Лекция 2.
Графическая интерпретация ЗЛП

- Графический метод решения ЗЛП
- Свойства задач ЛП

1.3.Графический метод решения ЗЛП

Условия применения графического метода:

1) Если **n=2** – в задаче **две переменные** x1, x2.
2) Если ЗЛП можно **свести к 1) при наличии ограничений-равенств** – это общий случай.

Графический метод основан на геометрической интерпретации элементов ЗЛП.

- Построения ведутся в плоскости x_1Ox_2

  (x_1 это x, x_2 это y).

- Огр.-равенству соответствует прямая на плоскости.
- Огр.-неравенству (**n=2**) соответствует полуплоскость.

Ограничению-равенству (n=2) соответствует прямая на плоскости.

Как построить прямую?

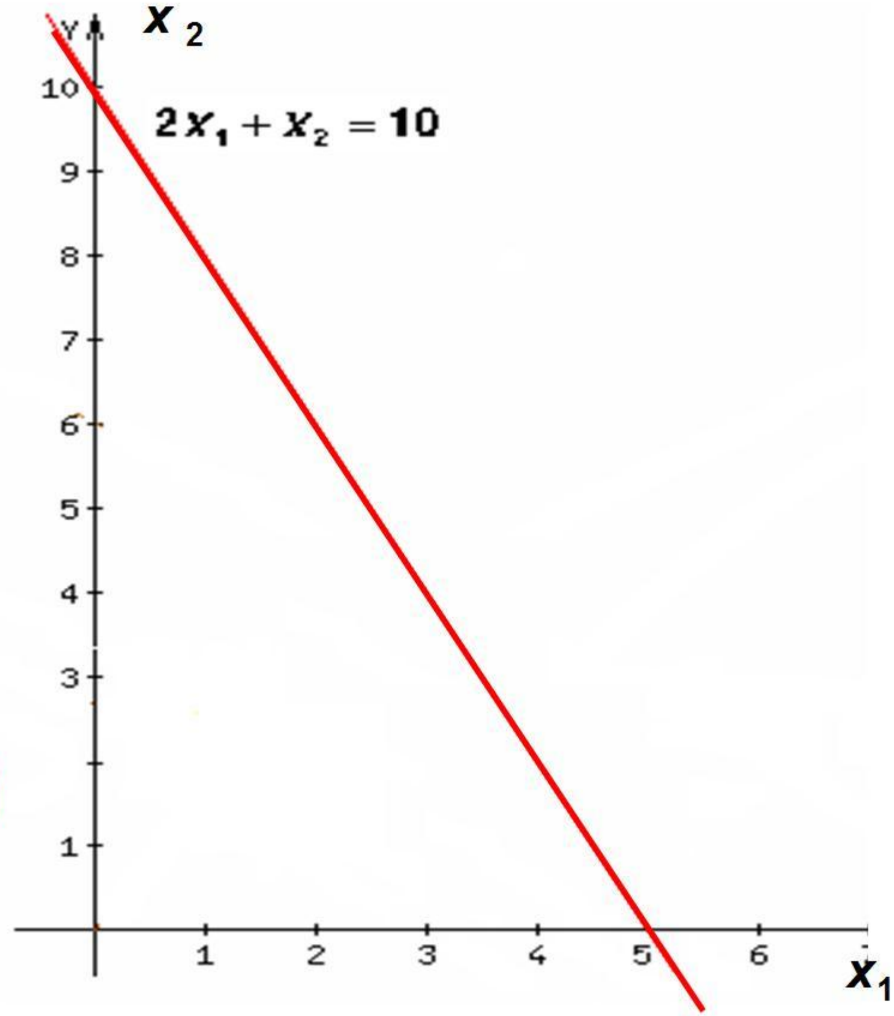
Пример:

$$\boxed{2x_1 + x_2 = 10}$$

Точки пересечения с осями коорд.:

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 10, \quad (0;10)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 5, \quad (5;0)$$

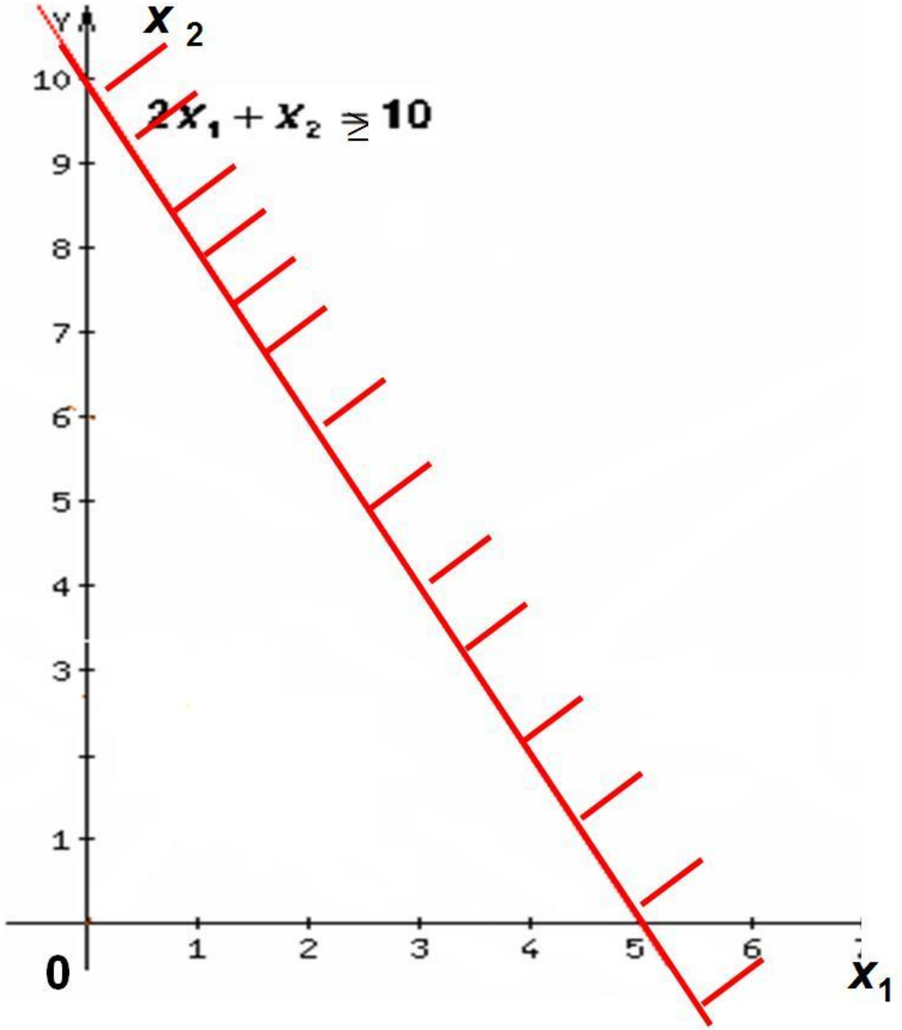


Огр.-неравенству (n=2) соответствует полуплоскость.

Как построить полуплоскость?

Пример: построим полуплоскость

$$\boxed{2x_1 + x_2 \geq 10}$$



1. **Находим точки пересечения с осями коорд. и строим граничную прямую.**
2. **Определяем, по какую сторону от прямой лежат точки, удовлетворяющие неравенству.**

Например, (0,0):

$$2 \cdot 0 + 0 = 0 \geq 10$$ - **не верно**

Зн., т. (0,0) не лежит в искомой полуплоскости, она с противоп. стороны.

Основные понятия

Опр. 1. ***Линией уровня функции*** *f(x)* **называют множество точек, удовлетворяющих уравнению:**

$\boxed{f(x) = \alpha}$ **, где** α **– некоторое действительное число.**

***Свойство линии уровня*: во всех точках *(x)*, лежащих на одной и той же линии уровня, функция имеет одно и тоже значение** α **.**

Линии уровня *линейной функции* являются *параллельными прямыми.* Для n=2:

$$c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha_1, \qquad c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha_2, \qquad \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Градиент функции в точке *x* показывает **направление макс. возрастания функции** (Рис. 1).

Градиент (*вектор нормали*) линейной ЦФ $f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2$ определяется коэф-ми при неизвестных в ЦФ: **$c=(c_1, c_2)$.**

Линии уровня линейной функции перпендикулярны градиенту в любой точке *x* (Рис. 2).

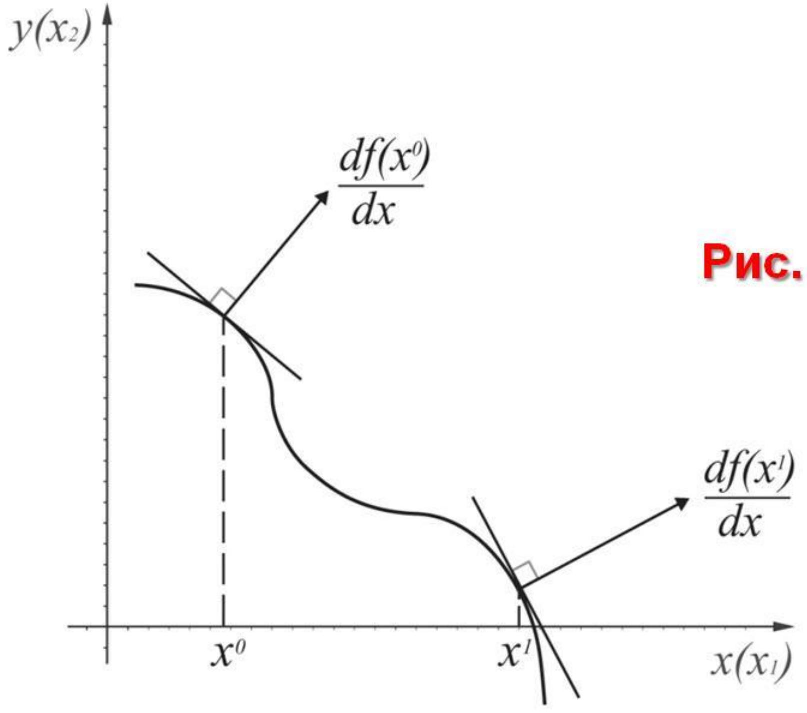


Рис. 1

Градиент нелинейной функции в точке

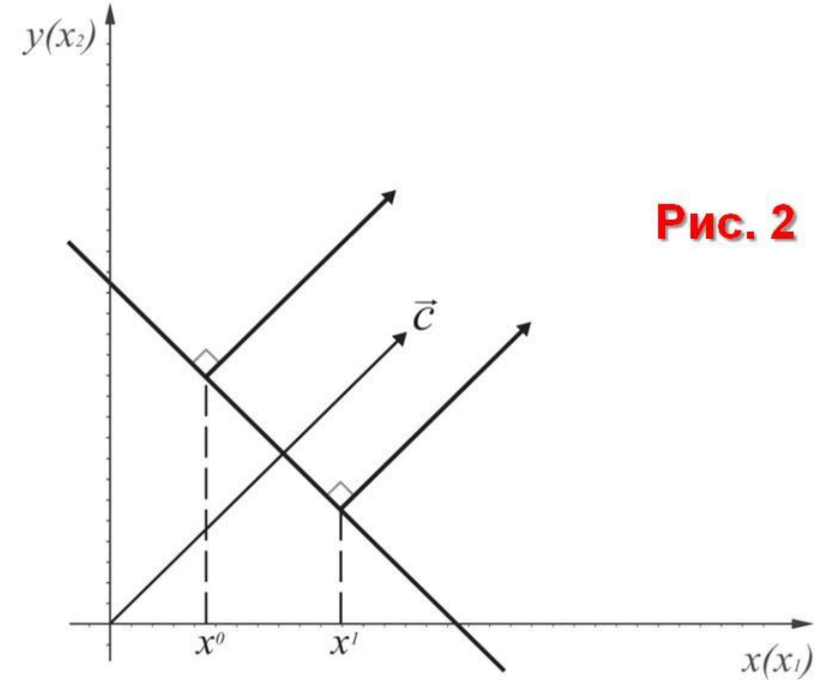


Рис. 2

Градиент линейной функции

Алгоритм графического метода

1. Построить по ограничениям задачи ***ОДР***.
2. Построить по коэффициентам ЦФ ***вектор нормали*** (**градиент**) целевой функции $\vec{c} = (c_1, c_2)$ - ***направление наискорейшего возрастания ЦФ***.
3. Провести произвольную ***линию уровня***, перпендикулярную вектору нормали.
4. **Решаем задачу** ***графически***. Для задачи на ***максимум*** перемещаем линию уровня в направлении вектора $\vec{c}$ до ***крайней*** точки множества планов (на ***минимум*** – в обратном направлении). Это и есть *точка экстремума x**.
5. **Определяем** ***координаты*** оптимального плана *x*=(x₁*,x₂*)* и экстремальное значение целевой функции *f(x*)*

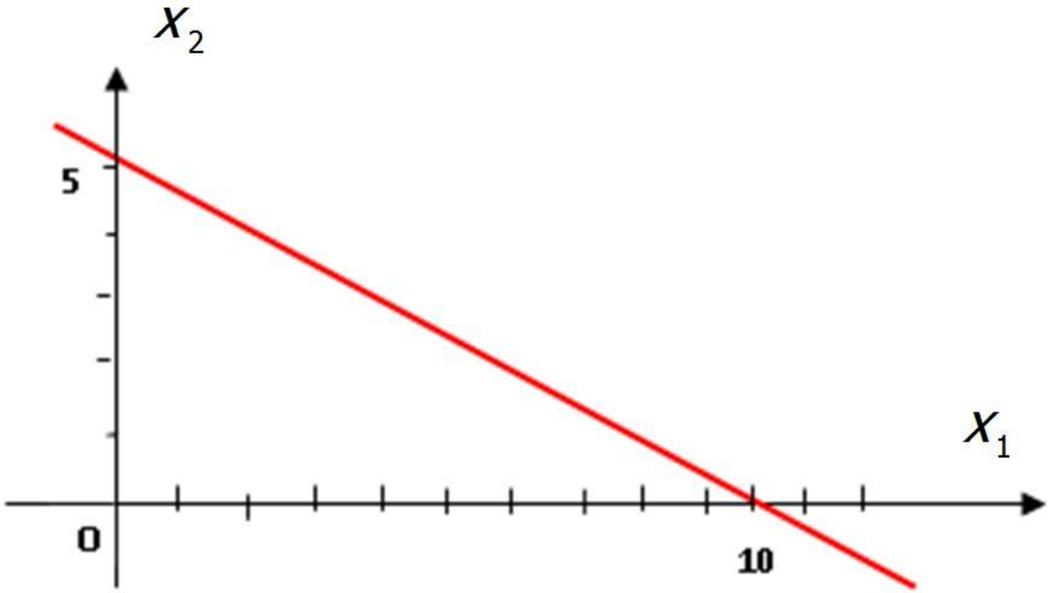
Пример 1. Решить графическим методом ЗЛП:

$$f(x) = x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} \boxed{x_1 + 2x_2 \le 10,} \\ x_1 + 4x_2 \le 12, \\ \quad x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1. Строим ОДР.

$$\boxed{x_1 + 2x_2 = 10}$$



$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 5,$ **(0;5),**

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 10,$ **(10;0).**

$$f(x) = x_1 + 6x_2 \to \max$$

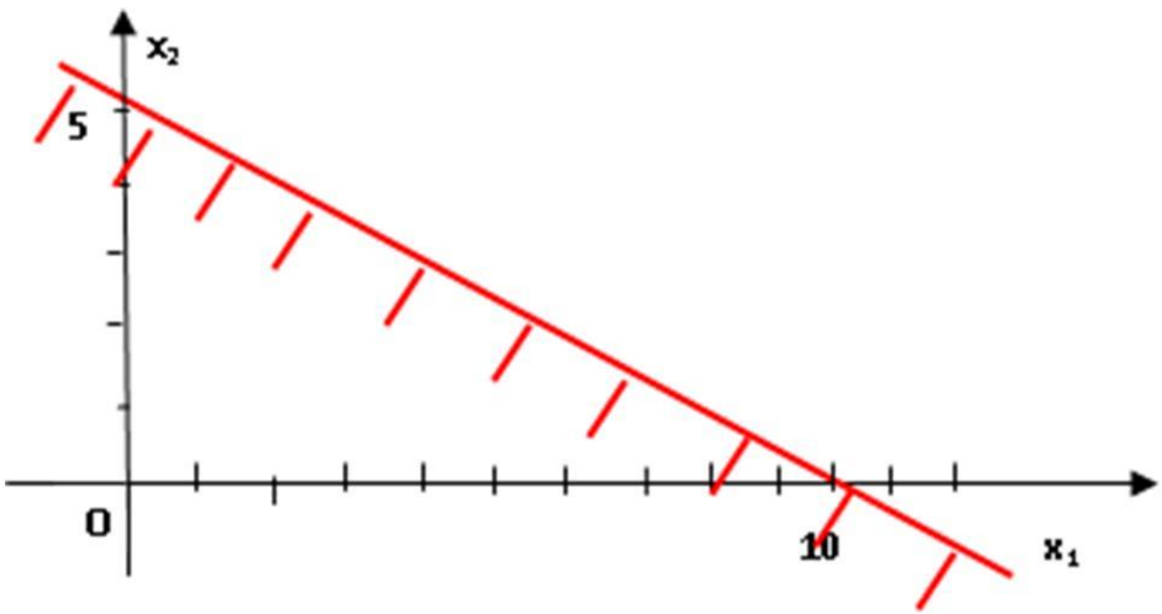
$$\begin{cases} \boxed{x_1 + 2x_2 \le 10,} \\ x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Находим полуплоскость, опр. неравенством:

Например, точка (0,0):

$0 + 2 \cdot 0 = 0 < 10$ **- верно**

Зн., имеем полуплоскость в сторону точки (0,0).



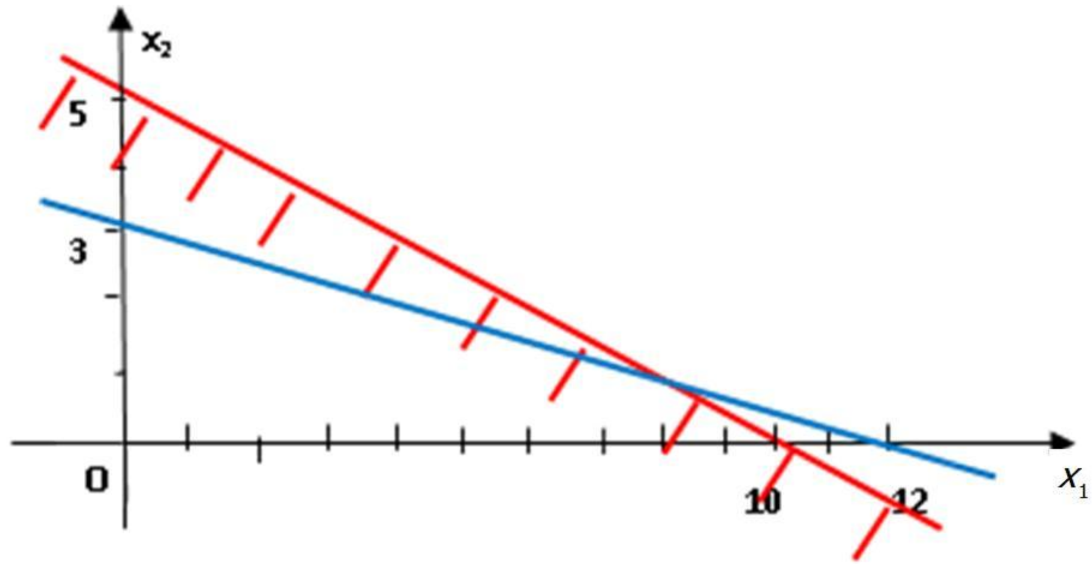
$$f(x) = x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ \boxed{x_1 + 4x_2 \le 12,} \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$\boxed{x_1 + 4x_2 = 12}$$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3,$ (0, 3),

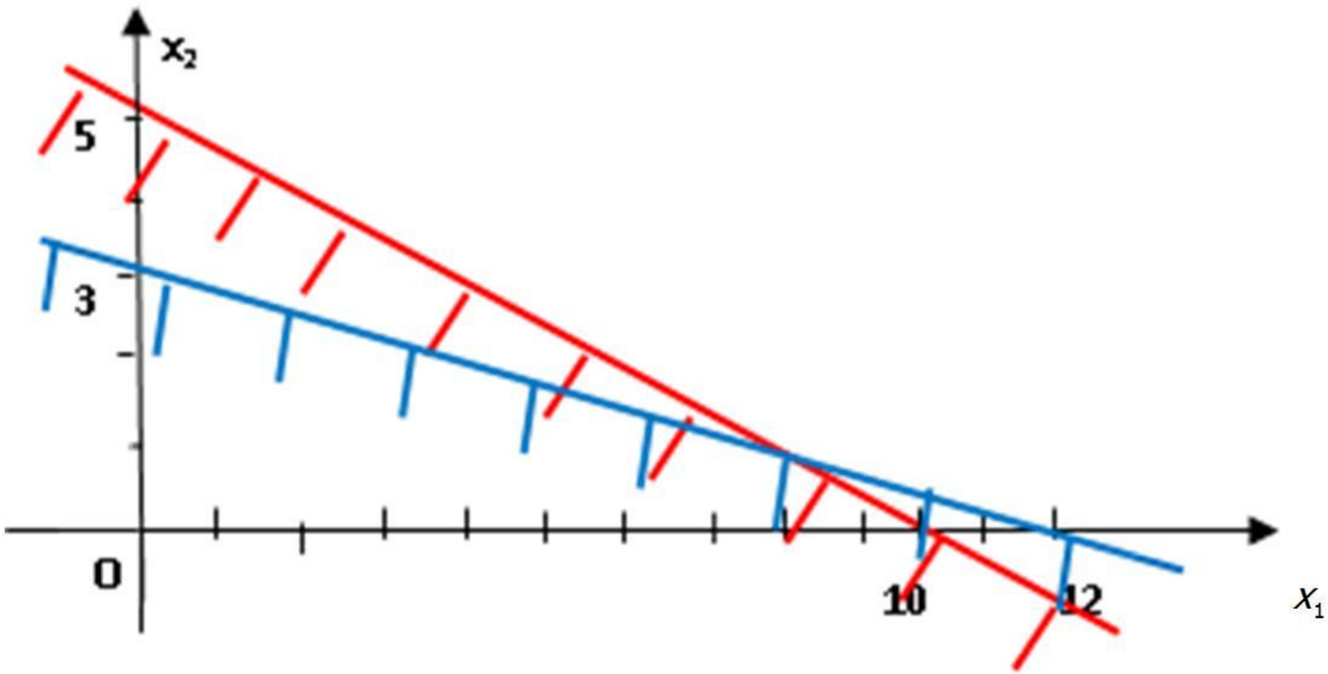
$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 12,$ (12, 0).



$$f(x) = x_1 + 6x_2 \to \max$$

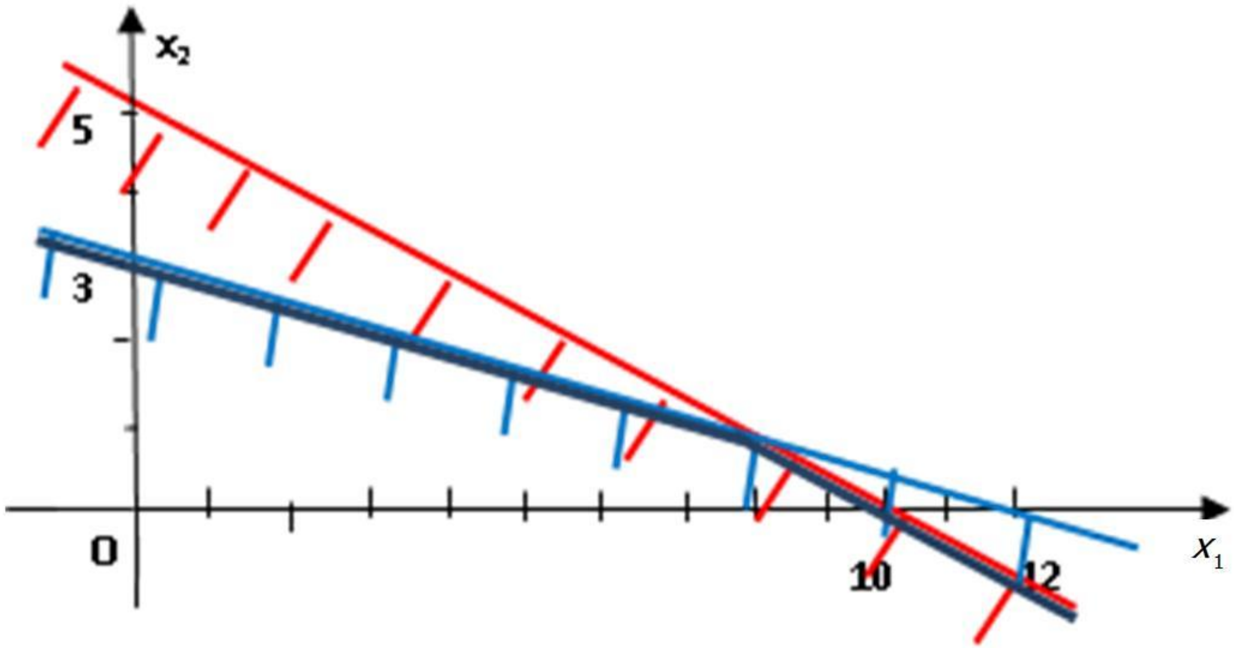
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ \boxed{x_1 + 4x_2 \le 12,} \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$(0,0)$: $0 + 4 \cdot 0 = 0 \le 12$ - верно.



$$f(x) = x_1 + 6x_2 \to \max$$

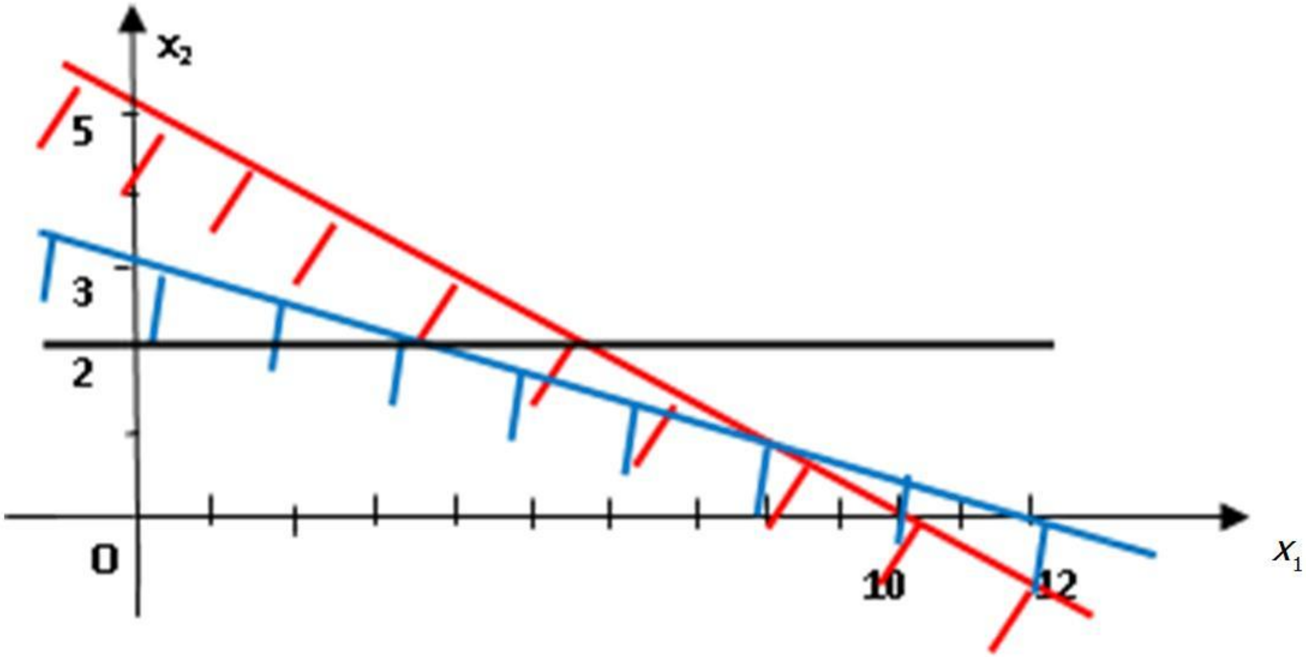
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$



$$\boxed{x_2 = 2}$$

$$f(x) = x_1 + 6x_2 \to \max$$

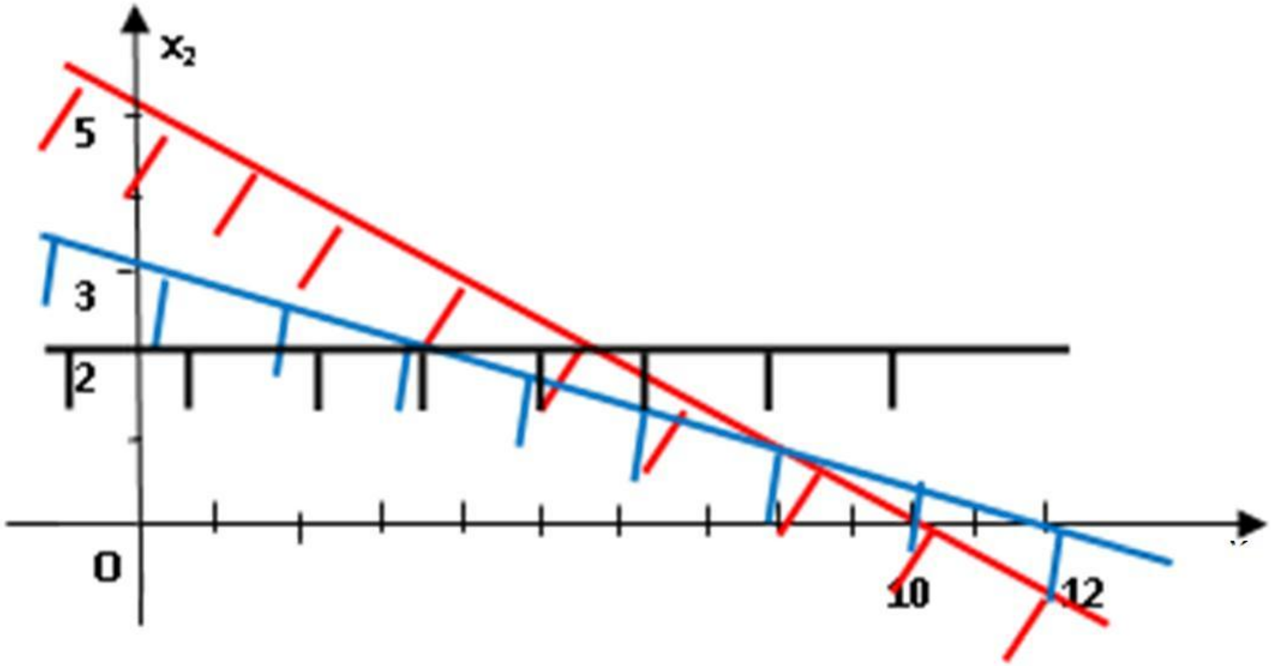
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \le 12, \\ \boxed{x_2 \le 2,} \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

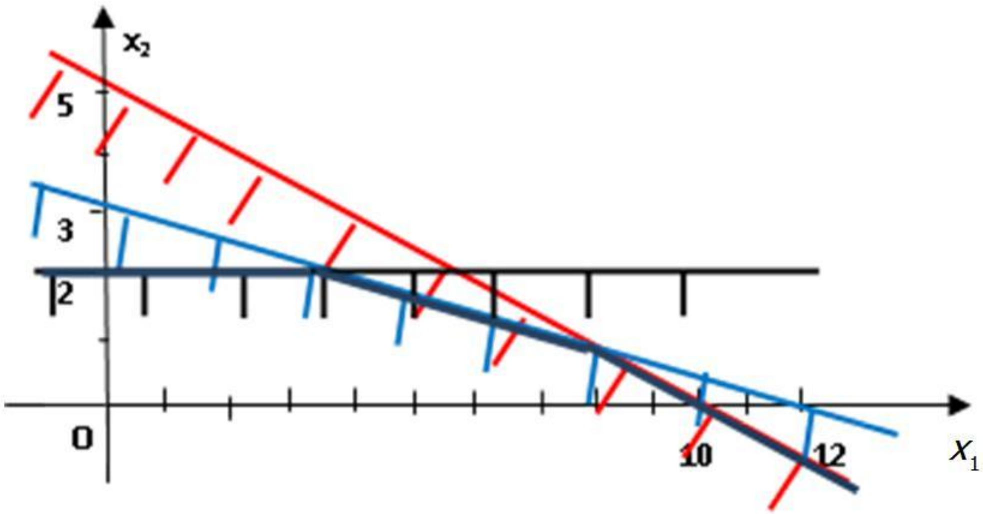


$$f(x) = x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \le 12, \\ \boxed{x_2 \le 2,} \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

(0,0) : $0 \le 2$ - верно.



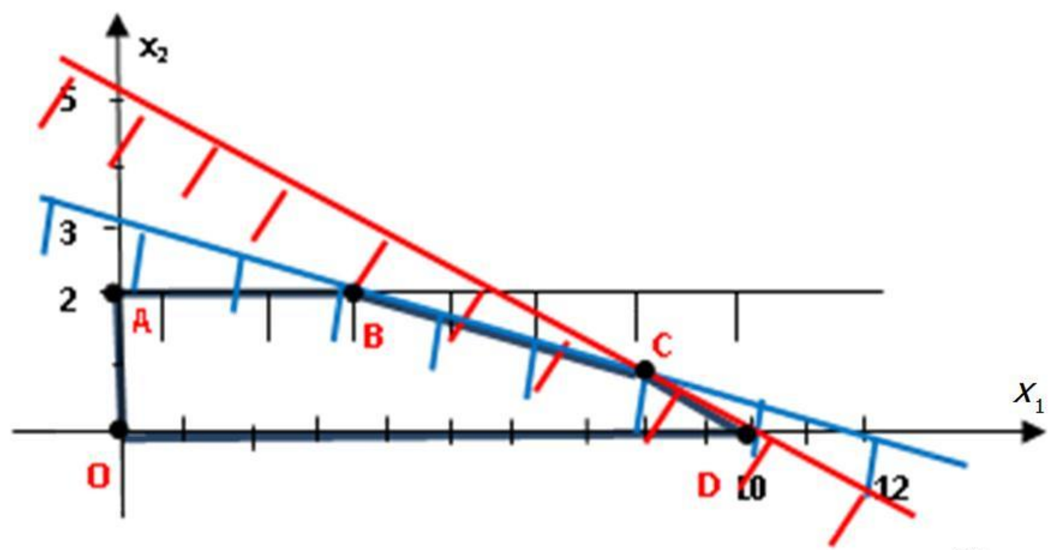


$$f(x) = x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ - 1 четверть:

OABCD – ОДР задачи

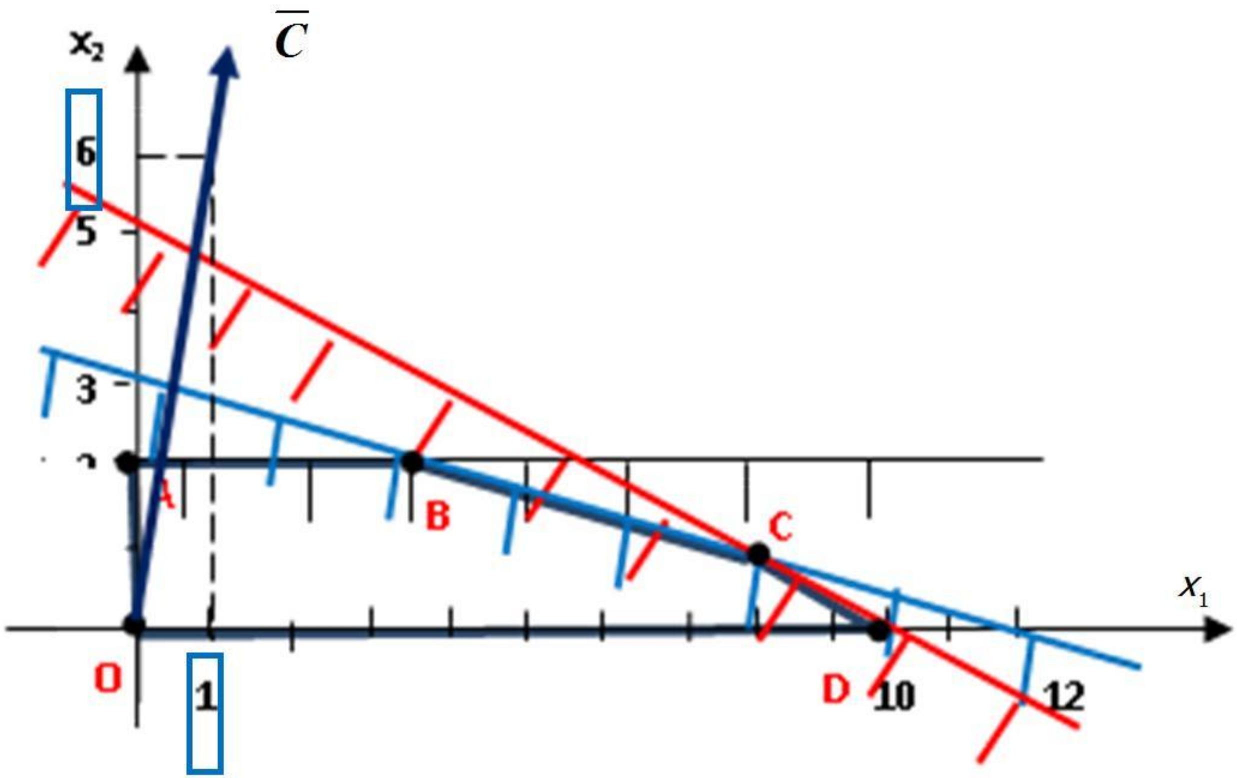


2. Строим градиент ЦФ (вектор нормали) : $c = \boxed{(1,6)}$.

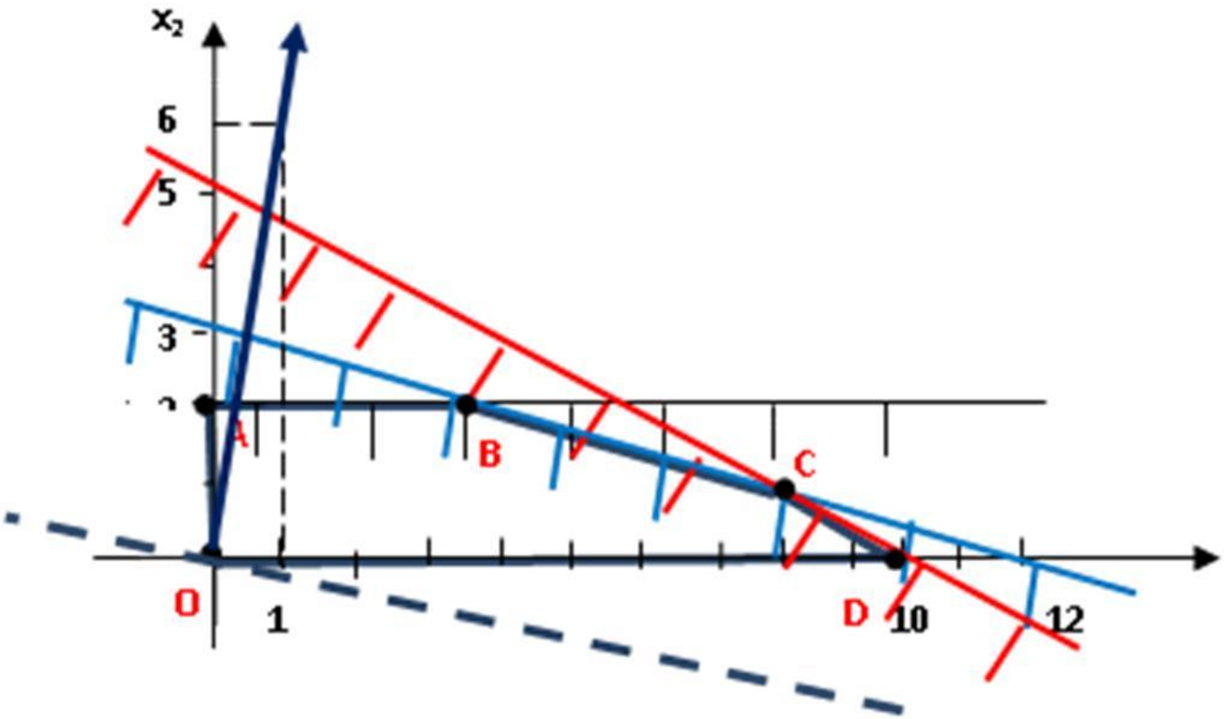
Он выходит из точки (0,0) и проходит через точку (1,6).

$$f(x) = \boxed{1} \cdot x_1 + \boxed{6} x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$



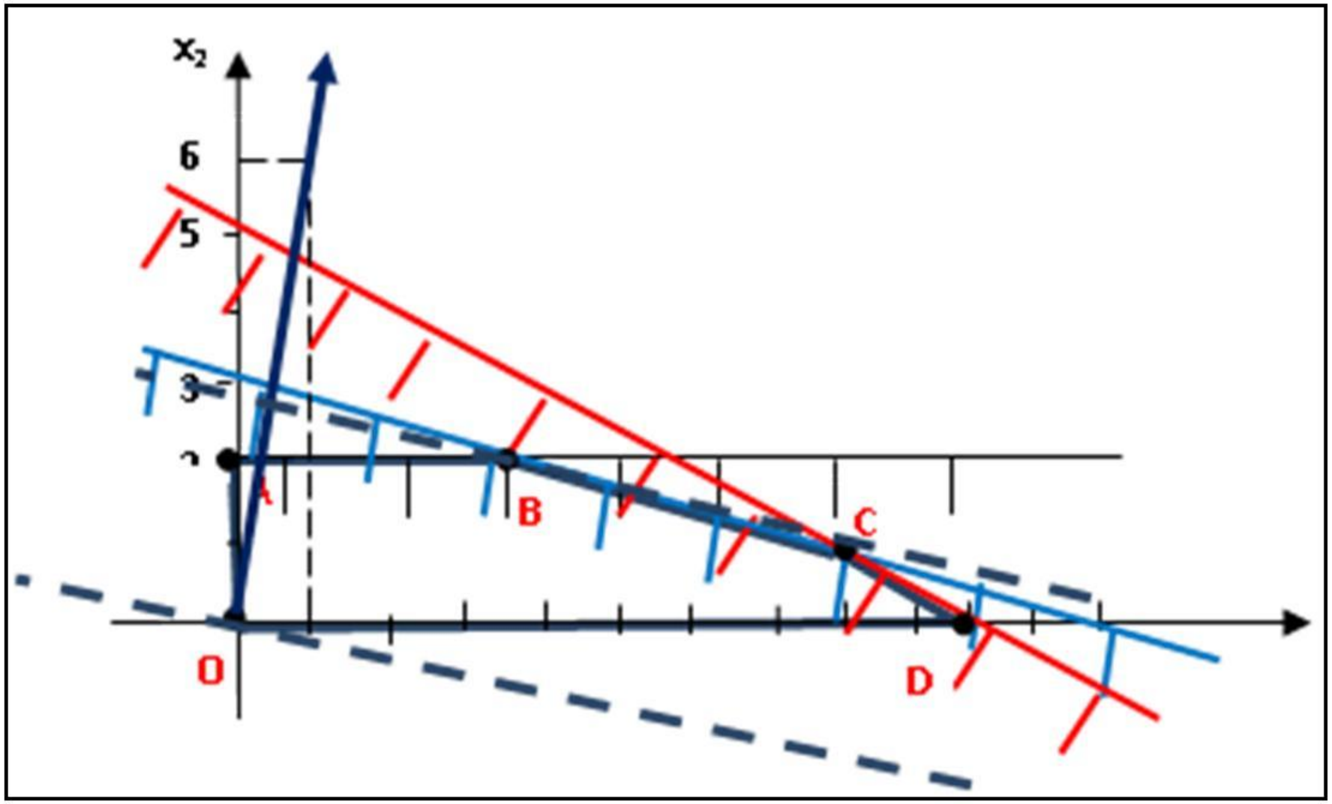
3. Проводим перпендикулярно **градиенту** ***линии уровня ЦФ***.



4. ***Решаем ЗЛП графически*.**

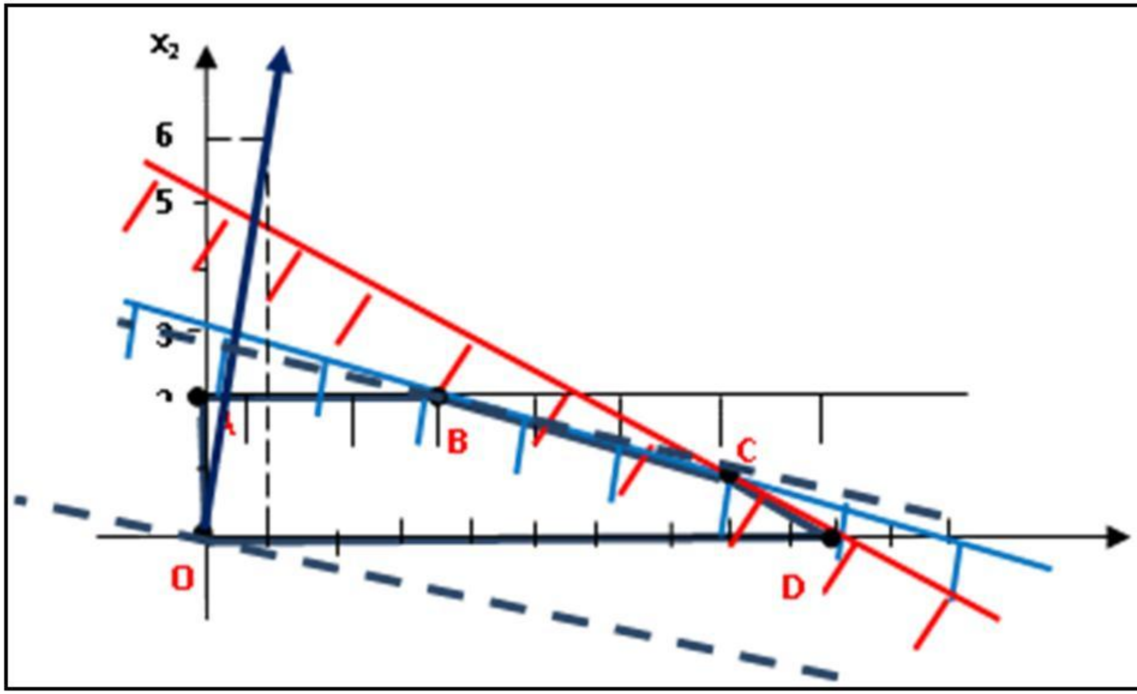
Перемещаем линии уровня в направлении вектора С до последнего пересечения с ОДР.

Решение задачи на max будет в точке В или С.



5. Находим координаты точек.

B : (2) и (3).



$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 12, \\ x_2 = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

B (4, 2),

$$f(B) = 1 \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 16.$$

C : (1) и (2)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ x_1 + 4x_2 = 12, \end{cases} \text{(2)- (1):} \quad \begin{cases} 2x_2 = 2, \\ x_1 = 10 - 2x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ x_1 = 8. \end{cases}$$

C (8,1), $f(C) = 1 \cdot 8 + 6 \cdot 1 = 14.$

F(B)=16, F(C)=14. Т.к. F(B)>F(C), то

$$x^*_{max} = B = (4,2).$$

Ответ:

$$x^*_{max} = B = (4,2),$$
$$f^*_{max} = f(B) = 16.$$

Экономическая интерпретация полученного решения

- Чтобы получить max прибыль в количестве 16 ден.ед., нужно произвести 4 ед. продукции П1 и 2 ед. продукции П2.
- При этом 2-ой и 3-ий ресурс будет потрачен полностью (***дефицитные ресурсы***), а 1-ый ресурс останется в количестве 2 ед. (***избыточный ресурс***):

$$f(x) = x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$x^*_{\max} = (4,2),$$

$$f^*_{\max} = 16.$$

$$\begin{cases} 4 + 2 \cdot 2 \le 10, \\ 4 + 4 \cdot 2 \le 12, \\ 2 \le 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 \le 10, \\ 12 \le 12, \\ 2 \le 2. \end{cases}$$

Замечание *. Графический метод может применяться также для решения задач с любым количеством переменных, если возможно выразить все переменные задачи через какие-либо *две* переменные.

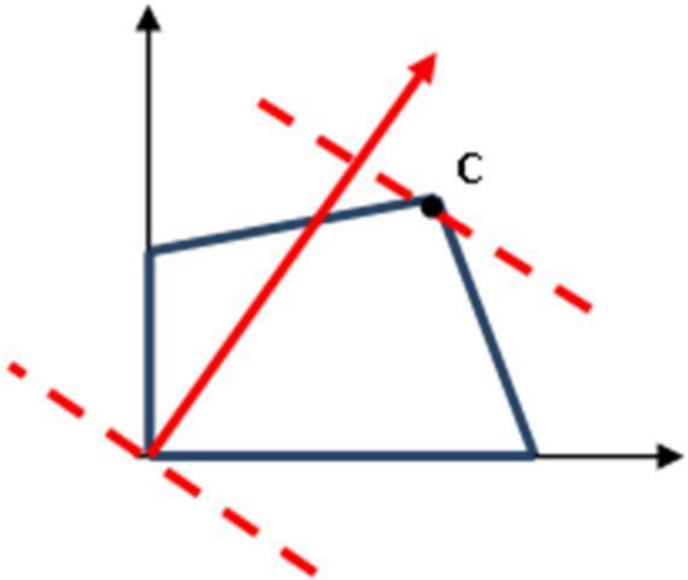
$$
\begin{aligned}
&2x_2 + 2x_3 \to \max\\
&3x_1 - x_2 + x_3 = -6,\\
&x_1 \qquad\quad + x_3 \le 3,\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

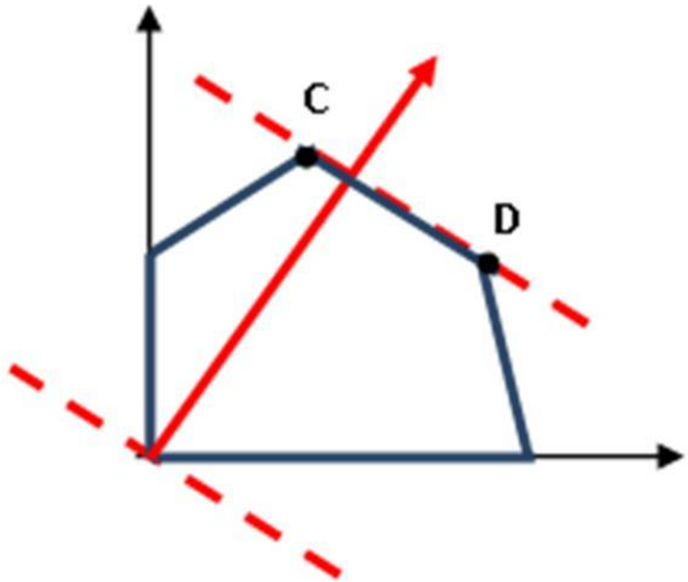
$$
\begin{aligned}
&2x_2 + 2(-3x_1 + x_2 - 6) \to \max\\
&x_3 = -3x_1 + x_2 - 6 \ge 0\\
&x_1 \qquad\quad + (-3x_1 + x_2 - 6) \le 3,\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-6x_1 + 4x_2 \to \max\\
&\begin{cases}
-3x_1 + x_2 \ge 6\\
-2x_1 + x_2 \le 9,\\
x_1, x_2 \ge 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

1.4. Ситуации при решении ЗЛП

Решение есть

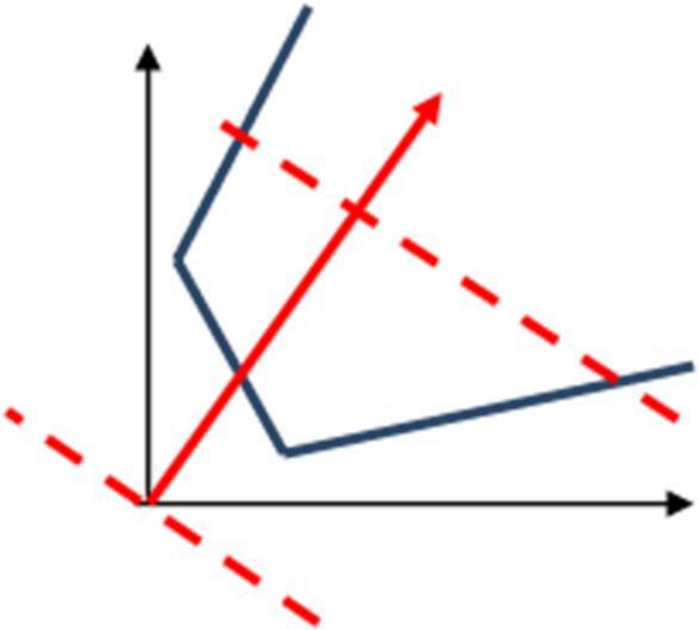


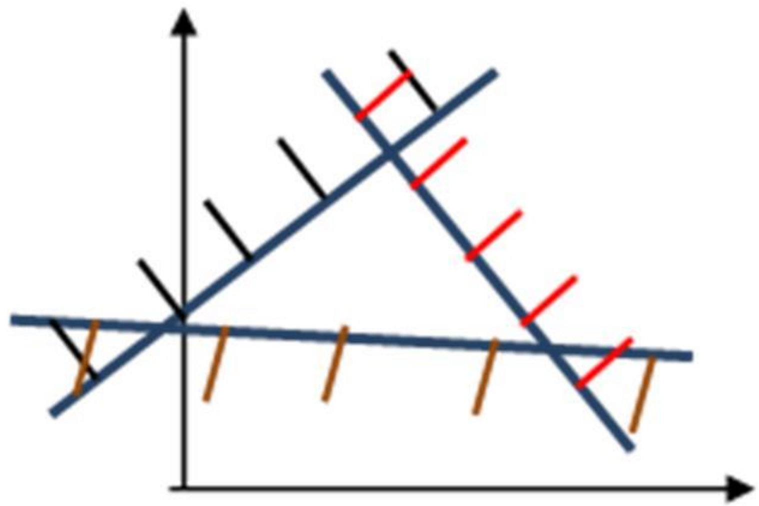


1) Единственное решение (точка C)

2) Бесконечно много решений (отрезок [C, D])

Решения нет





3) Решения нет.
ЦФ неограниченно возрастает

4) Решения нет.
ОДР – пустое множество

1.5. Свойства задач ЛП

Теорема 1. Множество планов ЗЛП выпукло (*либо пусто*).

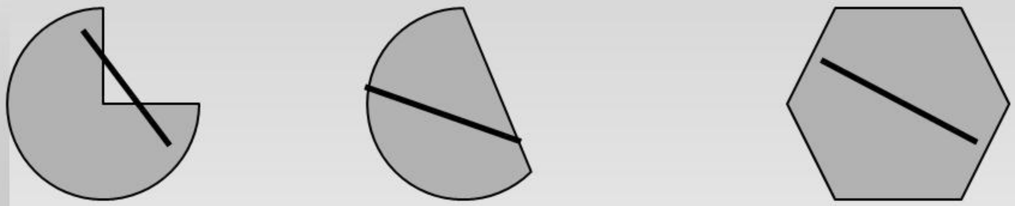
Теорема 2. Если задача ЛП имеет решение, то ее система ограничений совместна, обратное верно не всегда.

Теорема 3. *(Основная теорема ЛП)* Если задача ЛП имеет решение, то ЦФ достигает экстремального значения в угловой точке множества планов.

Если ЦФ достигает экстремального значения более чем в одной угловой точке, то она достигает *того же* значения в любой точке, являющейся их выпуклой линейной комбинацией (на отрезке, если n=2).

Свойства задач ЛП (на плоскости)

1) <u>Выпуклое множество</u>: если для любых двух точек множества любая точка отрезка, их соединяющего, также принадлежит множеству.



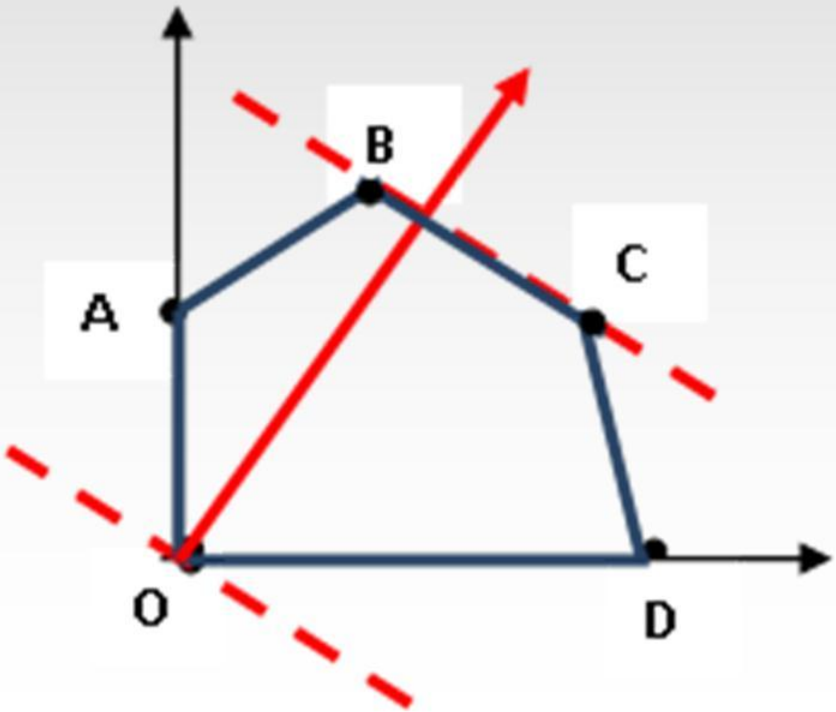
2) Любую точку отрезка можно представить в виде линейной комбинации концов отрезка. Для отрезка [C, D]:

$$x(\lambda) = \lambda\, C + (1-\lambda) D, \qquad \lambda \in [0,1]$$

3) Угловая точка ОДР. Образована пересечением двух или более граничных прямых и принадлежащая ОДР (на рис.: О,А,В,С,Д).

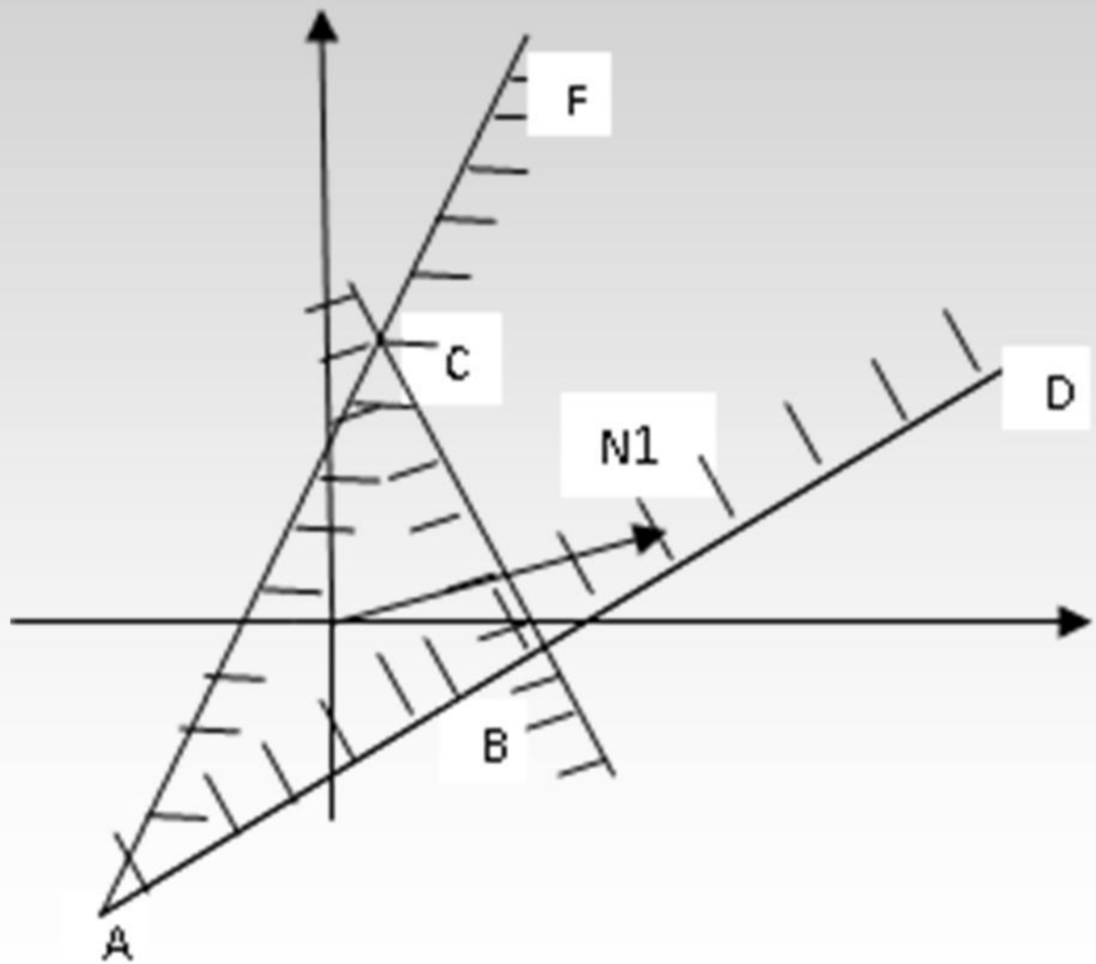
4) Свойство не угловой точки. Ее можно представить в виде линейной комбинации др. точек

5) Свойство угловой точки. Ее нельзя представить в виде линейной комбинации других точек

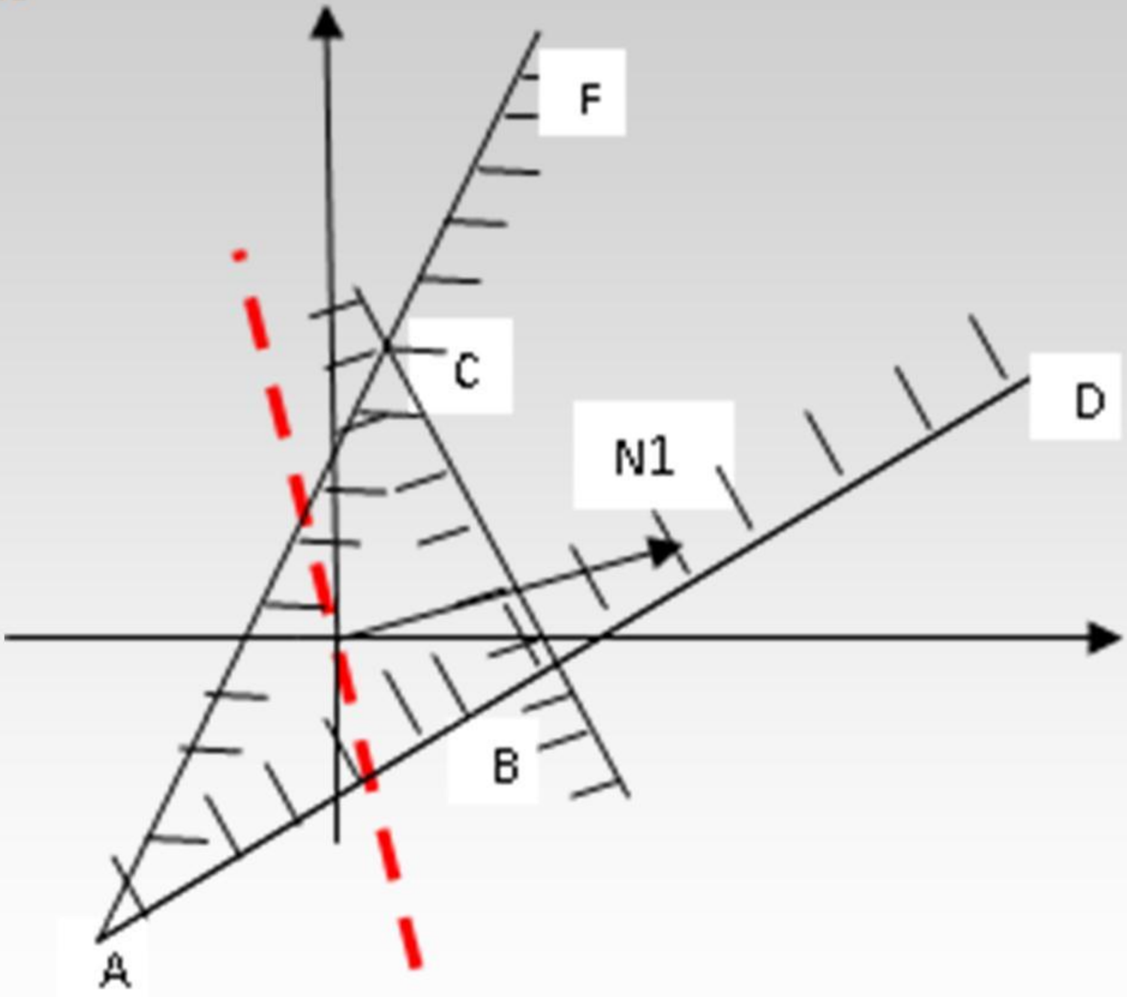


Упр. 1. Решить задачу графически:

1) указать ОДР;   2) найти точку (точки) max и min

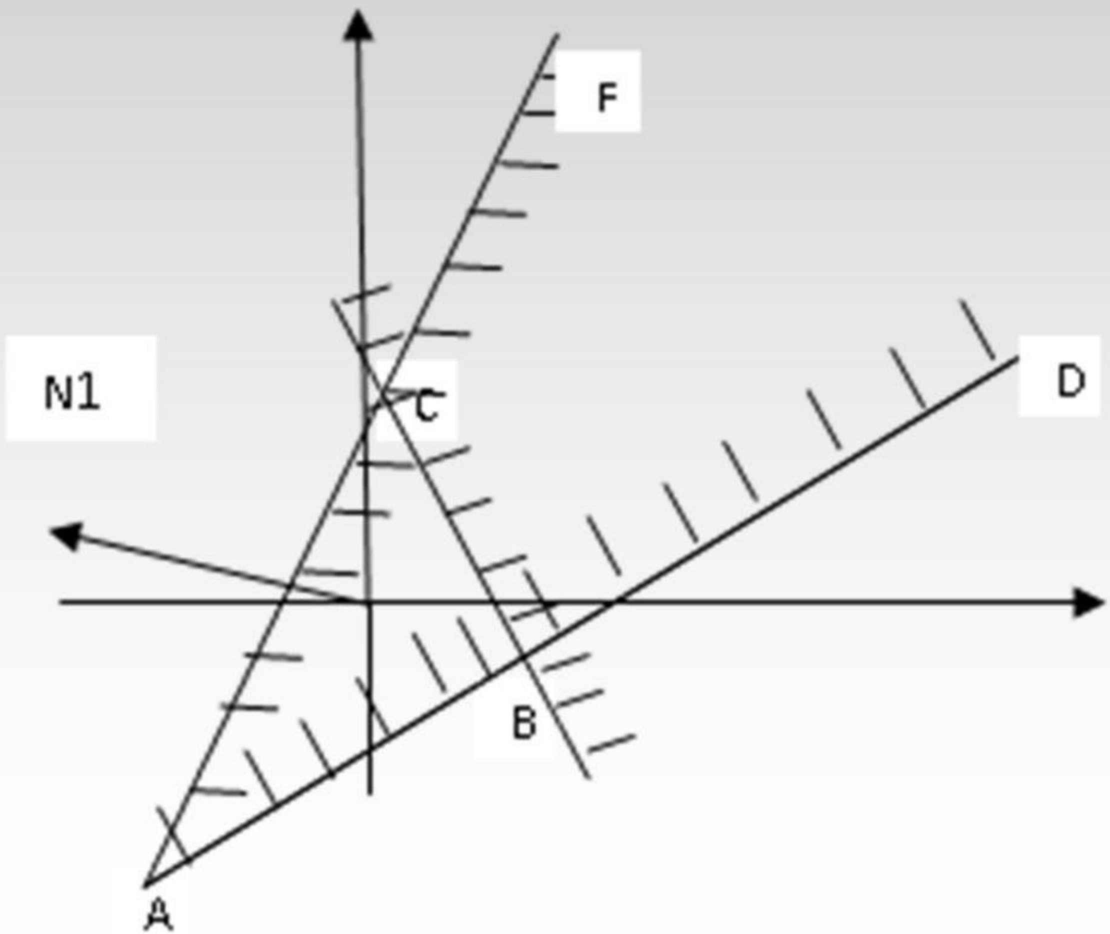


Упр. 1.

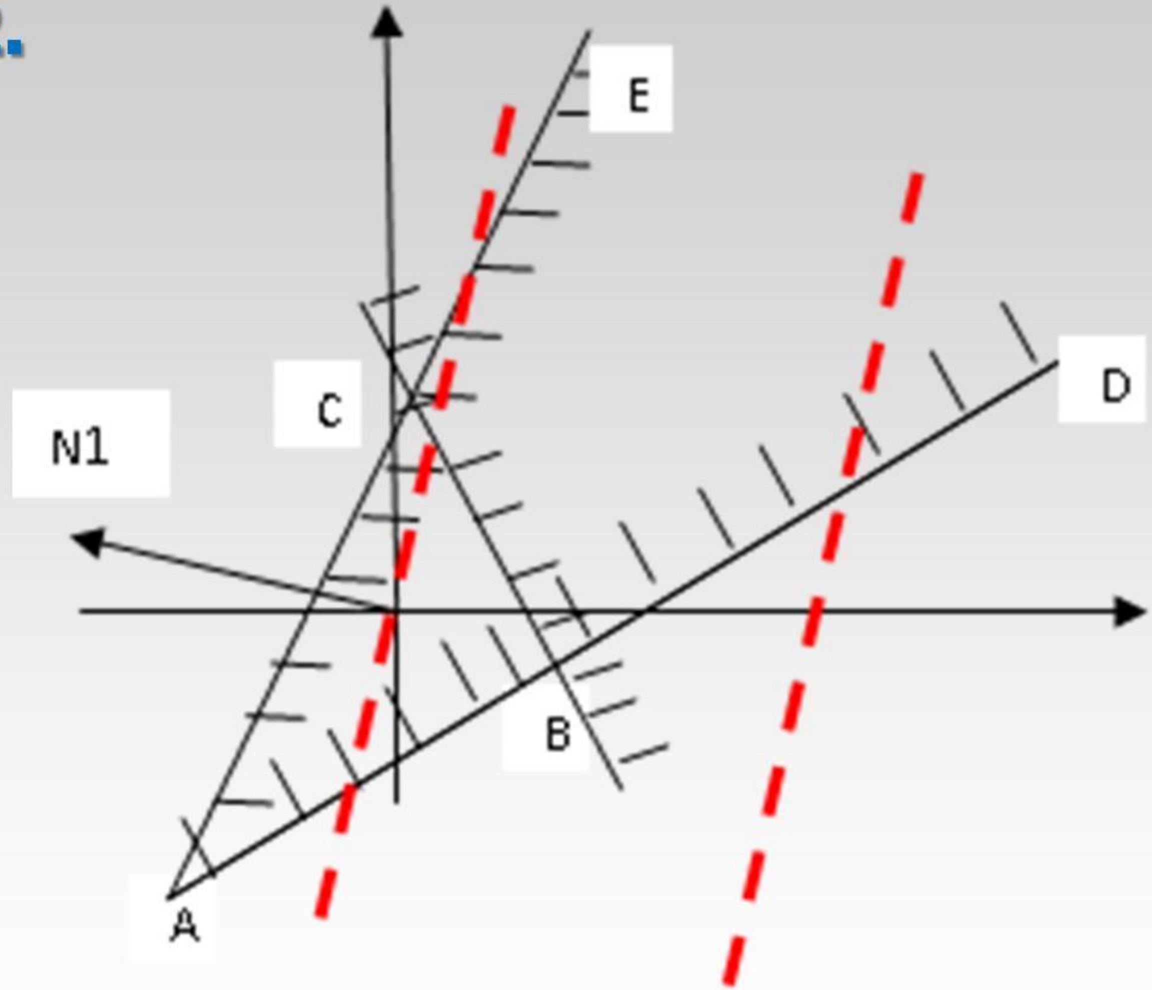


Упр. 2. Решить задачу графически:

1) указать ОДР; 2) найти точку (точки) max и min



Упр. 2.



Упр. 2.