ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

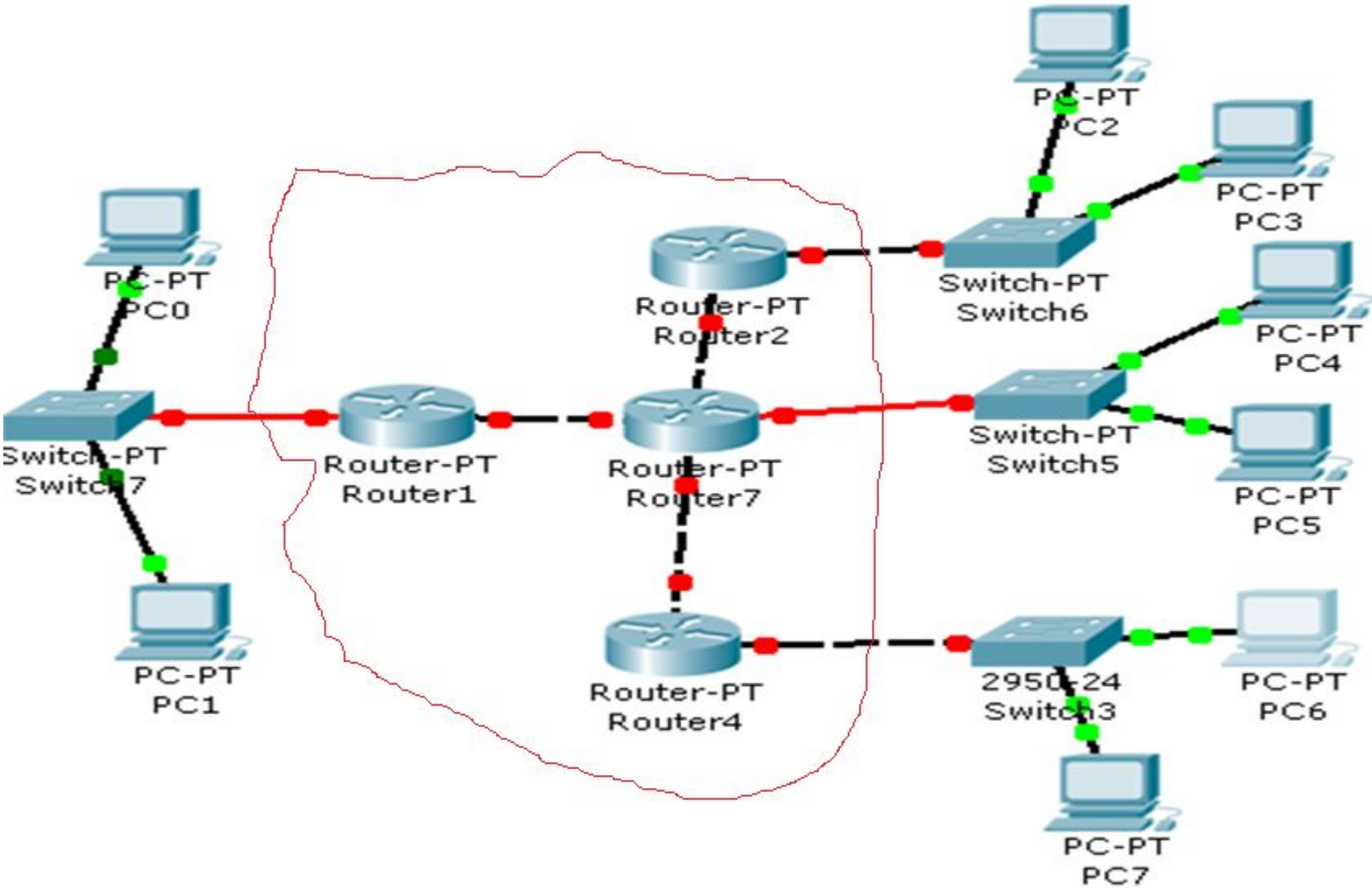
Определим понятия:

Модель

Моделирование

Пример для мотивации применения моделирования

Глобальная сеть (Wide Area Networks)



Проблема: оценка показателей эффективности

Для отдельного узла (маршрутизатора) сети

- Пропускная способность
- Среднее число пакетов в узле
- Среднее время ожидания пакета в узле
- Вероятность потери пакетов в узле
- Коэффициент использования узла

Для сети

- Пропускная способность сети
- Задержки в сети
- Вероятность потери пакетов в сети
- Прогноз показателей производительности сети
- Поиск узких мест и их устранение

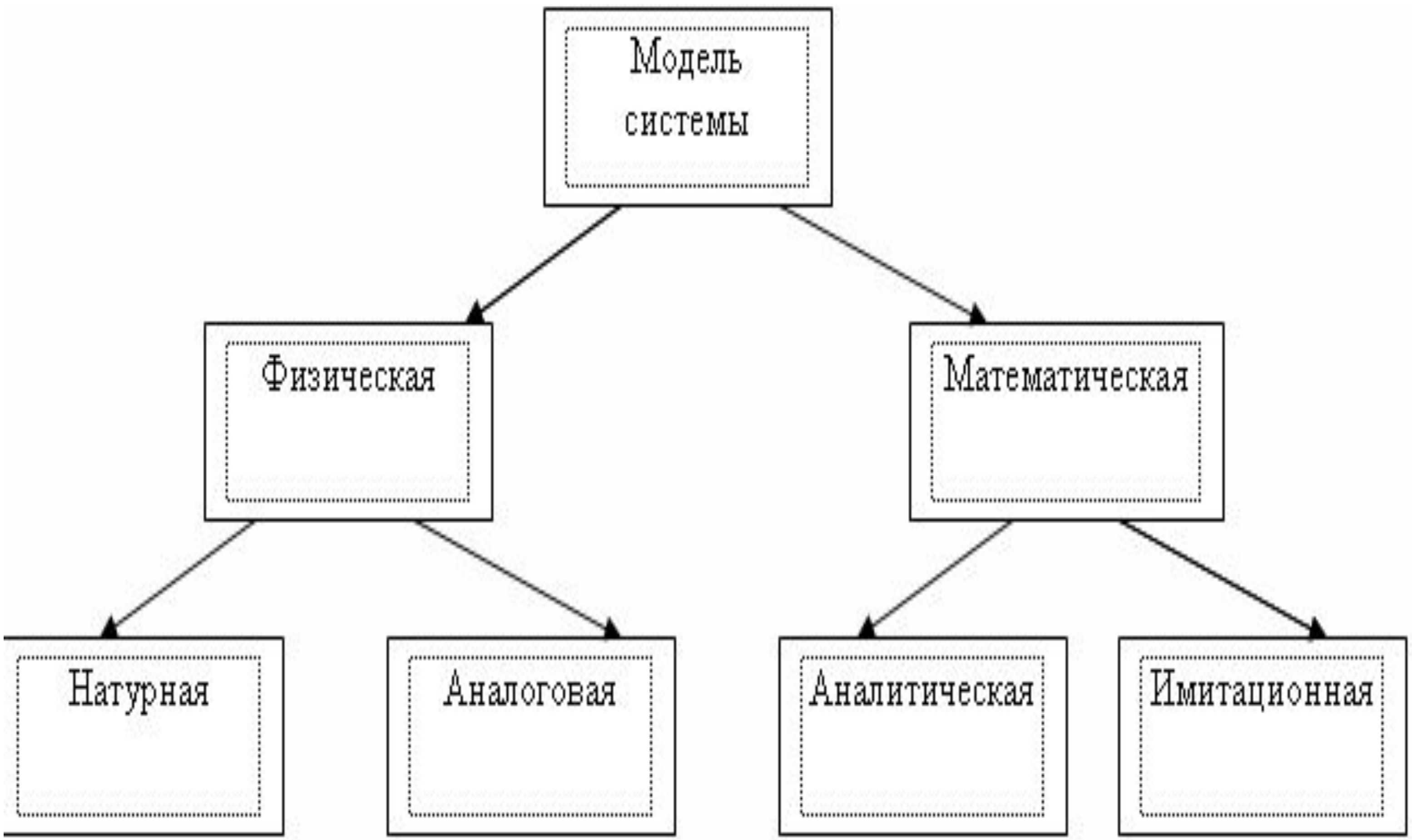
Что такое модель?

Модель (лат. **modulus** мера) это объект-заменитель системы-оригинала, отдельные свойства которого полностью или частично совпадают со свойствами исходного объекта. Модель заменяет исходный объект, сохраняя только некоторые, существенные свой ства объекта. Какие свойства считать существенными, а какие — нет, определяется целями моделирования.

Что такое моделирование?

Процесс представления объекта исследования его моделью и проведение экспериментов с моделью с целью получения информации о важнейших свойствах исследуемого объекта называется **моделированием**. При моделировании модель выступает и как средство, и как объект исследования. Моделирование является косвенным методом выявления свойств системы в том смысле, что исследование проводится не над самой системой, а над представляющей систему моделью.

Классификация моделей



Физические модели. Физическая модель — совокупность объектов физической природы, отражающих основные геометрические, физические и функциональные свойства исследуемой системы. Физические модели могут совпадать или не совпадать по физической природе с системой-оригиналом. Можно выделить следующие типы физических моделей: натурные и аналоговые.

Натурные модели — это реальные исследуемые системы. Их называют еще макетами или опытными образцами. Натурные модели обладают высокой степенью адекватности и совпадают по физической природе с системой-оригиналом, что обеспечивает высокую точность и достоверность результатов моделирования.

Аналоговыми моделями называются системы, имеющие физическую природу, отличающуюся от системы-оригинала, но сходные с оригиналом процессы функционирования. Обязательным условием при этом является однозначное соответствие между параметрами изучаемого объекта и его модели, а также тождественность безразмерных математических описаний процессов, протекающих в них. Для создания аналоговой модели требуется математическое описание изучаемой системы.

Математические модели (аналитические и имитационные)

Аналитическая модель воспроизводит спецификацию с помощью абстрактного языка, в частности, с помощью аналитических соотношений, отражающих процесс функционирования системы. Причем уровень абстрагирования зависит от тех вопросов, на которые исследователь хочет получить ответ с помощью модели. Другими словами, для построения выражений можно использовать любые аналитические средства: алгебраические выражения, дифференциальное и интегральное исчисление, теорию множеств, теорию графов, теорию марковских процессов и т.д.

Имитационная модель представляет собой формальное, т.е. выполненное на некотором формальном языке, описание логики функционирования объекта исследования, которое воспроизводит структуру исследуемой системы, зависимости, существующие между ее параметрами, а также и процессы функционирования системы во времени. Очень часто имитационная модель выражается в виде алгоритма.

Аналитическое моделирование

- 1. Теория Марковских процессов
- 2. Теория систем массового обслуживания (СМО)
- 3. Операционный анализ (частный случай СМО)

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Definition and classification of random process

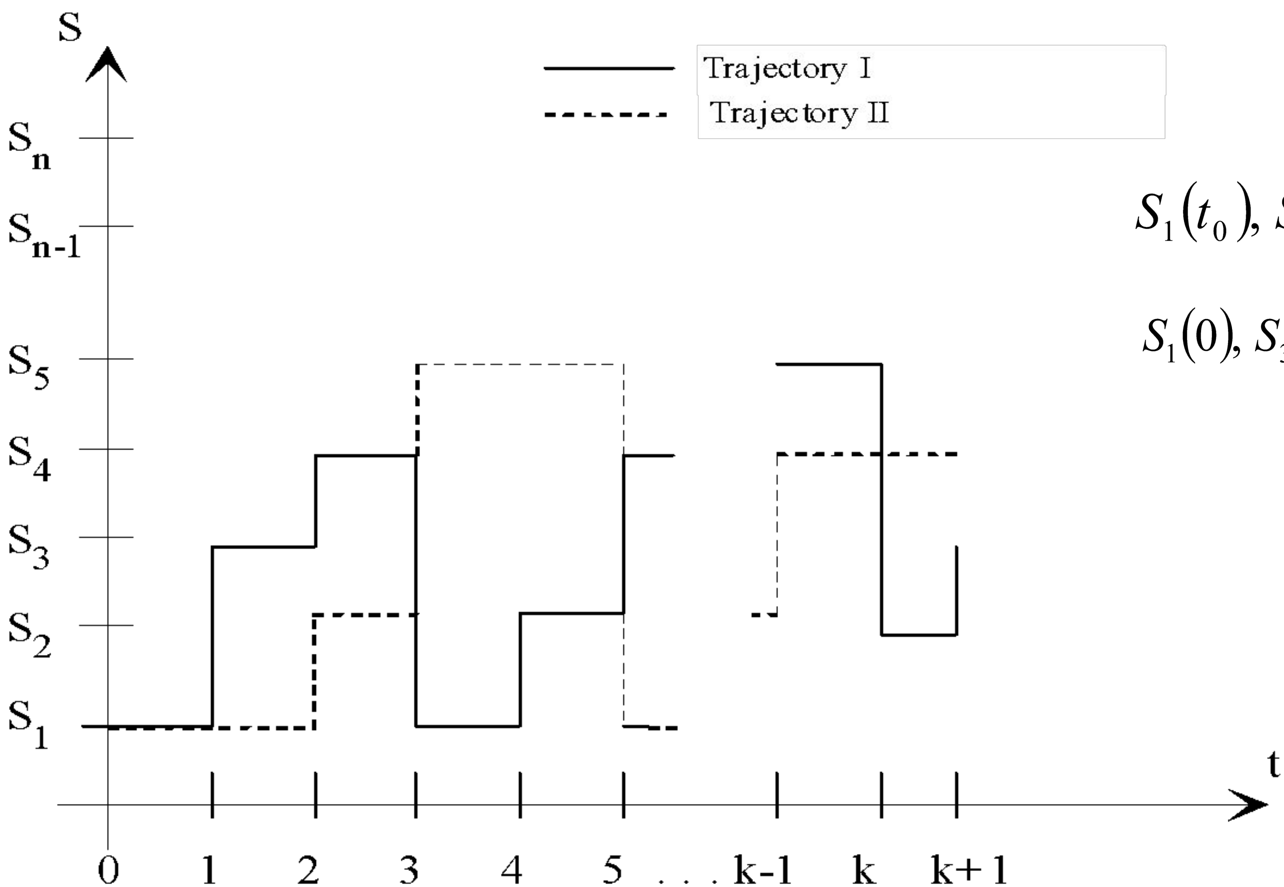
Imagine an example of stochastic process from common stand. Assume there is a physical system S, which consists of two devices. Each device can fail at any instance of time. Thus, the system continues to operate with second device. After recovering the device is put into the system. The system continues to operate with two devices. The states of system are S_1- two devices are in the working state; S_2 - first device is failed, second one is in the working state; S_3 - first device is in operation, second one is failed; S_4 - two devices are failed.

Let consider a function S(t) which values at some instant of time t_0, t_1, t_2, …, t_k are correspondingly

$$S_1(t_0), S_3(t_1), S_4(t_2), S_5(t_3), \ldots$$

It is evident, this function describes a system behavior in question. A sequence of states is named "trajectory of process".

Graphical representation of system behavior



$$S_1(t_0),\ S_3(t_1),\ S_4(t_2),\ S_5(t_3),\ \ldots$$

$$S_1(0),\ S_3(1),\ S_4(2),\ S_5(3),\ \ldots$$

If the system S changes the states (passes from one state Si to another S_j) in a random way and a change of states occurs at some instants of time t_0, t_1, t_2, …, t_k, we say that operating of system is described by the function S(t) which values are random values.

$$S_1(t_0), S_3(t_1), S_4(t_2), S_5(t_3), \ldots$$

Definition of a stochastic process

Stochastic process is a function S(t) which values are random values. In other words, stochastic process is a random function.

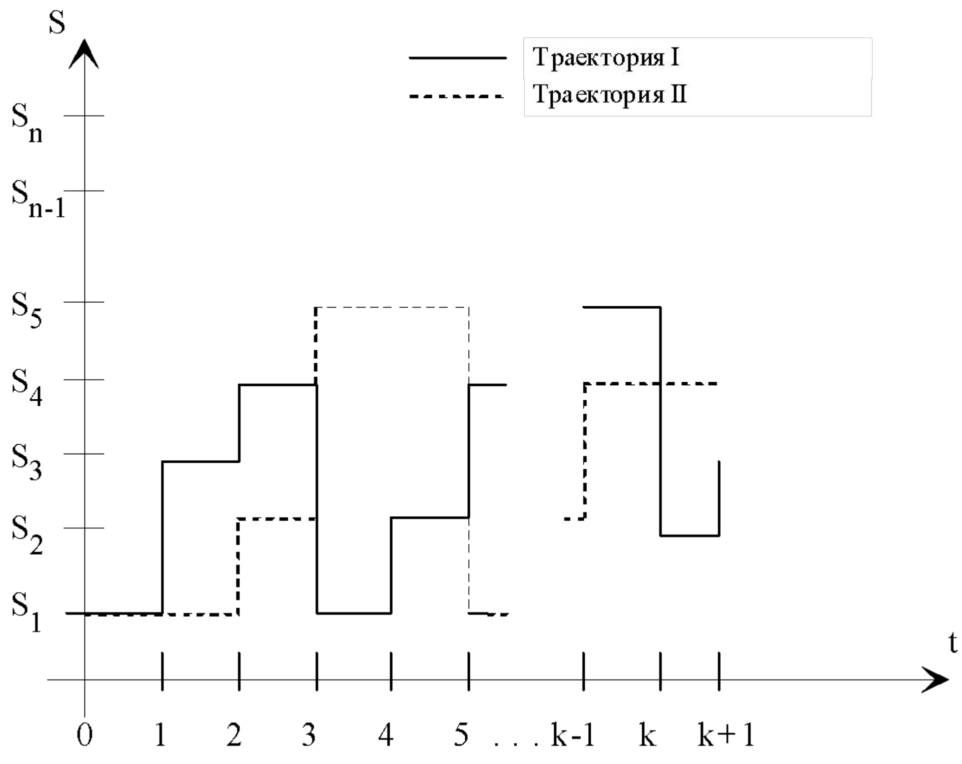
For example, the number of requests in the DB waiting line, states of microprocessor, and so on.

Рассмотрим пример

Процессор компьютера в любой заданный момент времени выполняет команды из: а) программы пользователя (состояние S_0); б) подпрограммы операционной системы (ОС), явно вызываемой из программы пользователя и выполняющей для нее некоторую задачу (например, операцию по вводу – выводу) (состояние S_1); в) подпрограммы ОС, выполняющей общесистемную задачу управления, например, планирование, переключение, распределение ресурсов или восстановление после сбоя системы (состояние S_2); г) цикла ожидания (состояние S_3).

Требуется с использованием аналитического моделирования: оценить показатели эффективности) коэффициент использования процессора и ОС.

Графическая интерпретация поведения процессора
Возможные траектории процесса



$$S_1(t_0), S_3(t_1), S_4(t_2), S_1(t_3), \ldots$$

$$S_1(t_0), S_1(t_1), S_2(t_2), S_5(t_3), \ldots$$

Определение случайных процессов

Рассмотрим пример случайного процесса с общих позиций. Пусть имеется некоторая физическая система S, которая с течением времени меняет свое состояние (переходит из одного состояния в другое) случайным образом. Предположим, смена состояний происходит в некоторые моменты времени t_0, t_1, t_2, …, t_k, …. В этом случае последовательность состояний может рассматриваться как случайный процесс. Тогда, случайный процесс, происходящий в системе S, можно представить как некоторую последовательность состояний, называемую еще траекторией процесса:

$$S_1(t_0), S_2(t_1), S_1(t_2), S_3(t_3), \ldots$$

В общем случае, **случайный процесс** есть функция , значениями которой являются случайные величины. Значение в конкретный момент времени представляет собой состояние случайного процесса в момент

Классификация состояний случайных процессов

Если случайная функция $S(t)$ может принимать лишь конечное и счетное число значений, имеет место **случайный процесс с дискретными состояниями или цепь**.

Если допустимое множество состояний случайной функции представляет собой конечный или бесконечный непрерывный интервал, говорят, что имеет место **случайный процесс с непрерывными состояниями**.

Классификация случайных процессов по времени

Если моменты времени, в которые возможна смена состояний системы, образуют конечное и счетное множество, то говорят о **случайном процессе с дискретным временем**.

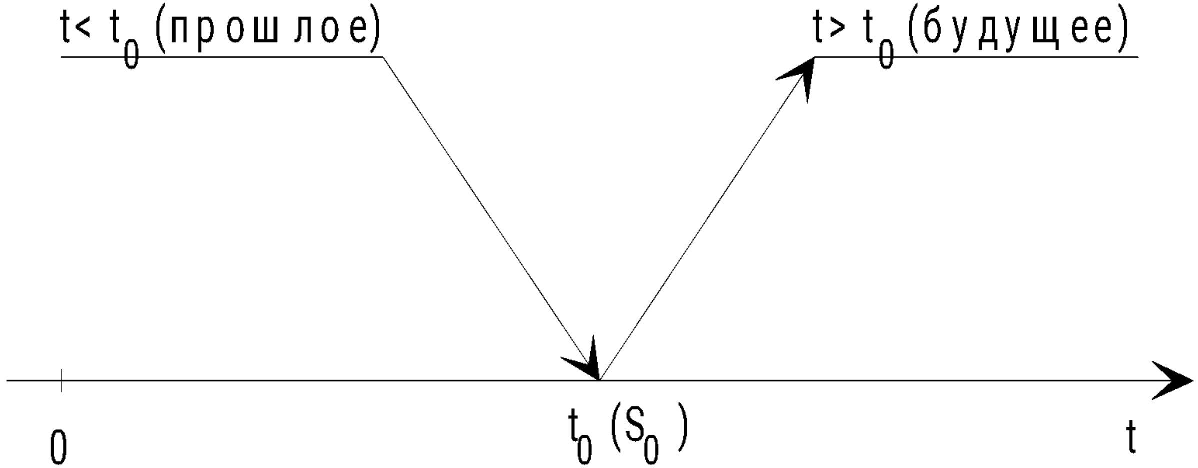
Если смена состояний в системе может происходить в любой точке непрерывной оси времени, то процесс относится к **случайным процессам с непрерывным временем**. В дальнейшем, случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем будем называть **дискретными**, а случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем - **непрерывными**.

Рассматриваемые случайные процессы

	Дискретное время	Непрерывное время
Дискретные состояния	+ дискретные случайные процессы	+ непрерывные случайные процессы
Непрерывные состояния	—	—

Марковские процессы

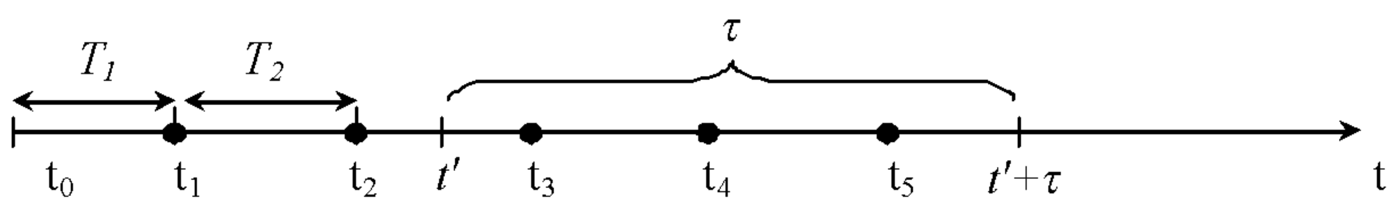
Случайный процесс, протекающий в системе называется **Марковским**, если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем (вероятность следующего состояния) зависят только от его состояния в данный момент времени t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.



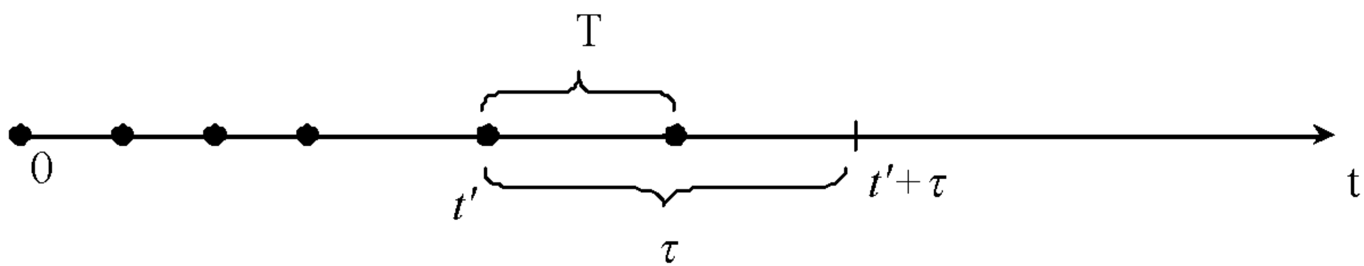
Потоки событий. Простейший поток и его свойства

Потоки событий

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в некоторые моменты времени.



а)



б)

Свойства потоков

Поток событий называется **регулярным** или **детерминированным**, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени T_i, другими словами, время между поступлением соседних заявок – постоянная величина.

Поток событий будет **случайным**, если интервалы являются случайными величинами.

Интенсивностью потока (λ) называется среднее число событий, приходящееся на единицу времени.

Потоки событий, обладающие некоторыми простыми свойствами (1)

Случайный поток называется **стационарным**, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной τ зависит только от длины участка τ и не зависит от того, где именно на оси времени этот участок расположен. Другими словами, интенсивность стационарного потока (число событий потока в единицу времени) — постоянна: $\lambda = \text{const}$.

Случайный поток событий называется **потоком без последействия**, если для любых непересекающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой участок. По сути это означает, что события, образующие поток, появляются в те или другие моменты времени независимо друг от друга и вызываются своими собственными причинами.

Потоки событий, обладающие некоторыми простыми свойствами (2)

Случайный поток событий называется **ординарным**, если вероятность попадания на элементарный участок τ двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания на этот участок одного события.

Потоки событий, которые обладают свойством стационарности, ординарности и не имеют последействия, называются **простейшими** или **стационарными пуассоновскими**. Название «простейший» объясняется тем, что процессы, связанные с простейшими потоками, имеют наиболее простое математическое описание.

Распределение Пуассона

Пуассоновские потоки. Поток случайных событий называется пуассоновским, если число событий потока **m**, которые попадают на любой участок τ оси времени, распределено по закону Пуассона:

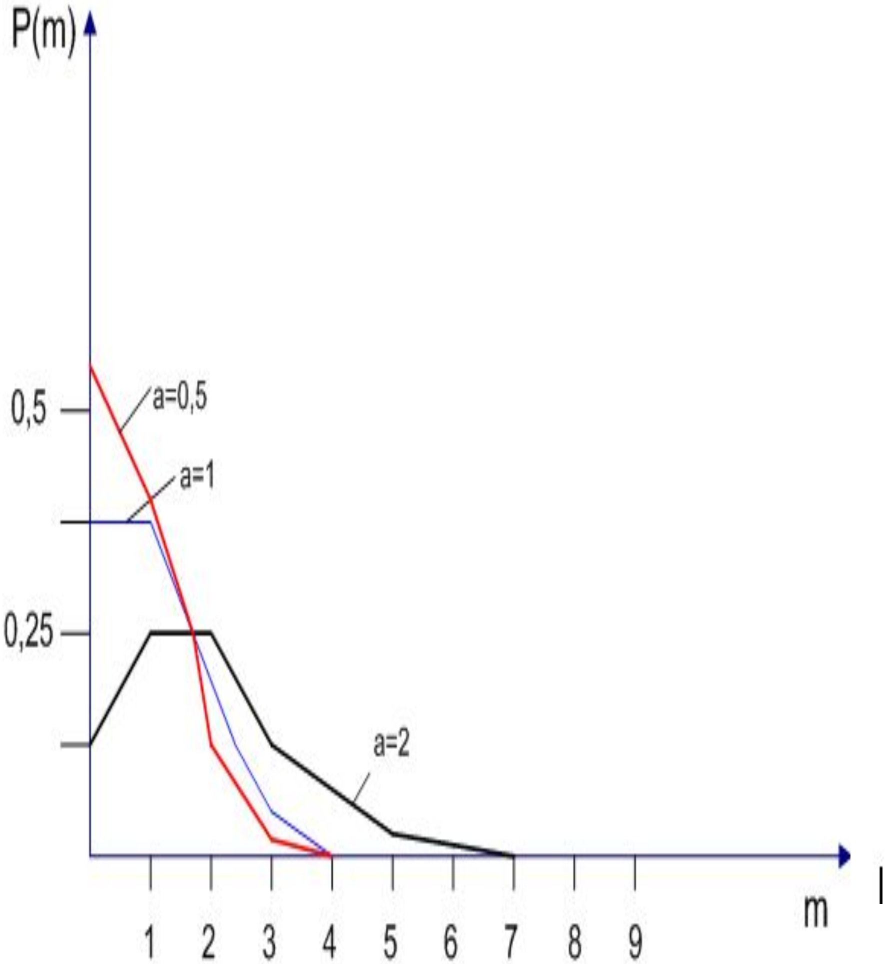
$$P(m,\tau) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad \mathrm{m} = 0,1,\ldots\ldots,$$

где a — среднее число событий, приходящихся на участок τ.

Пуассоновский поток является **стационарным**, если интенсивность потока событий $\lambda = \mathrm{const}$, тогда $\mathrm{a} = \lambda\tau$, и **нестационарным**, если $\lambda = \lambda(\mathrm{t})$, тогда

$$a = \int_{t'}^{t'+\tau} \lambda(t)\,dt \quad .$$

Распределение Пуассона



Основные характеристики распределения

$$a = \lambda\tau$$

$$m_m = a$$ - математическое ожидание

$$D_m = a$$ - дисперсия

$$\sigma_m = \sqrt{D_m}$$ - среднее квадратическое отклонение

Простейший поток. Распределения интервала времени Т между соседними событиями

Рассмотрим на оси t простейший поток событий с интенсивностью λ. Определим функцию распределения интервала времени Т между соседними событиями в стационарном пуассоновском потоке $F(\tau) = P(T < \tau)$. Доказано, что функция распределения величины Т равна

$$F(\tau) = 1 - e^{-a}.$$

Чтобы найти плотность распределения $f(\tau)$ случайной величины Т, продифференцируем выражение по τ, получим

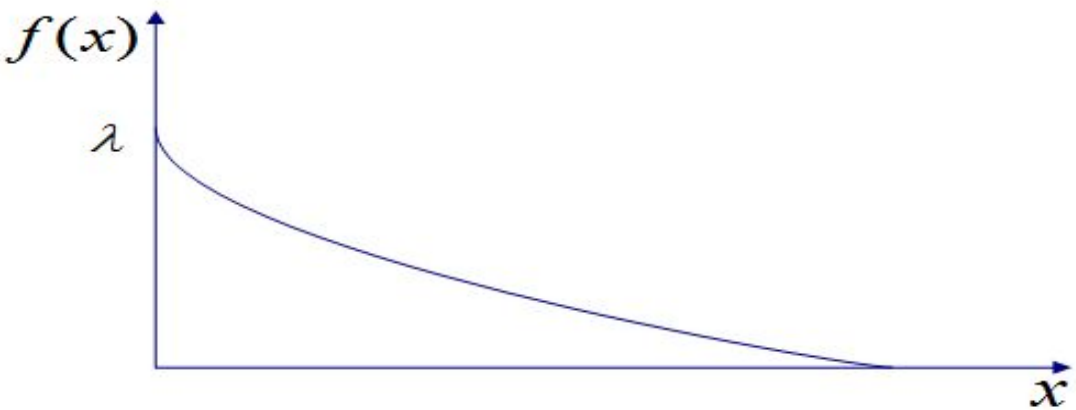
$$f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}, \ \tau > 0$$

Таким образом, интервал времени между событиями в пуассоновском стационарном потоке подчинен экспоненциальному (или показательному) закону распределения. Величина λ называется параметром экспоненциального закона.

Плотность и характеристики экспоненциального распределения

Плтность экспоненциального распределения

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x > 0$$



Основные характеристики распределения

$$m_x = \sigma_x = \frac{1}{\lambda}$$

математическое ожидание
и
среднее квадратическое отклонение

$$D_x = \sigma_x^2$$

дисперсия

Вероятность появления одного события на элементарном участке τ

Определим вероятность того, что на бесконечно малом участке τ появится одно событие. Эту вероятность будем называть элементарной вероятностью и обозначим ее как $P_1(\tau)$. Доказано, что

$$P_1(\tau) \approx \lambda\tau$$

Коэффициент вариации простейшего потока

коэффициент вариации это "мера случайности" неотрицательной случайной величины:

$$C = \frac{\sigma}{m_x},$$

где σ и m_x — соответственно среднеквадратичное отклонение и математическое ожидание случайной величины X.

Для простейшего потока событий C = 1, а для регулярного потока событий, у которого интервал между событиями вообще не случаен ($\sigma = 0$), коэффициент вариации равен нулю.

Основные свойства простейшего потока

Простейший поток занимает центральное место в теории массового обслуживания.

Во-первых, он обладает упрощенными аналитическими и вероятностными свойствами.

Во-вторых, если все потоки событий, переводящие систему из одного состояния в другое, будут пуассоновские (т.е. без последействия), то процесс, протекающий в системе, будет марковским (т.е. без последействия).

В-третьих, как это было показано выше, он создает более сложные условия для моделируемой системы.

В-четвертых, многие реальные физические потоки хорошо описываются пуассоновским потоком.

Дискретные марковские процессы

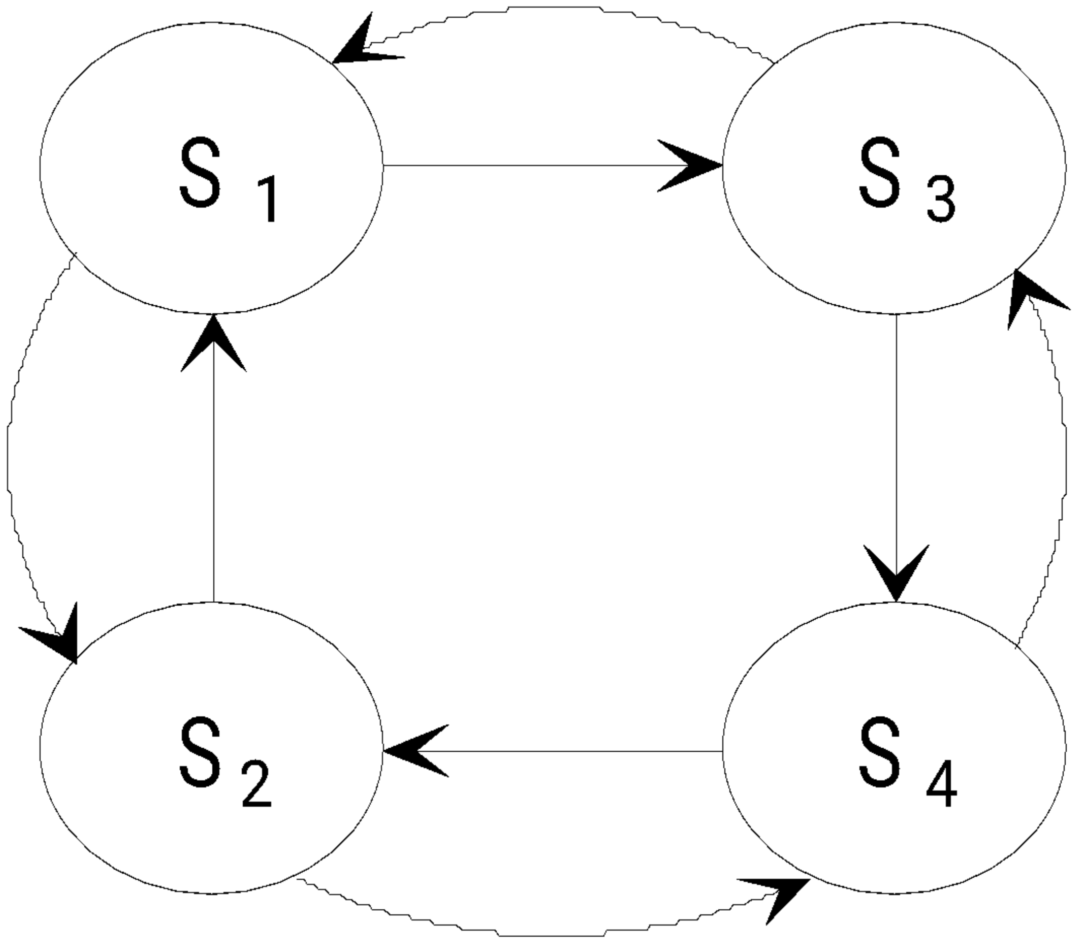
Случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем называются **дискретными.**

Формальные средства описания (модель) марковского процесса с дискретными состояниями (**Граф состояний**)

При анализе систем, где протекает случайный процесс с дискретными состояниями, удобно пользоваться геометрической схемой — так называемым графом состояний. Вершины графа изображают состояния системы, а дуги — возможные переходы.

Например, техническое устройства S, состоит из двух узлов, каждый из которых в ходе работы может отказать и может быть восстановлен после ремонта. Построим граф состояний процесса, который протекает в рассматриваемой системе. Будем предполагать, при этом, что смена состояний системы происходит под воздействием простейшего потока событий.

Граф состояний дискретного марковского процесса

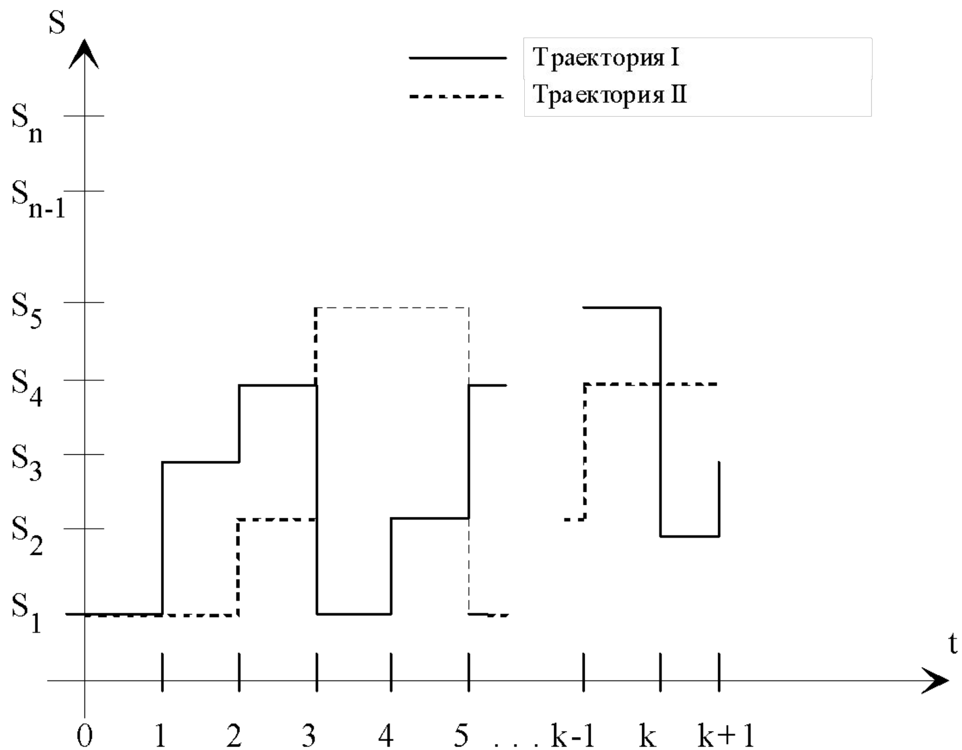


Практически, приведенный граф является моделью, которая иллюстрирует процесс поведения рассматриваемой системы.

Формальные средства описания марковского процесса с дискретными состояниями. (**Марковская цепь**)

Из определения дискретного марковского процесса, для рассматриваемой системы **S**, переходы из S_i в S_j возможны только в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$. Будем называть эти моменты времени "шагами" процесса и рассматривать случайный процесс в системе **S**, как функцию целочисленного аргумента: $1, 2, \ldots, k, \ldots$ (номера шага). Условимся обозначать $S_i(k)$ (вместо $S_i(t_k)$) событие, состоящее в том, что после k шагов система находится в состоянии S_i .

Графическая интерпретация поведения процессора
Возможные траектории процесса



$$S_1(t_0), S_1(t_1), S_2(t_2), S_5(t_3), \ldots$$

$$S_1(0), S_1(1), S_2(2), S_5(3), \ldots$$

$$S_1(t_0), S_3(t_1), S_4(t_2), S_1(t_3), \ldots$$

Формальные средства описания марковского процесса с дискретными состояниями. **Марковская цепь** - продолжение

Очевидно, что при любом **k** события $S_1(k)$, $S_2(k)$,..., $S_n(k)$ образуют полную группу несовместных событий. Тогда процесс, происходящий в системе, можно представить как последовательность событий:

$$S_1(0),\ S_2(1),\ S_1(2),\ S_2(3),\ \ldots.$$

Такая последовательность событий называется **марковской цепью**, если для любого шага **k** вероятность перехода из любого состояния S_i в любое состояние S_j не зависит от того, как система пришла в состояние S_i.

Переходная вероятность дискретного МП

Определим переходную вероятность как вероятность перехода системы из состояния S_j в любое другое состояние, например, в S_i, за один шаг. Если переход осуществляется на k-ом шаге, то обозначим такую вероятность через $P_{ji}(k)$. Согласно этого определения, переходная вероятность является условной вероятностью, т.е.

$$P_{ji}(k) = P\left(S_i(k)/Sj(k-1)\right),$$

где $S_j(k)$, $S_i(k-1)$ - состояния системы в моменты времени t_k и t_{k-1}, другими словами – это состояния системы соответственно на k-ом и (k-1)-ом шаге.

Матрица переходных вероятностей неоднородного МП

$$\left\| P_{ji}(k) \right\| = \left\| \begin{matrix} P_{11}(k) & P_{12}(k) & \dots & P_{1n}(k) \\ P_{21}(k) & P_{22}(k) & \dots & P_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1}(k) & P_{n2}(k) & \dots & P_{nn}(k) \end{matrix} \right\|$$

Матрица переходных вероятностей однородного МП

$$\left\| P_{ji} \right\| = \left\| \begin{matrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{matrix} \right\|$$

Свойства матрицы переходных вероятностей

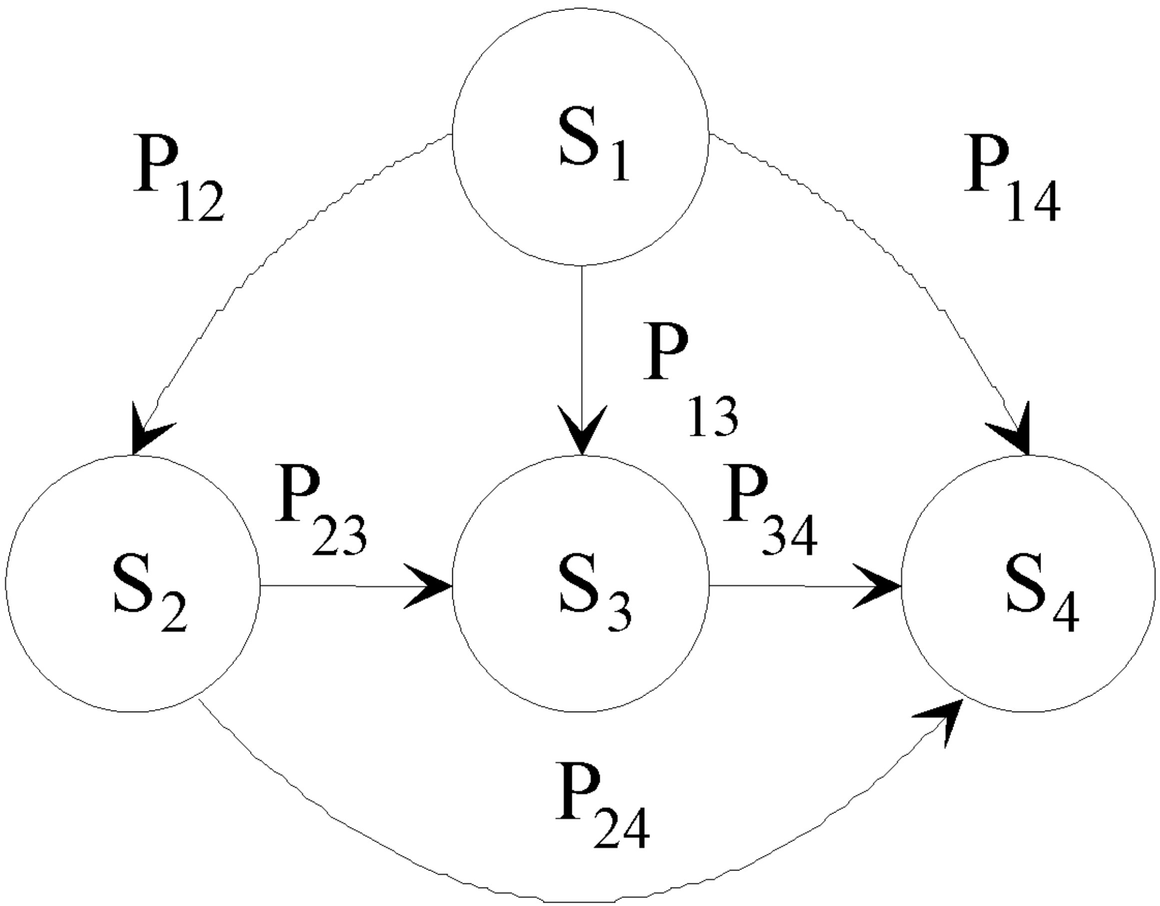
1. переходные вероятности, соответствующие невозможным переходам, равны нулю.

2. вероятности, расположенные на главной диагонали матрицы, соответствуют тому факту, что система за один шаг своего состояния не изменила.

3. сумма членов, стоящих в каждой строке матрицы, равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ji} = 1, \qquad j = \overline{1, n}.$$

Размеченный граф состояний

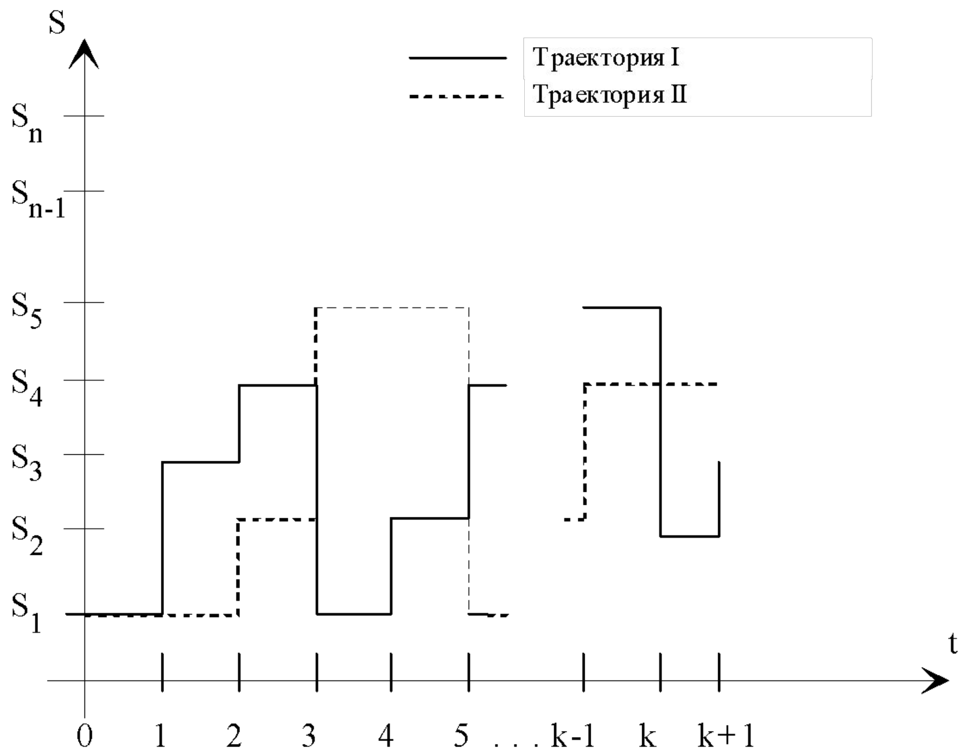


Вычисление вероятностей состояний дискретного марковского процесса

Для марковского процесса проблема определения вероятностных характеристик процесса в будущем сводится к вычислению вероятностей состояний дискретного марковского процесса на любом шаге (т.е. в любой момент времени). Марковский процесс считается определенным, если известны так называемые вероятности состояний $P_i(k)$, обозначающие вероятности того, что на k-м шаге система будет находиться в состоянии.

Покажем, что, имея размеченный граф состояний (или, что равносильно, матрицу переходных вероятностей) и начальное (в момент времени t=0) распределение вероятностей для всех состояний $P_i(0)\left(i=\overline{1,n}\right)$, можно найти вероятности состояний $P_i(k)\left(i=\overline{1,n}\right)$ для любого k-го шага.

Демонстрация **вероятностей состояний** дискретного марковского процесса на любом шаге $P_i(k)$



$$S_1(t_0), S_3(t_1), S_4(t_2), S_1(t_3), \ldots$$

$$P_1(0), P_3(1), P_4(2), P_1(3), \ldots$$

$$S_1(t_0), S_1(t_1), S_2(t_2), S_5(t_3), \ldots$$

Найдем Pi(1), $i = \overline{1, n}$

$$P_1(1) = P_1(0)P_{11} + P_2(0)P_{21} + \ldots + P_n(0)P_{n1},$$
$$P_2(1) = P_1(0)P_{12} + P_2(0)P_{22} + \ldots + P_n(0)P_{n2},$$

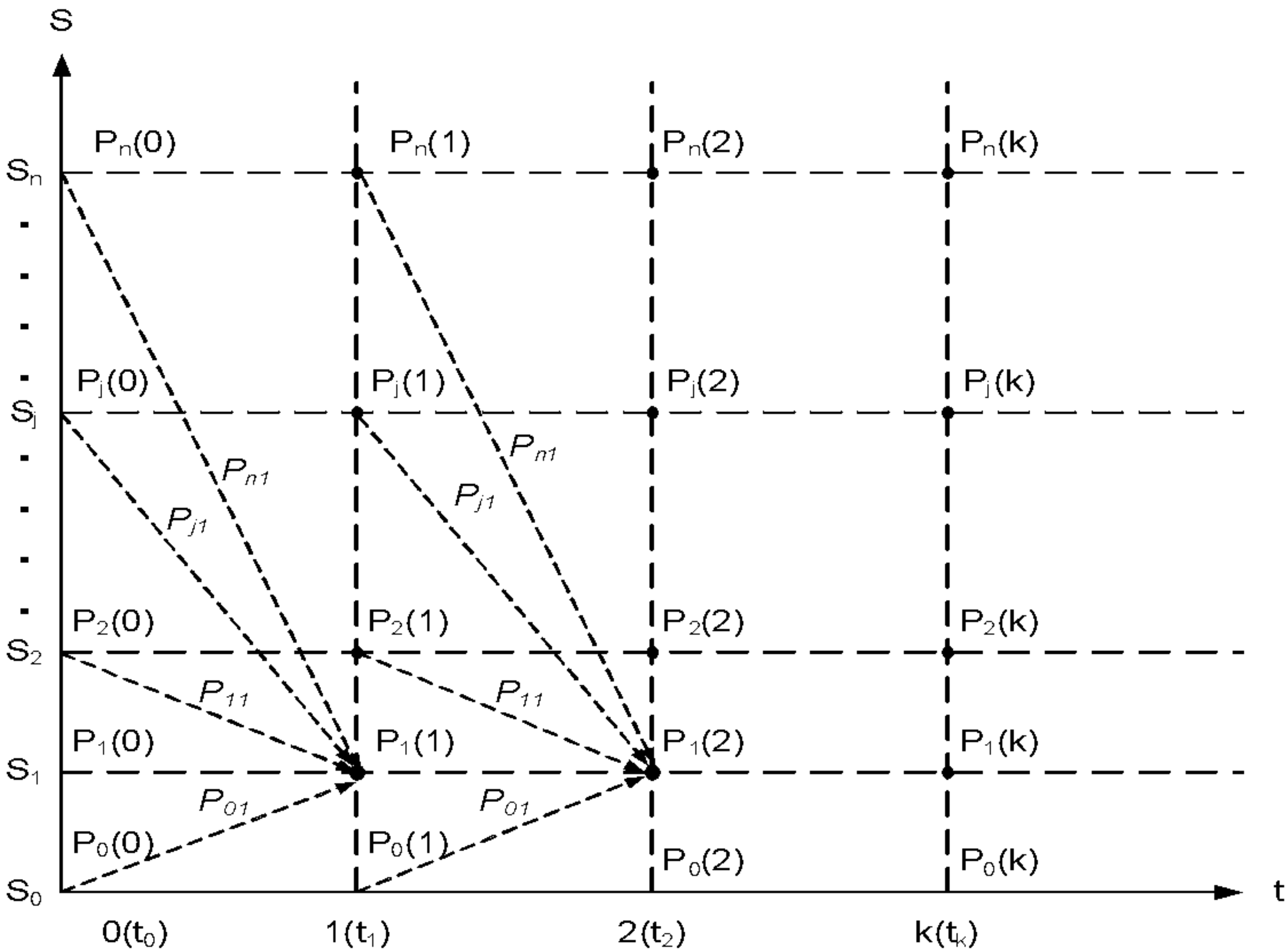
....

$$P_n(1) = P_1(0)P_{1n} + P_2(0)P_{2n} + \ldots + P_n(0)P_{nn}.$$

или в общем виде для 1- го шага

$$P_i(1) = \sum_{j=1}^{n} P_j(0) \cdot P_{ji} \qquad i = \overline{1, n}$$

Геометрическая интерпретация определения вероятности состояний ДМП



Найдем Pi(2), $i=\overline{1,n}$

$$P_1(2)=P_1(1)P_{11}+P_2(1)P_{21}+\ldots+P_n(1)P_{n1},$$
$$P_2(2)=P_1(1)P_{12}+P_2(1)P_{22}+\ldots+P_n(1)P_{n2},$$

……………………………………………

$$P_n(2)=P_1(1)P_{1n}+P_2(1)P_{2n}+\ldots+P_n(1)P_{nn}.$$

или в общем виде для 2- го шага

$$P_i(2)=\sum_{j=1}^{n}P_j(1)P_{ji} \qquad i=\overline{1,n}$$

Формулу вычисления вероятностей состояния на к-ом шаге для общего случая

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^{n} P_j(k-1) P_{ji} \qquad i = \overline{1,n}$$

Пример расчета ДМП

Пример. Задан дискретный марковский процесса с двумя состояниями. Матрица переходных вероятностей этого процесса имеет вид:

$$\left\| P_{ji} \right\| = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix},$$

а вектор вероятностей состояний в исходный момент времени равен $\overline{P}(0) = (P_1(0), \mathrm{P}_2(0)) = (0{,}7,\ 0{,}3)$.

Найдем $\mathrm{P_i}(1)$ и $\mathrm{P_i}(2)$, где $\mathrm{i} = 1{,}2$

Формулы определения вероятностей состояний на 1-ом и 2-ом шаге

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^{n} P_j(k-1) P_{ji}\ , \quad \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{n}}$$

1-й шаг

в общем виде для 1-го шага:

$$P_i(1) = \sum_{j=1}^{2} P_j(0) \cdot P_{ji} \qquad i = \overline{1{,}2}$$

$$P_1(1) = P_1(0) P_{11} + P_2(0) P_{21},$$
$$P_2(1) = P_1(0) P_{12} + P_2(0) P_{22}$$

2-й шаг

в общем виде для 2-го шага:

$$P_i(2) = \sum_{j=1}^{2} P_j(1) P_{ji}\ , \ i = \overline{1{,}2}$$

$$P_1(2) = P_1(1) P_{11} + P_2(1) P_{21},$$
$$P_2(2) = P_1(1) P_{12} + P_2(1) P_{22}$$

Пример расчета ДМП (результат)

$$\overline{P}(1) = (0{,}7,\ \ 0{,}3)\begin{Vmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{Vmatrix} = (0{,}32,\ \ 0{,}68),$$

$$\overline{P}(2) = \sum_{j=1}^{n} P_j(1)P_{ji} = (0{,}32,\ \ 0{,}68)\begin{Vmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{Vmatrix} = (0{,}472,\ \ 0{,}528),$$

$$\overline{P}(3) = \sum_{j=1}^{n} P_j(2)P_{ji} = (0{,}472,\ \ 0{,}528)\begin{Vmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{Vmatrix} = (0{,}411,\ \ 0{,}589),$$

$$\overline{P}(4) = \sum_{j=1}^{n} P_j(3)P_{ji} = (0{,}411,\ \ 0{,}589)\begin{Vmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{Vmatrix} = (0{,}436,\ \ 0{,}564).$$

Предельные вероятности состояний ДМП

Основные определения

- Состояние называется **возвратным**, если вероятность возвращения марковского процесса в данное состояние, при выходе из него, равна единице. Во всех других случаях состояние называется **невозвратным**.
- Марковский процесс называется **эргодическим**, если все состояния процесса являются возвратными, т.е.

$k \longrightarrow \infty$

K P_i	0	1	2	3	4				∞
$P_1(K)$	0.7	0.32	0.472	0.411	0.436	0.413		0.41	0.41
$P_2(K)$	o.3	0.68	0.528	0.589	0.564	0.585		0.59	0.59

Теорема Маркова:

Для эргодических марковских процессов справедлива **теорема Маркова**: если в системе протекает эргодический марковский процесс и число состояний процесса конечно, то существует

$$\lim_{k \to \infty} P_i(k) = P_i \qquad i = \overline{1, n}$$

Вычисление предельных вероятностей состояния ДМП

Подставив P_i в

$$P_i(k)=\sum_{j=1}^{n} P_j(k-1)P_{ji}(k), \quad i=\overline{1,n}$$

получаем

$$P_i=\sum_{j=1}^{n} P_j P_{ji}, \qquad \mathbf{i}=\overline{\mathbf{1,n}}.$$

Приведенная система уравнений имеет одно линейно зависимое уравнение.

Решение системы линейных уравнений совместно с условием

$$\sum_{j=1}^{n} P_j = 1,$$

определяет предельные вероятности состояний дискретного марковского процесса.

Эта вероятность представляет собой долю времени пребывания системы в данном состоянии.

Предельных вероятности состояния

K / P_i	0	1	2	3	4				∞
$P_1(K)$	0.7	0.32	0.472	0.411	0.436	0.413		0.41	0.41
$P_2(K)$	о.3	0.68	0.528	0.589	0.564	0.585		0.59	0.59

Следовательно:

$P_1 = 0.41$

$P_2 = 0.59$

Непрерывные марковские процессы

Непрерывные марковские процессы

Случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем будем называть **дискретными**, а случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем - **непрерывными**.

Основная задача: определить вероятности всех состояний

$$P_i(t),\ i=\overline{1,n}.$$

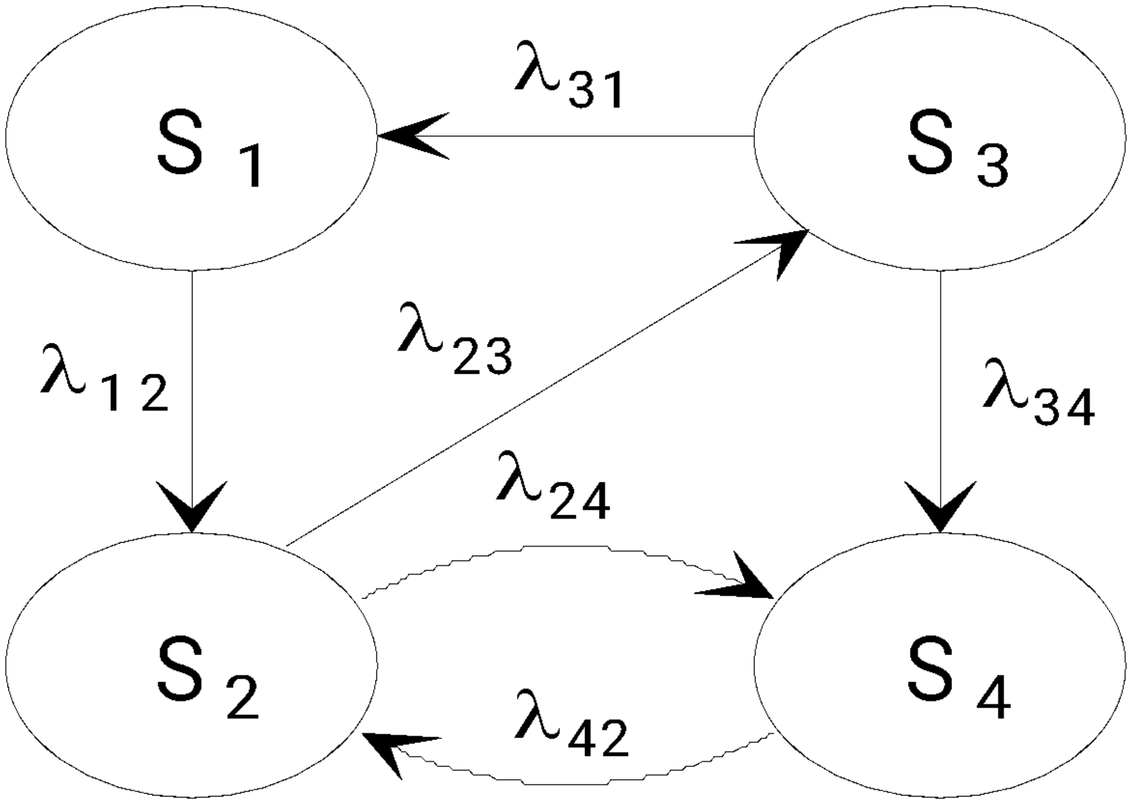
для любого момента времени t.

Т.к. для любого момента времени все состояния системы образуют полную группу несовместных событий, то

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1$$

Размеченный граф состояний непрерывного марковского процесса

Для определения этих вероятностей необходимо знать интенсивности переходов λ_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$ аналогичные переходным вероятностям для дискретного марковского процесса. Показано, что зная λ_{ij} и исходное распределение вероятностей состояний $P_i(0)$, $i = \overline{1, n}$, можно определить вероятности состояний $P_i(t)$, $i = \overline{1, n}$.



Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Вычисление $P_i(t)$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{31}P_3(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda_{23}P_2(t) - \lambda_{24}P_2(t) + \lambda_{42}P_4(t) + \lambda_{12}P_1(t)$$

$$\frac{dP_3}{dt} = -\lambda_{31}P_3 - \lambda_{34}P_3 + \lambda_{23}P_2$$

$$\frac{dP_4}{dt} = -\lambda_{42}P_4 + \lambda_{24}P_2 + \lambda_{34}P_3$$

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний (продолжение)

Приведенная система уравнений имеет одно линейно зависимое.

Очевидно, что эти уравнения являются системой линейных дифференциальных уравнений, описывающих динамику рассматриваемого вероятностного процесса. Для решения этой системы уравнений одно из уравнений необходимо отбросить и заменить его условием $\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1$.

Решение этой системы представляет собой вероятности состояний как функции времени $P_i(t)$, $i = \overline{1,n}$.

Чтобы решить систему уравнений Колмогорова, надо задать начальные условия $P_i(0)$.

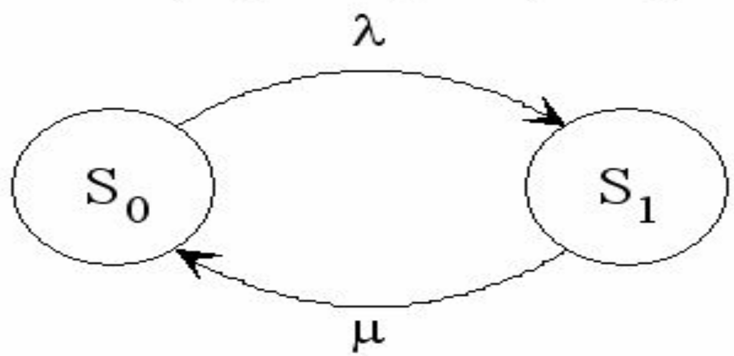
Правило составления ДУК

Число уравнений равно числу состояний. В левой части каждого уравнения стоит производная вероятности состояния, а правая часть содержит столько членов, сколько дуг инцидентно соответствующей вершине графа. Если стрелка направлена из вершины, соответствующий член уравнения имеет знак "минус", если в вершину — знак "плюс". Каждый член уравнения равен произведению интенсивности перехода, соответствующей данной дуге, умноженной на вероятность того состояния, из которого исходит эта дуга.

Это правило составления является общим и справедливо для любого непрерывного марковского процесса.

Пример 1

Рассмотрим пример системы, обладающей двумя состояниями, размеченный граф которой приведен на рисунке.



Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\mu P_1(t) + \lambda P_0(t).$$

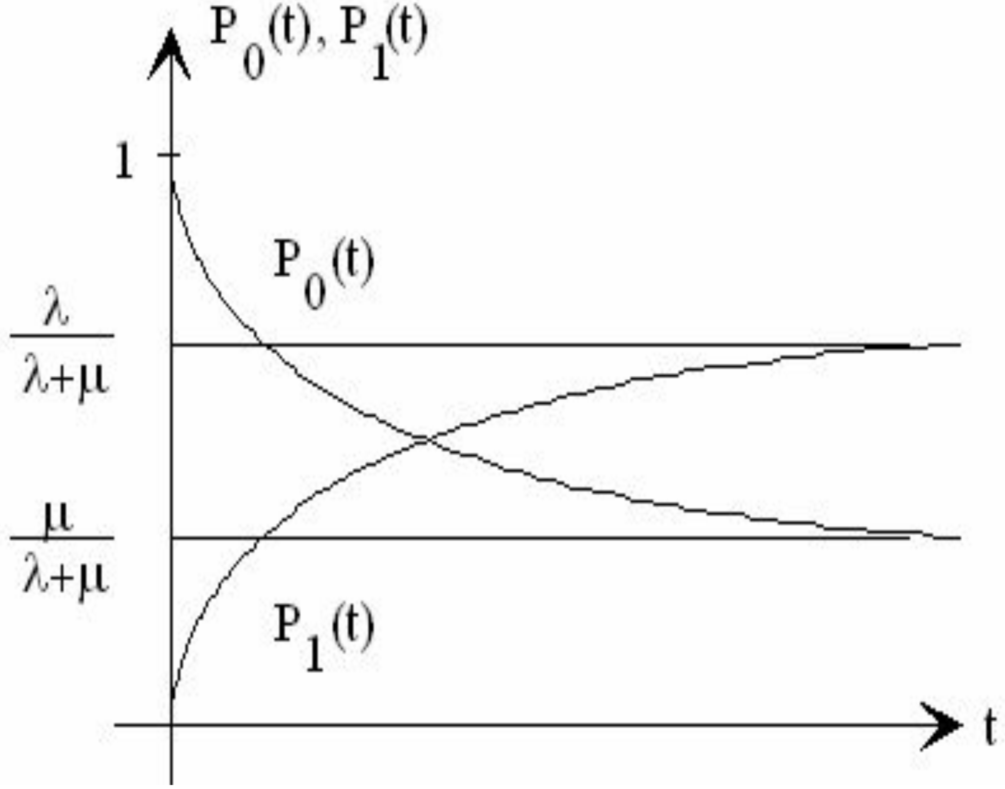
Решаем этой системы уравнений, при $P_0(0)=1;\ P_1(0)=0$, является:

$$P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Пример 1 (продолжение)

Если предположить, что $\lambda > \mu$, то зависимость $P_0(t)$ и $P_1(t)$ имеет вид:



Теорема Маркова для непрерывного марковского процесса.

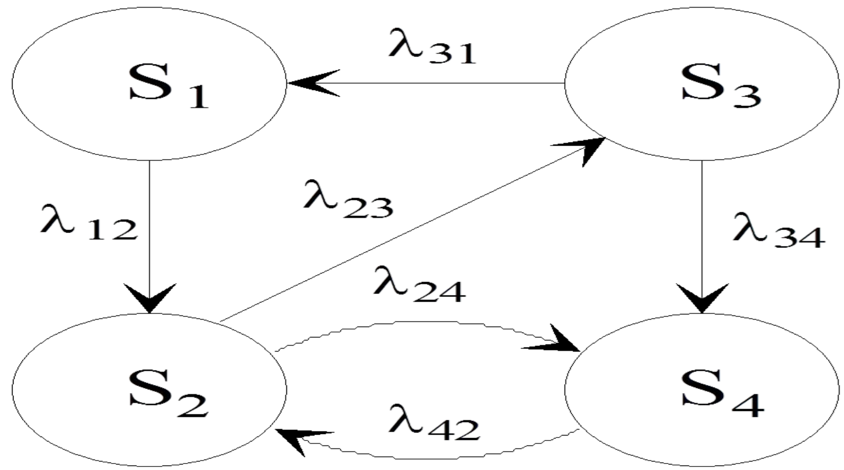
По теореме Маркова для эргодического непрерывного марковского процесса, как и для дискретного, существует стационарный режим при $t \to \infty$, т.е. существует

$$\lim P_i(t) = P_i$$

где P_i - предельные вероятности постоянны и не зависят от начального состояния системы

Эти вероятности представляют собой долю времени пребывания системы в соответствующем состоянии

Уравнения баланса потоков



Система ЛУ, полученная из системы ДУК заменой левых частей на 0

$$0 = -\lambda_{12}P_1 + \lambda_{31}P_3$$
$$0 = -\lambda_{24}P_2 - \lambda_{23}P_2 + \lambda_{12}P_1 + \lambda_{42}P_4$$
$$0 = -\lambda_{31}P_3 - \lambda_{34}P_3 + \lambda_{23}P_2$$
$$0 = -\lambda_{42}P_4 + \lambda_{24}P_2 + \lambda_{34}P_3$$

Уравнения баланса потоков

$$\lambda_{12}P_1 = \lambda_{31}P_3$$
$$\lambda_{24}P_2 + \lambda_{23}P_2 = \lambda_{12}P_1 + \lambda_{42}P_4$$
$$\lambda_{31}P_3 + \lambda_{34}P_3 = \lambda_{23}P_2$$
$$\lambda_{42}P =_4 \lambda_{24}P_2 + \lambda_{34}P_3$$

Свойство уравнения баланса потоков. Суммарный вероятностный входной поток состояния равен суммарному вероятностному выходному потоку соответствующего состоянию

Правило составления уравнений баланса потоков

1. Число уравнений равно числу состояний.

2. Левая часть каждого уравнения содержит вероятностный выходной поток соответствующего состояния, а правая часть каждого уравнения содержит вероятностный входной поток соответствующего состояния. Число членов уравнения равно числу дуг инцидентных соответствующей вершине.

3. Каждый член уравнения равен произведению интенсивности перехода соответствующей дуги на предельную вероятность состояния, из которого эта дуга исходит

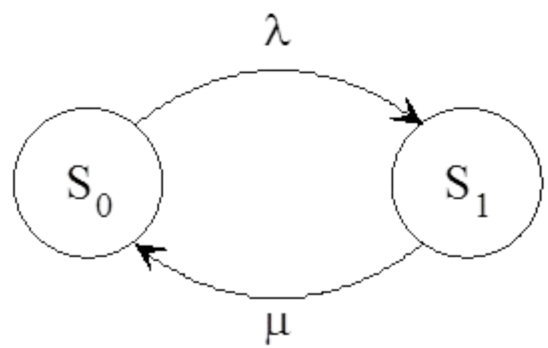
Вычисление предельных вероятностей состояний

Уравнения баланса потоков представляют собой систему линейных уравнений. Эта система имеет одно линейно зависимое уравнение и, поэтому, имеет бесконечное множество решений. Для определения предельных вероятностей состояний Pi (i=1,..n) необходимо отбросить одно любое уравнение и вместо него использовать нормировочное уравнение:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

Пример.

Задан размеченный граф состояний непрерывного марковского процесса



Определить предельные вероятности состояний P_0 и P_1

Решение

Уравнения баланса потоков:

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0,$$

$$-\mu P_1 + \lambda P_0 = 0$$

Нормировочное уравнение:

$$P_0 + P_1 = 1.$$

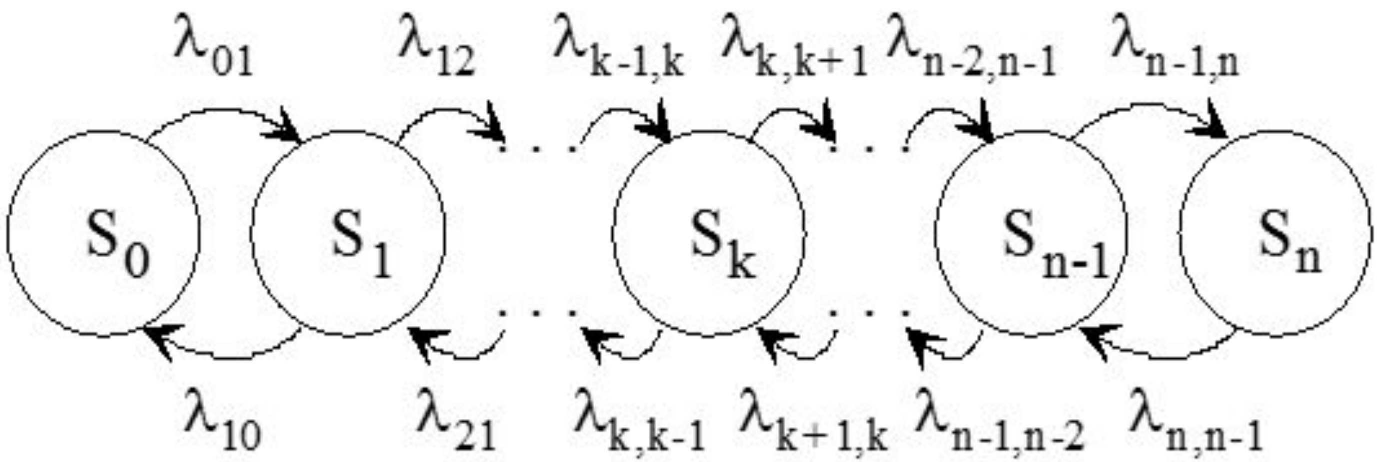
Решение: отбросим первое уравнение

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Процесс гибели и размножения

Непрерывный Марковский процесс называется процессом гибели и размножения, если его размеченный граф состояний представляет собой схему, как на рисунке:



Уравнения баланса потоков для схемы гибели и размножения

В стационарном режиме уравнения баланса потоков (система линейных алгебраических уравнений):

$$\lambda_{01}P_0 = \lambda_{10}P_1,$$

$$\lambda_{10}P_1 + \lambda_{12}P_1 = \lambda_{01}P_0 + \lambda_{21}P_2,$$

$$\lambda_{23}P_2 + \lambda_{21}P_2 = \lambda_{12}P_1 + \lambda_{32}P_3,$$

$$\lambda_{34}P_3 + \lambda_{32}P_3 = \lambda_{23}P_2 + \lambda_{43}P_4,$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\lambda_{n,n-1}P_n = \lambda_{n-1,n}P_{n-1}.$$

Нормировочное уравнение:

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = 1.$$

Вычисление предельных вероятностей состояний методом подстановки

Выразим все P_i через P_0, для этого:

Из первого уравнения имеем $P_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} P_0$,

из второго имеем: $P_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} P_1$,

с учетом P_1 $P_2 = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} P_0$.

По индукции $P_n = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\ldots\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}} P_0$.

Все P_i, $i = \overline{1,n}$ подставим в нормировочное уравнение и определим P_0:

$$P_0 = \left[1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}\cdots\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{n,n-1}\cdots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right]^{-1}.$$