотвод. $\delta << \sqrt{at}$ $r_0 >> \sqrt{at}$

$$T = \frac{2Aq_0\sqrt{at}}{k\sqrt{\pi}} + T_0$$

$$q_* = \frac{\sqrt{\pi}}{2A}\frac{kT_*}{\sqrt{a\tau}}$$

- пороговая плотность мощности – минимальная плотность мощности, необходимая для нагрева поверхности до заданной температуры.

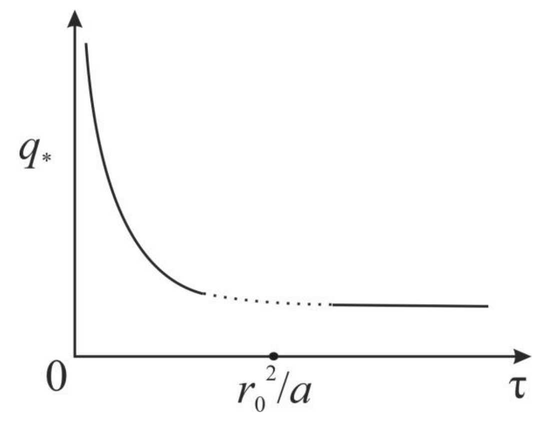
$$q_* \sim \frac{1}{\sqrt{\tau}} \qquad Q_* = q_*\tau \sim \sqrt{\tau}$$

2. Источник тепла поверхностный, трехмерный теплоотвод. $\delta << \sqrt{at}$ $r_0 << \sqrt{at}$

$$T = \frac{Aq_0 r_0}{k} + T_0$$

- стационарный режим

Зависимость пороговой плотности мощности от длительности воздействия →



РЕЖИМЫ ЛАЗЕРНОГО НАГРЕВА

3. Источник тепла объемный, теплоотвод пренебрежимо мал. $\delta >> \sqrt{at}$ $r_0 >> \sqrt{at}$

Температура поверхности $T = \frac{Aq_0\tau}{c\delta} + T_0$

4. Источник тепла объемный, трехмерный теплоотвод. $\delta >> \sqrt{at}$ $r_0 << \sqrt{at}$

Температура поверхности $T = \frac{Aq_0 r_0^2}{4k\delta} \ln\left(19.4\frac{a\tau}{r_0^2}\right) + T_0$

Для металлов характерно поверхностное поглощение, толщина прогретого слоя при этом определяется характерным размером теплопроводности $(at)^{1/2}$.

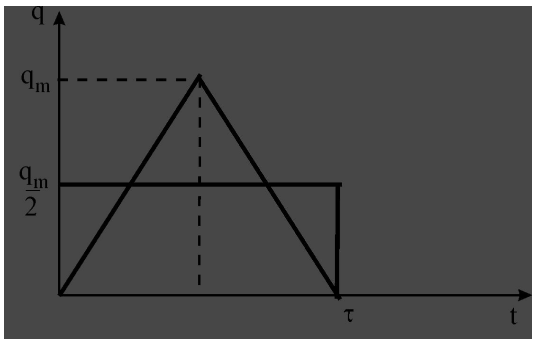
Режимы облучения, обеспечивающие объемное поглощение излучения, используют при необходимости создать в материале объемный источник тепла, или при фокусировке излучения внутри объема.

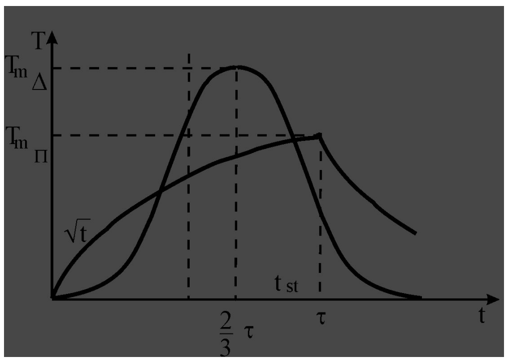
ВЛИЯНИЕ ВРЕМЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Если $q_0 = q_0(t)$, то температура поверхности при нагреве поверхностным источником в случает одномерного теплоотвода может быть найдена как:

$$T(0,t) = \frac{A\sqrt{a}}{k\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{q_0(u)du}{\sqrt{t-u}} + T_0$$

Сравним действие импульсов прямоугольной и треугольной формы.



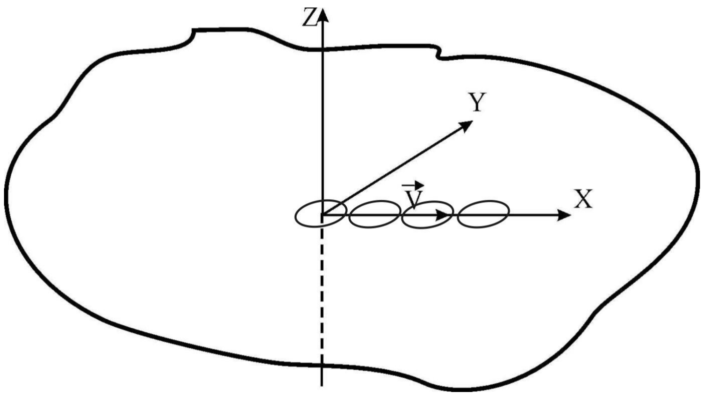


Полная энергия в импульсе, одинаковая, но максимальная температура – разная.

Для треугольного $T_{\max} = \frac{8}{3\sqrt{6\pi}} \frac{Aq_m\sqrt{a\tau}}{k} + T_0$ Для прямоугольного $T_{\max} = \frac{Aq_m\sqrt{a\tau}}{k\sqrt{\pi}} + T_0$

Переход от одной аппроксимации к другой (от прямоугольного импульса к треугольному) при сохранении энергетики приводит к незначительному (~10%) изменению T_{max}, и значительному (~1/3) изменению времени достижения этой температуры. Поэтому усложнять аппроксимацию нет смысла, важно сохранять энергию в импульсе.

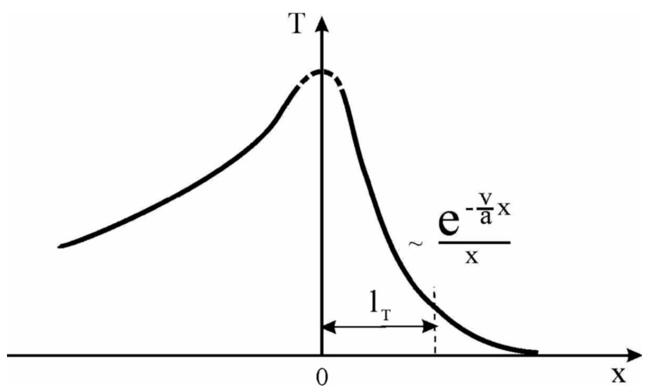
ОСОБЕННОСТИ НАГРЕВА МАТЕРИАЛА ДВИЖУЩИМСЯ СВЕТОВЫМ ПЯТНОМ



Распределение температуры по поверхности в движущейся системе координат имеет вид (на оси):

$$T(x) = \frac{AP}{2\pi kx}\exp\left(-\frac{vx}{2a}\right) + T_0$$

P – мощность, v – скорость сканирования



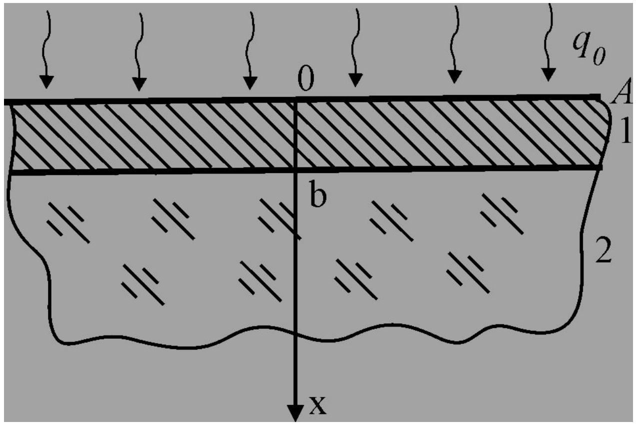
1. Быстродвижущийся источник – воздействие аналогично разогреву полупространства импульсом с длительностью $\tau = 2r_0/v$

$$T \approx \frac{2Aq_0\sqrt{a\tau}}{k\sqrt{\pi}} + T_0$$

2. Медленнодвижущийся источник – происходит стабилизация температуры, поэтому источник можно считать неподвижным.

$$T \approx \frac{Aq_0 r_0}{k} + T_0$$

ЛАЗЕРНЫЙ НАГРЕВ ТОНКИХ СЛОЕВ И ПЛЕНОК



$$\frac{\partial T_{1,2}}{\partial t} - a_{1,2}\frac{\partial^2 T_{1,2}}{\partial x^2} = \frac{f_{1,2}}{c_{1,2}}$$

$$T_1(x,0) = T_2(x,0) = 0 \qquad \left.\frac{\partial T_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad T_2(\infty,t) = 0$$

При $x = b$ $\quad T_1(b) = T_2(b)$ - равенство температур

$$k_1\left.\frac{\partial T_1}{\partial x}\right|_{x=b-0} = k_2\left.\frac{\partial T_2}{\partial x}\right|_{x=b+0}$$

- равенство потоков (идеальный тепловой контакт)

$$f_1 = \frac{q_0 A_1}{b} \qquad f_2 = \frac{q_0\left(1 - R_1 - A_1\right)}{\delta_2} e^{-\frac{x}{\delta_2}}$$

Пленка прогрета равномерно, для T_1 справедливо:

$$T_1(t) = \frac{A_1 q_0 b}{k_2}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{a_2 t}}{b} + \frac{c_1}{c_2}\left(\exp\left(\frac{c_2^2 a_2 t}{c_1^2 b^2}\right) erfc\left(\frac{c_1\sqrt{at}}{c_2 b}\right) - 1\right)\right) + T_0$$

Малые времена воздействия: $\quad c_1 b >> c_2\sqrt{a_2 t}$

$$T_1(t) = \frac{q_0 A_1 t}{c_1 b} + T_0$$

Большие времена воздействия:

$$T_1(t) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{A q_0\sqrt{a_2 t}}{k_2} + T_0$$

НАГРЕВ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПОГЛОЩАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТИ

Поглощательная способность металла зависит от температуры: $A = A_0 + \chi T$

$\chi \approx (1-5)\cdot 10^{-5}\ K^{-1}$ - может быть определен исходя из температурной зависимости сопротивления металла.

Постановка задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = q_0(A_0 + \chi T)$$

$$T(x,0) = T(\infty,t) = T_0,$$

$y << 1$ $$T(t) = T_0 + \frac{2q_0 A_0\sqrt{at}}{k\sqrt{\pi}}$$

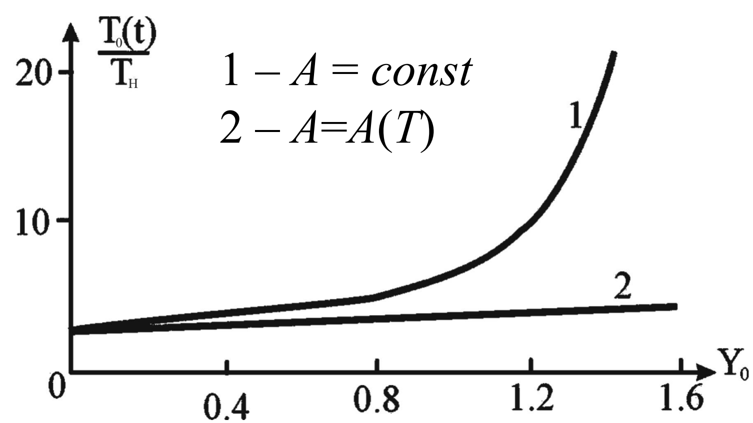
$y > 1$ $$T \approx T_0 + \frac{2A_0}{\chi}\exp(\mu t)$$

Решение имеет вид:

$$T(t) = T_0 + \frac{A_0}{b}\left[\exp(\mu t)erfc(-\sqrt{\mu t}) - 1\right]$$

$$\mu = \frac{q_0^2 b^2 a}{k^2}$$

Введем параметр $y = \dfrac{q_0 b\sqrt{at}}{k}$



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ