ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Курс читает: к.т.н., доцент
Журавлев Илья Александрович

План курса

1.Комплексные числа (напоминание).

2.Общие сведения о системах управления.

3. Математические модели.

4. Типовые динамические звенья.

5. Структурные схемы.

6. Анализ систем автоматического управления

Комплексные числа

$z = x + i \cdot y$

$$z = x + i \cdot y$$

$z = x + i \cdot y$

$$z = x + i \cdot y$$

$z = x + i \cdot y$

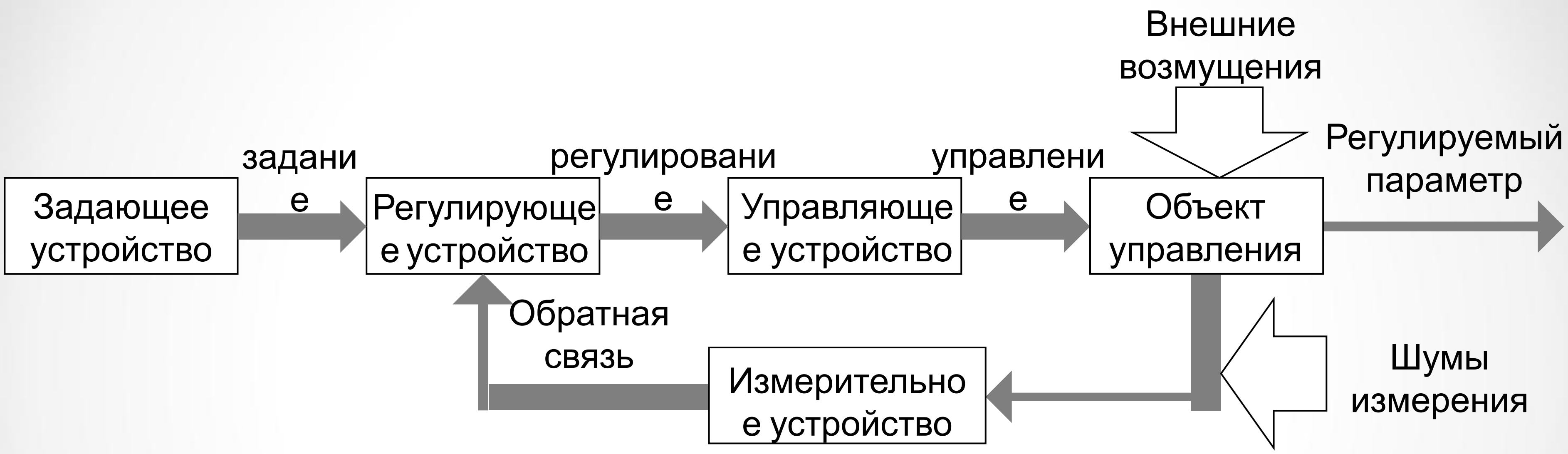
$$z = x + i \cdot y$$

Теория автоматического управления (ТАУ):

1. Принцип управления (как нужно управлять).
2. Математические модели.
3. Устойчивость работы.
4. Качество управления.

Общие сведения о системах управления

Система управления
(из чего состоит?)

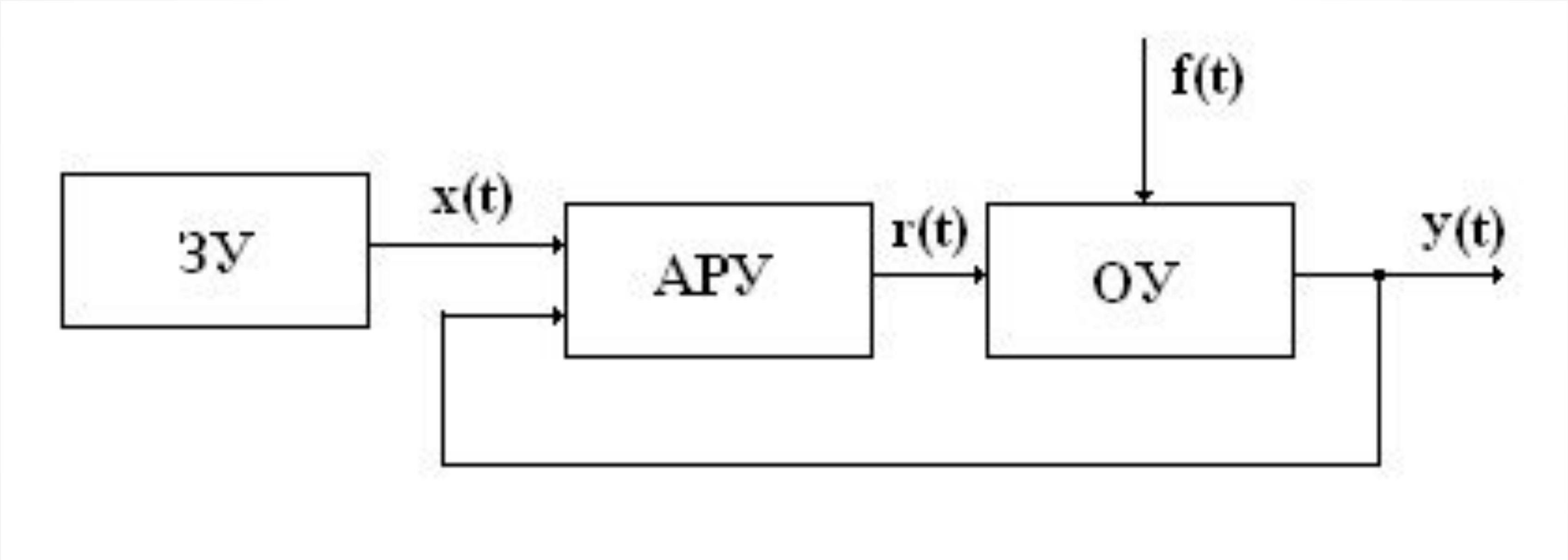


Система управления (регулятор)

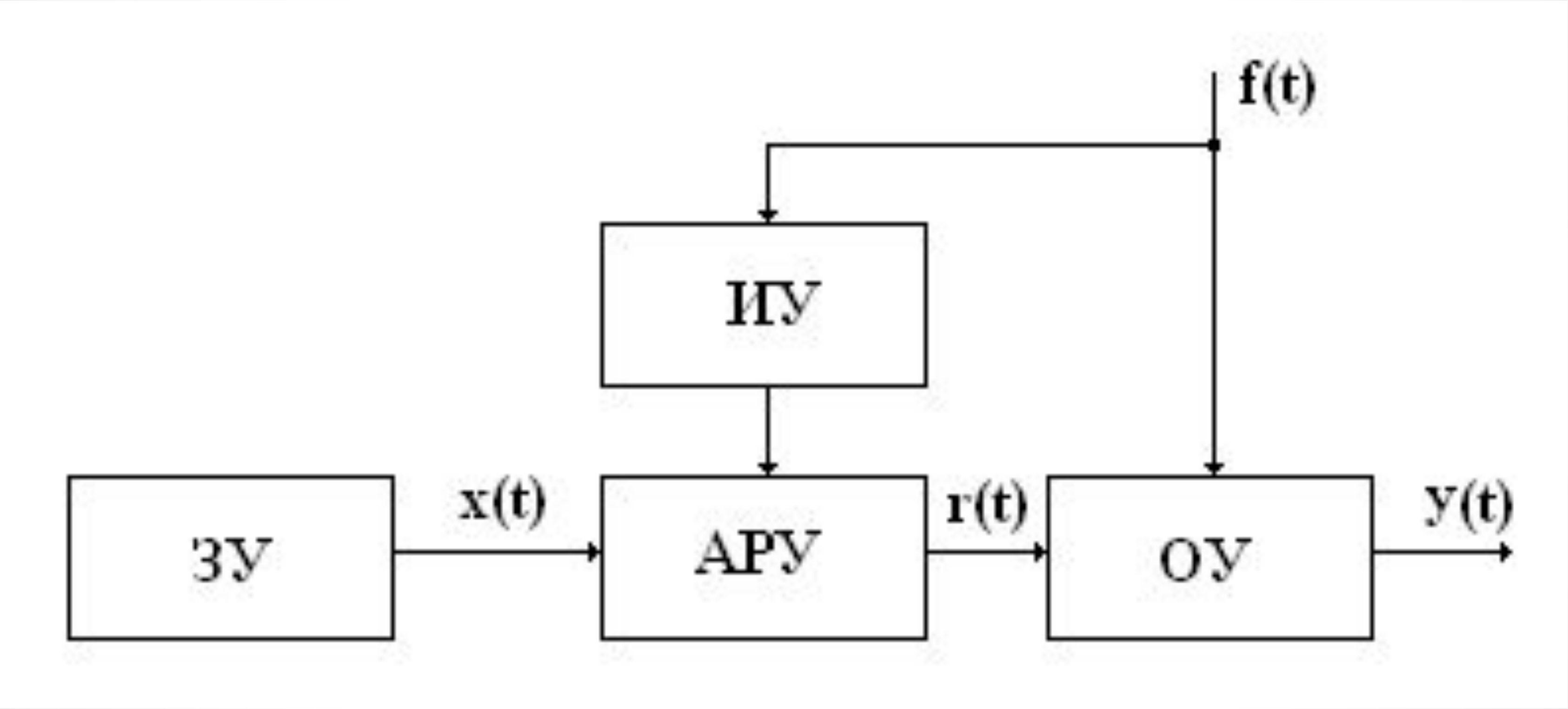
Система управления (из чего состоит?)

Задающее устройство	Задающее воздействие
Регулирующее устройство	Регулирование
Управляющее устройство	Управление
Объект управления	Регулируемый параметр
Измерительное устройство	Сравнивающее устройство

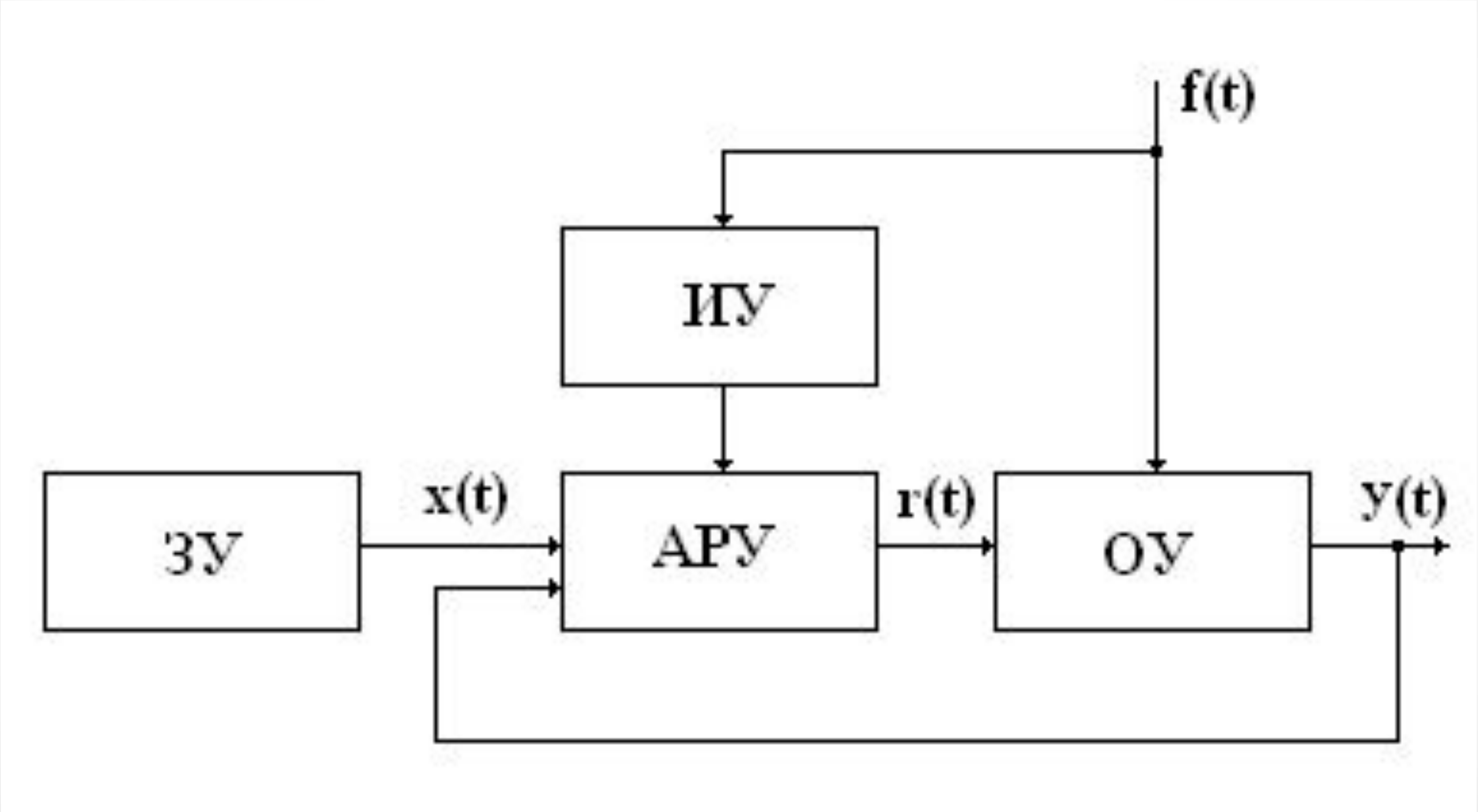
Классификация систем управления (СУ по отклонению)



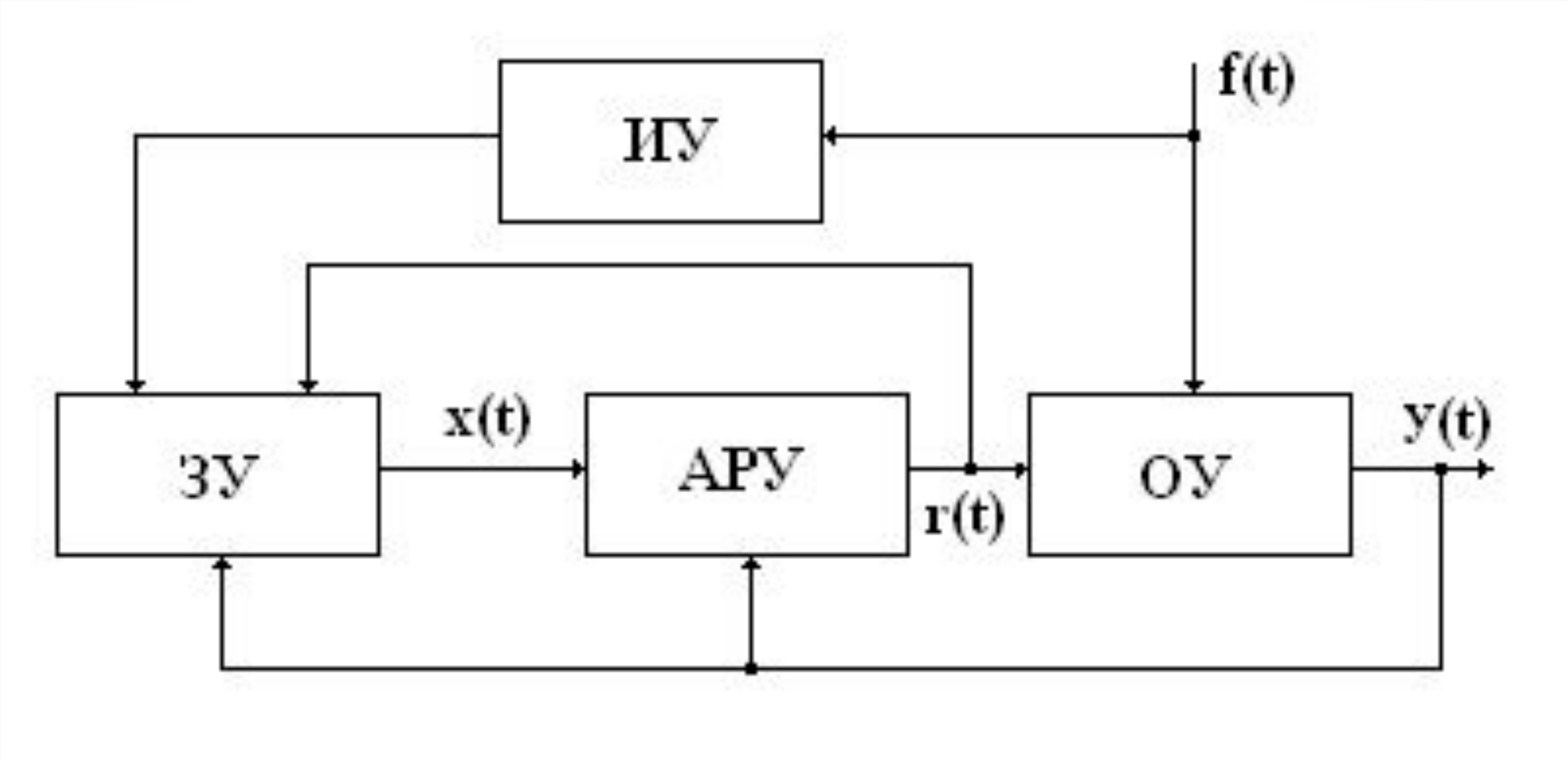
Классификация систем управления (СУ по возмущению)



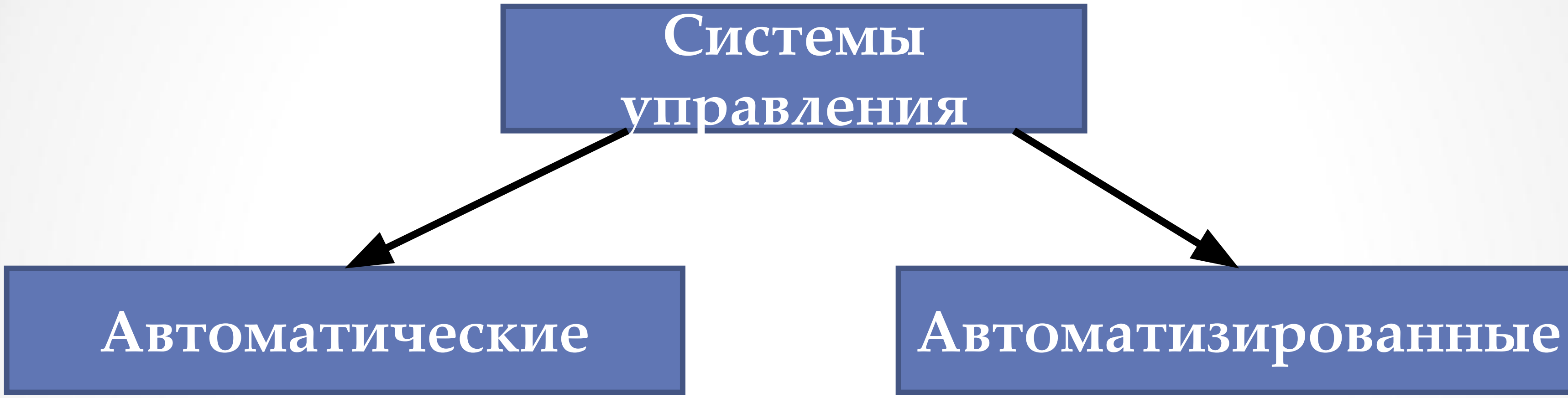
Классификация систем управления (СУ с комбинированным управлением)



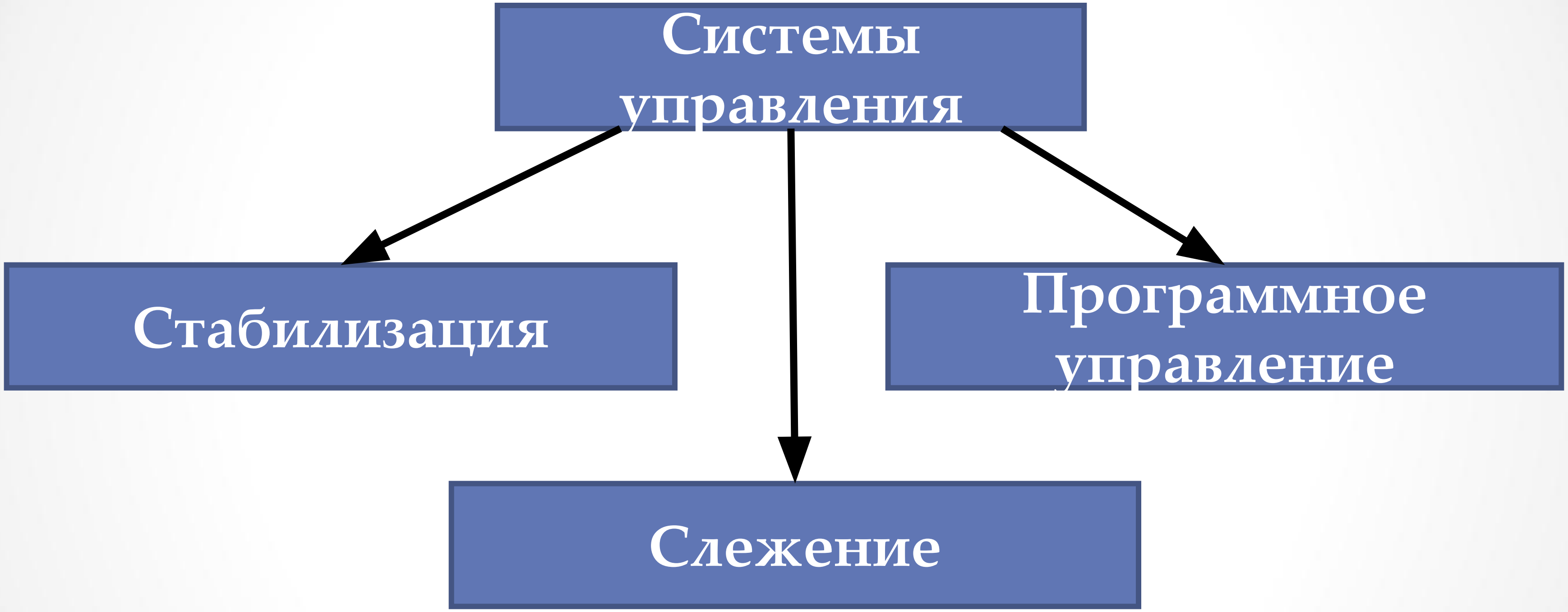
Классификация систем управления (адаптивная СУ)



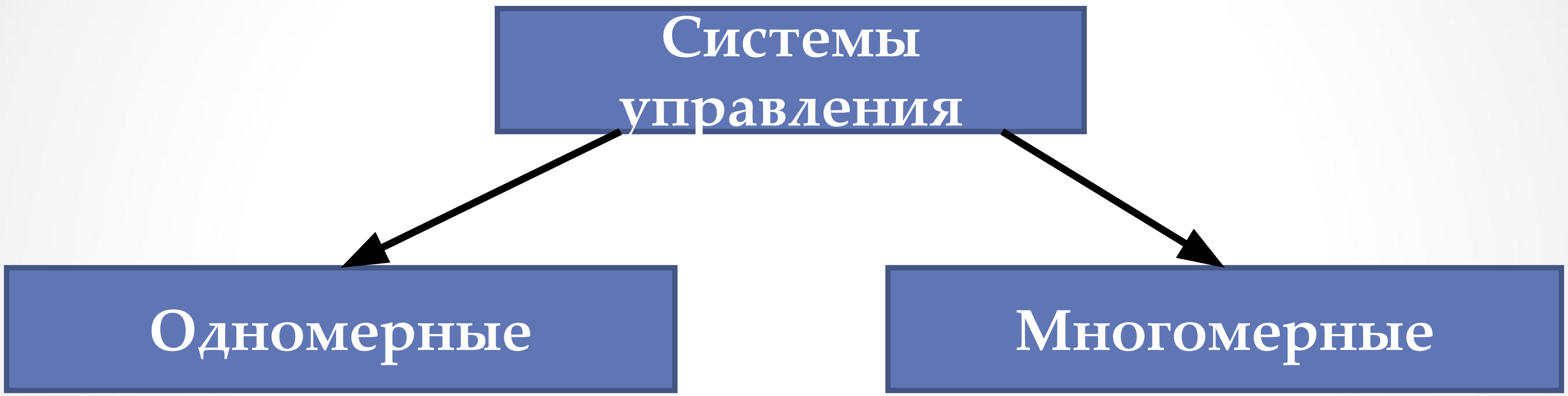
Классификация систем управления (Уровень автоматизации)



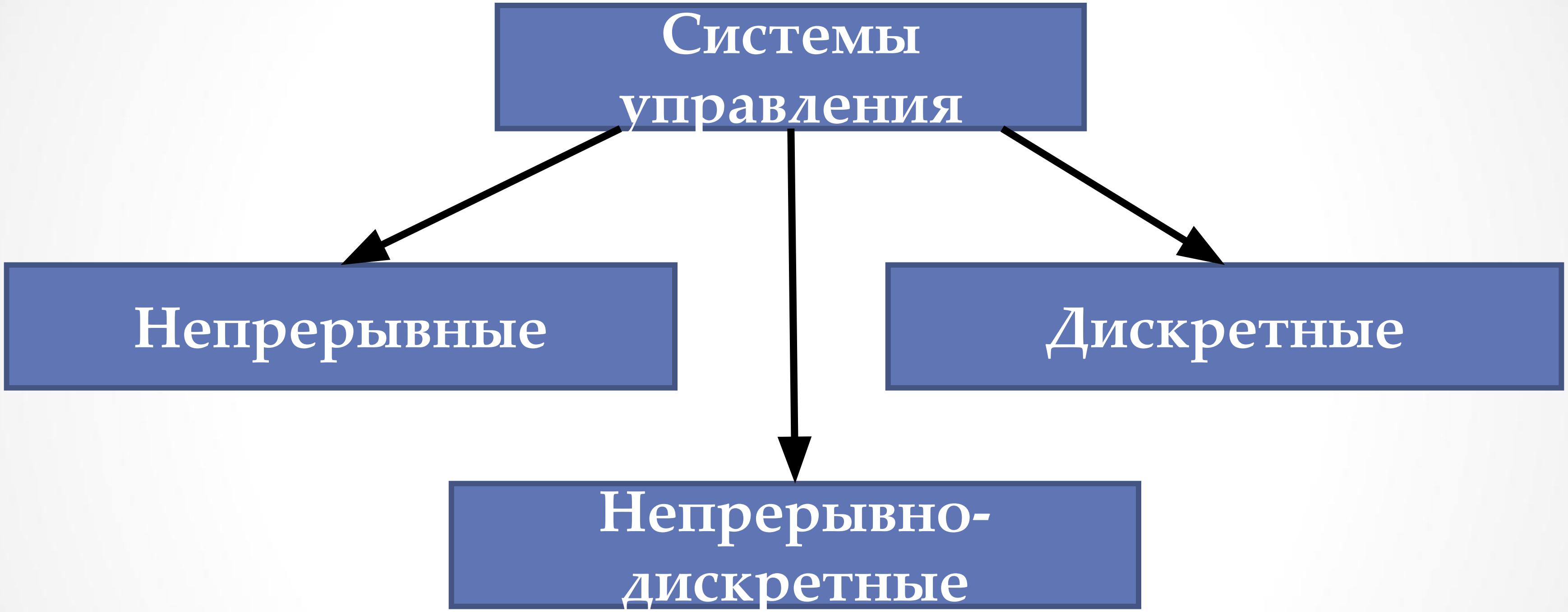
Классификация систем управления (Задачи систем управления)



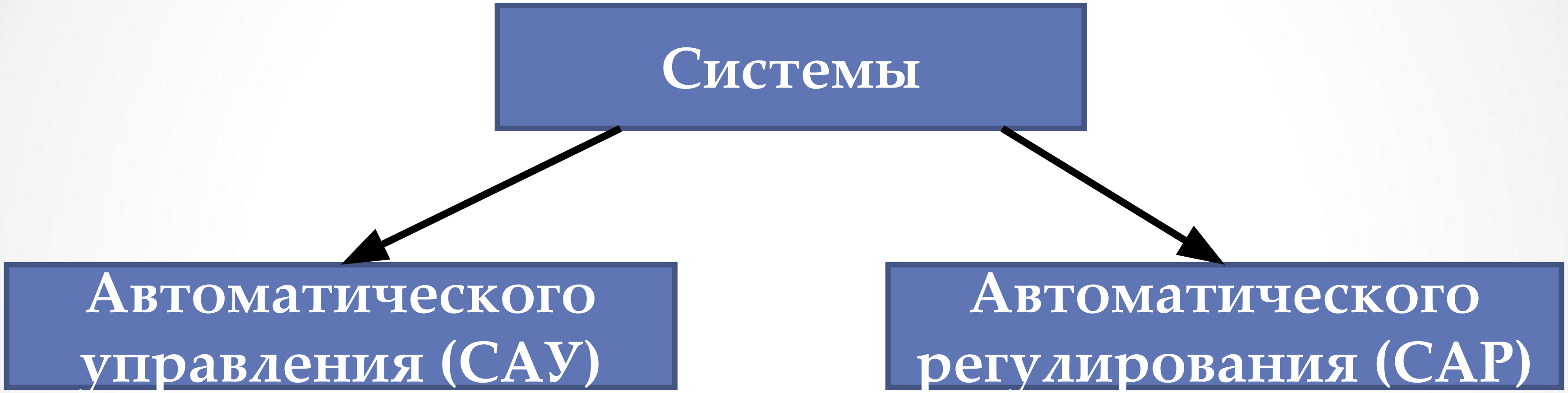
Классификация систем управления (По количеству входов и выходов)



Классификация систем управления (Характер сигналов системы)



Классификация систем управления (Характер сигналов системы)

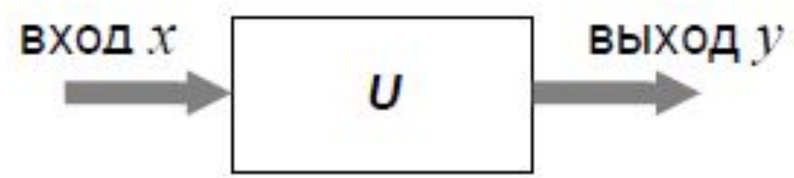


Математические модели

Линейность и нелинейность

Цель любого управления – изменить состояние объекта нужным образом.

Модель – это объект, который используется для изучения другого объекта (оригинала).



Оператор

Линейный | **Нелинейный**

Свойства:

$$U[\alpha \cdot x] = \alpha \cdot U[x]$$

$$U[x_1 + x_2] = U[x_1] + U[x_2]$$

Описание элементов

Режимы

Статический | **Динамический**

Способы описания динамических свойств:

-Дифференциальные уравнения;

-Передаточные функции $W(p)$;

-Временные функции;

-Частотные характеристики.

Дифференциальные уравнения

$$a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_2 x^{(2)}(t) + b_1 x^{(1)}(t) + a_0 x(t)$$

Здесь:

$y(t)$ – временная функция выходного сигнала;

$x(t)$ – временная функция входного сигнала;

$y^{(j)}(t)$ – j-я производная функции $y(t)$;

$x^{(j)}(t)$ – j-я производная функции $x(t)$;

a_m, b_m – постоянные коэффициенты уравнения при соответствующих переменных.

Передаточная функция

Передаточная функция *W(p)* есть отношение выходного сигнала к входному сигналу, представленное в операторной форме:

$$W(p) = \frac{\textit{выход}}{\textit{вход}} = \frac{y(p)}{x(p)}$$

Заменим *d/dt* на оператор Лапласа – *p* и получим:

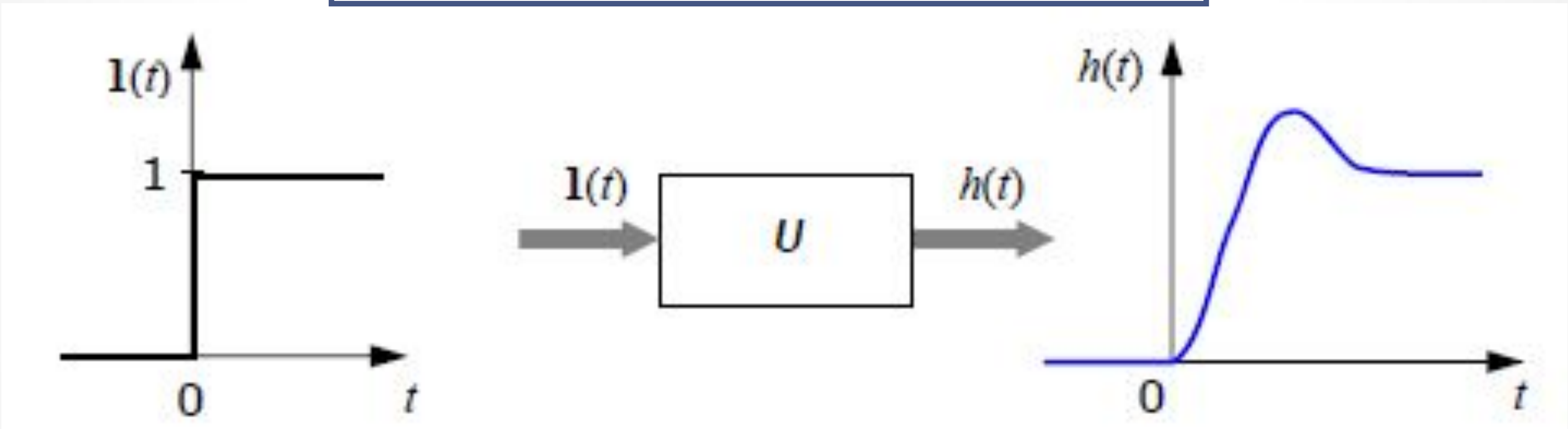
$$W(p) = \frac{\textit{выход}}{\textit{вход}} = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_2 p^2 + b_1 p^1 + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p^1 + a_0}$$

$$= \frac{(b_0 / a_0) \cdot (b_2 / b_0 p^2 + b_1 / b_0 p^1 + 1)}{a_2 / a_0 p^2 + a_1 / a_0 p^1 + 1}$$

Переходная характеристика

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Единичный ступеньчатый сигнал

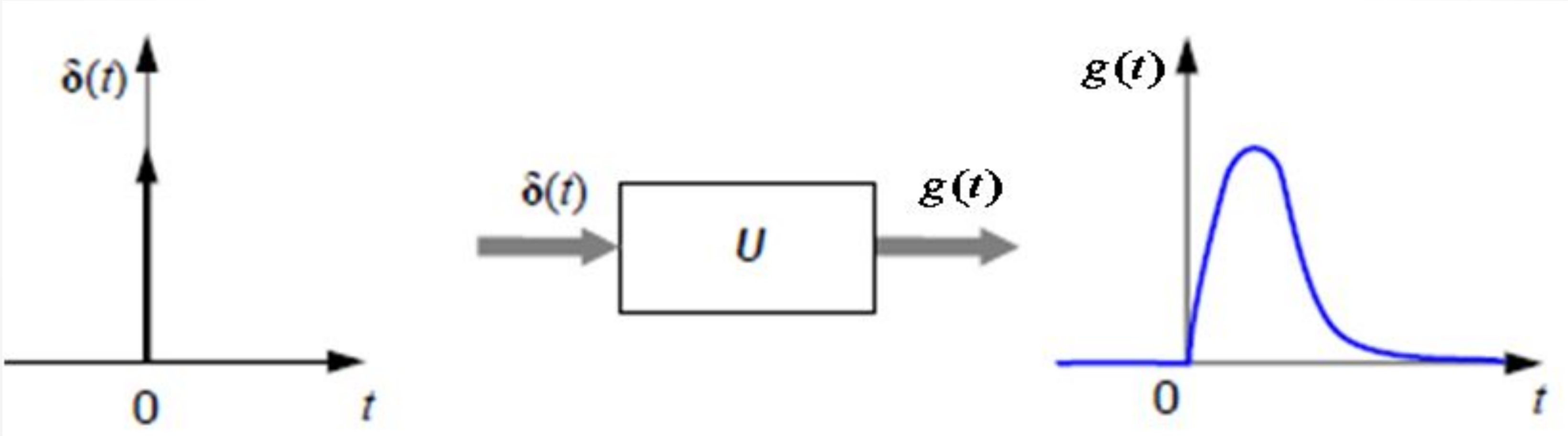


$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} \Rightarrow L\{h(t)\} = H(p) = W(p) \cdot \frac{1}{p}$$

Импульсная характеристика (весовая функция)

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1.$$

Единичный импульсный сигнал



$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} \Rightarrow L\{g(t)\} = G(p) = W(p)\cdot 1$$

Разложение дроби на сумму элементарных дробей

Имеем рациональную дробь $R(x)$ вида:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + a_m},$$

где степени $m>n$.

Дробь такого вида можно представить, притом единственным образом, в виде суммы элементарных дробей:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_n}\frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{l=1}^{m}\sum_{t=1}^{s_m}\frac{B_{lt} + C_{lt}x}{\left(x^2 + p_l x + q_l\right)^t}.$$

где A, B, C — некоторые действительные коэффициенты, обычно вычисляемые с помощью метода неопределённых коэффициентов.

Таблица оригиналов и изображений (обратное/прямое преобразование Лапласа)

$$\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\}=\mathcal{L}\{f_1(t)\}+\mathcal{L}\{f_2(t)\},$$

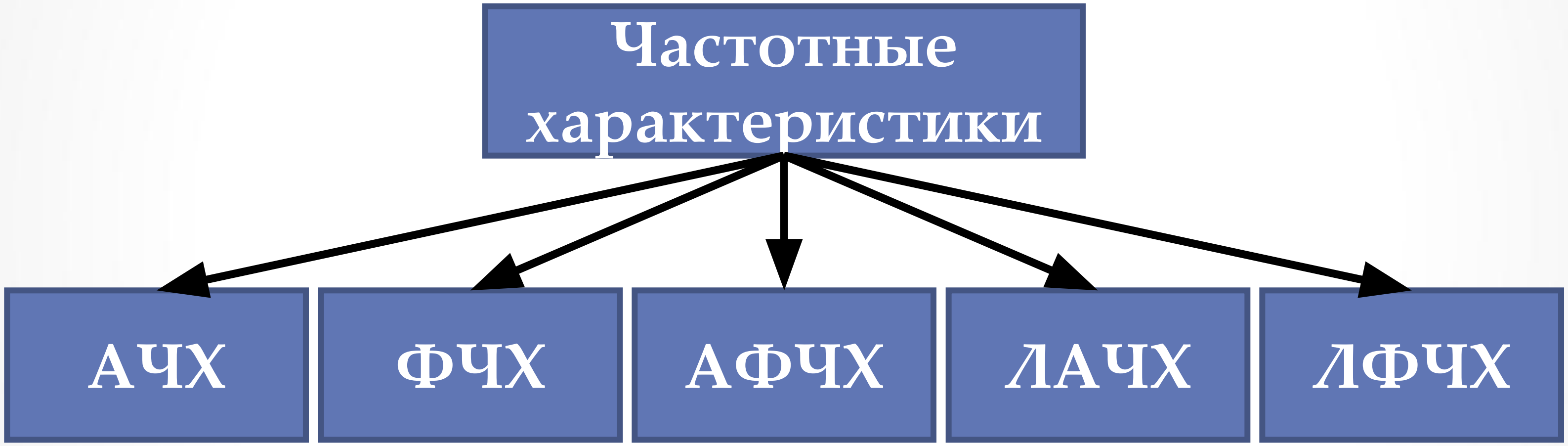
$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)+F_2(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}+\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}.$$

№	**Переход от оригиналов к изображениям (прямое преобразование Лапласа L)**	**Переход от изображений к оригиналам (обратное преобразование Лапласа L^{-1})**
1.	$x(t)\xrightarrow{L}X(p)$	$X(p)\xrightarrow{L^{-1}}x(t)$
2.	$x'(t)\xrightarrow{L}pX(p)-x(0)$	*На практике вряд ли потребуется*
3.	$x''(t)\xrightarrow{L}p^2X(p)-p\cdot x(0)-x'(0)$	*На практике вряд ли потребуется*
4.	$t^n\xrightarrow{L}\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\dfrac{1}{p^n}\xrightarrow{L^{-1}}\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$
5.	$t^ne^{at}\xrightarrow{L}\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\dfrac{1}{(p-a)^n}\xrightarrow{L^{-1}}\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt. \qquad f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)\,e^{st}\,ds$$

Частотные характеристики

Частотные характеристики САУ характеризуют реакцию систем на синусоидальное входное воздействие в установившемся режиме.



$$x(t) = \sin(\omega \cdot t) \;\Rightarrow\; y(t) = A(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi(\omega))$$

Частотные характеристики

Зная передаточную функцию *W(p)*, можно получить амплитудно-фазовую частотную характеристику, путем замены оператора Лапласа – *p* , на мнимое число – *jw*.

$$W(p) \Rightarrow \textit{замена}\ \langle p = j\omega \rangle \Rightarrow W(j\omega)$$

$$W(j\omega) = |W(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \arg(W(j\omega))} = N(\omega) + j \cdot M(\omega)$$ - АФЧХ

$$|W(j\omega)| = A(\omega) = \sqrt{N(\omega)^2 + M(\omega)^2},$$ - АЧХ

$$\arg(W(j\omega)) = \varphi(\omega) = arctg\left(\frac{M(\omega)}{N(\omega)}\right),$$ - ФЧХ

где - $N(\omega) = \mathrm{Re}(W(j\omega));\ M(\omega) = \mathrm{Im}(W(j\omega))$

Логарифмические частотные характеристики

$A(\omega) \Rightarrow L(\omega) = 20 \cdot \lg(A(\omega))$ (Дб) - ось ординат

$\omega \Rightarrow \lg(\omega)$ (Декада) - ось абсцисс

ЛАЧХ

$\varphi(\omega) \Rightarrow (\textit{не меняется})\ \varphi(\omega)$ - ось ординат

$\omega \Rightarrow \lg(\omega)$ (Декада) - ось абсцисс

ЛФЧХ

Свойства:

1) $W_1(\omega) \cdot W_2(\omega) \Rightarrow \begin{cases} L(\omega) = 20 \cdot \lg(A_1(\omega)) + 20 \cdot \lg(A_2(\omega)) \\ \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) \end{cases}$

2) *Асимптотические ЛАЧХ*

Типовые динамические звенья

Усилитель

$W(p) = k$ - Передаточная функция

$h(t) = k$ - Переходная характеристика

$g(t) = k \cdot \delta(t)$ - Импульсная характеристика

$A(\omega) = k$ - АЧХ

$\varphi(\omega) = 0$ - ФЧХ, ЛФЧХ

$L(\omega) = 20 \cdot \lg(k)$ - ЛАЧХ

Апериодическое звено

$$W(p)=\frac{k}{Tp+1}$$ - Передаточная функция

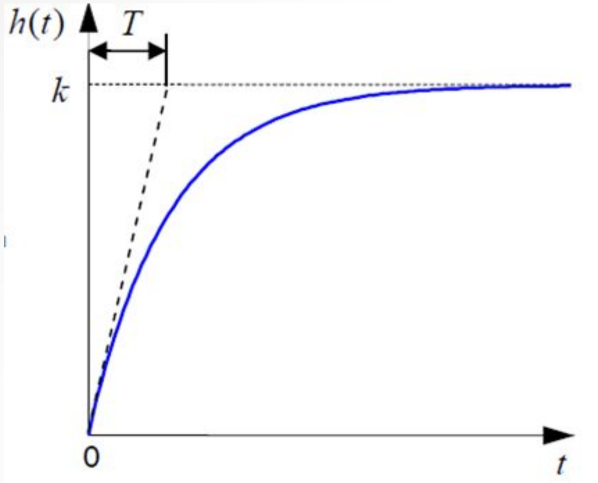
$$h(t)=k\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$ - Переходная характеристика

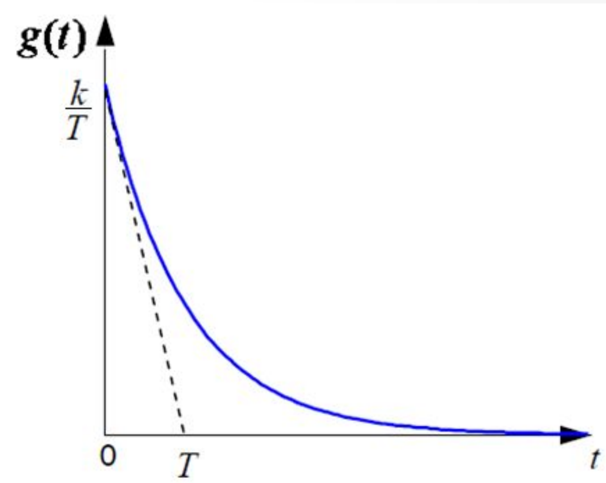
$$g(t)=\frac{k}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}$$ - Импульсная характеристика

$$W(j\omega)=\frac{k}{\sqrt{1+(\omega\cdot T)^2}}\cdot e^{-j\cdot arctg(\omega T)}$$ - АФЧХ

$$L(\omega)=20\cdot\lg(k)-20\cdot\lg(\sqrt{1+(\omega T)^2})$$ - ЛАЧХ

Апериодическое звено

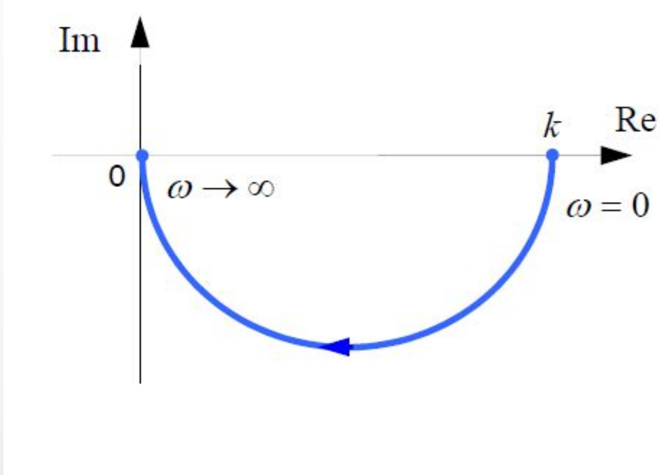


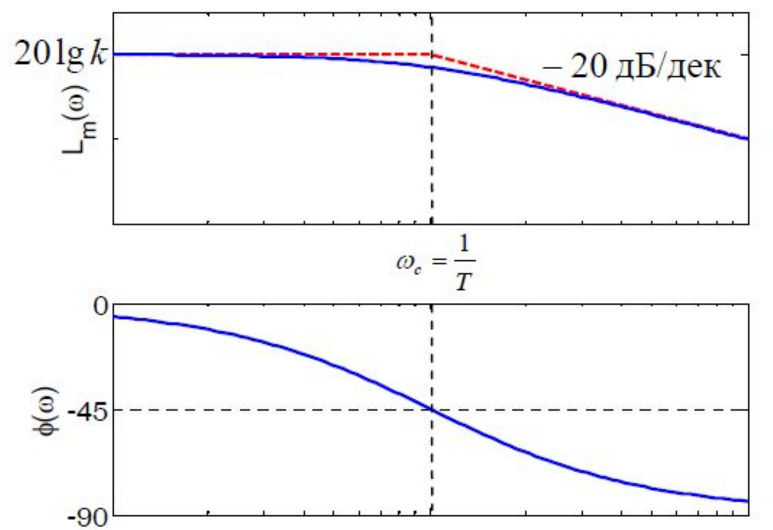


Переходная характеристика

Импульсная характеристика

АФЧХ





ЛАЧХ

ЛФЧХ

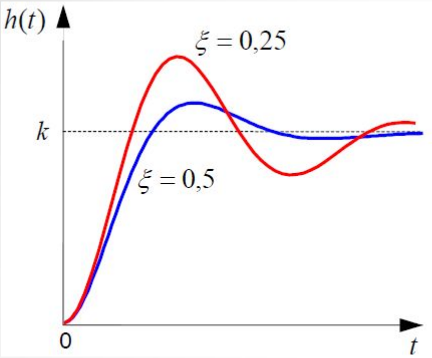
Колебательное звено

$$W(p)=\frac{k}{T^2p^2+2T\xi p+1}$$ - Передаточная функция

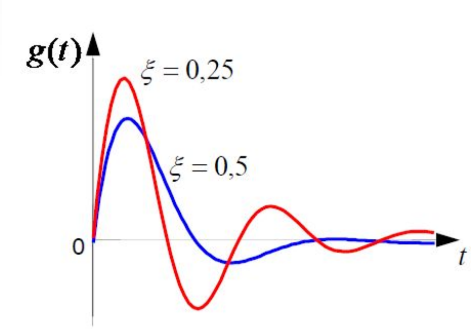
$$W(j\omega)=\frac{k}{\sqrt{\left[1+(\omega\cdot T)^2\right]^2+4(\xi\cdot T\cdot\omega)^2}}\cdot e^{-j\cdot arctg\left(\frac{2\xi\omega T}{1-(\omega T)^2}\right)}$$ - АФЧХ

$$L(\omega)=20\cdot\lg(k)-20\cdot\lg(\sqrt{\left[1-(\omega\cdot T)^2\right]^2+4(\xi\cdot T\cdot\omega)^2})$$ - ЛАЧХ

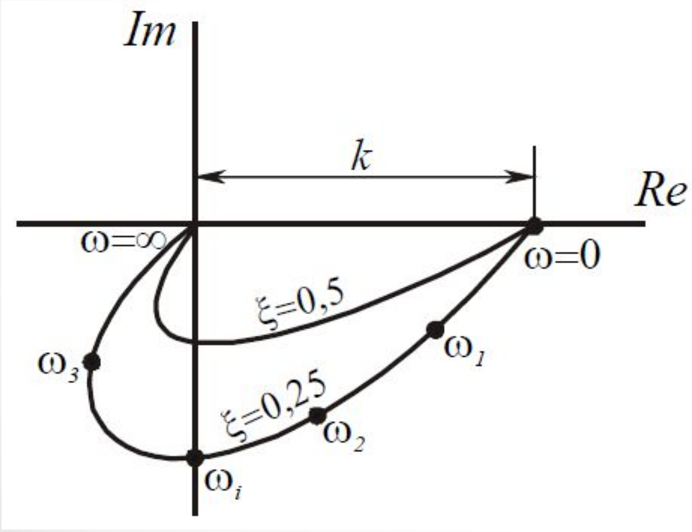
Колебательное звено



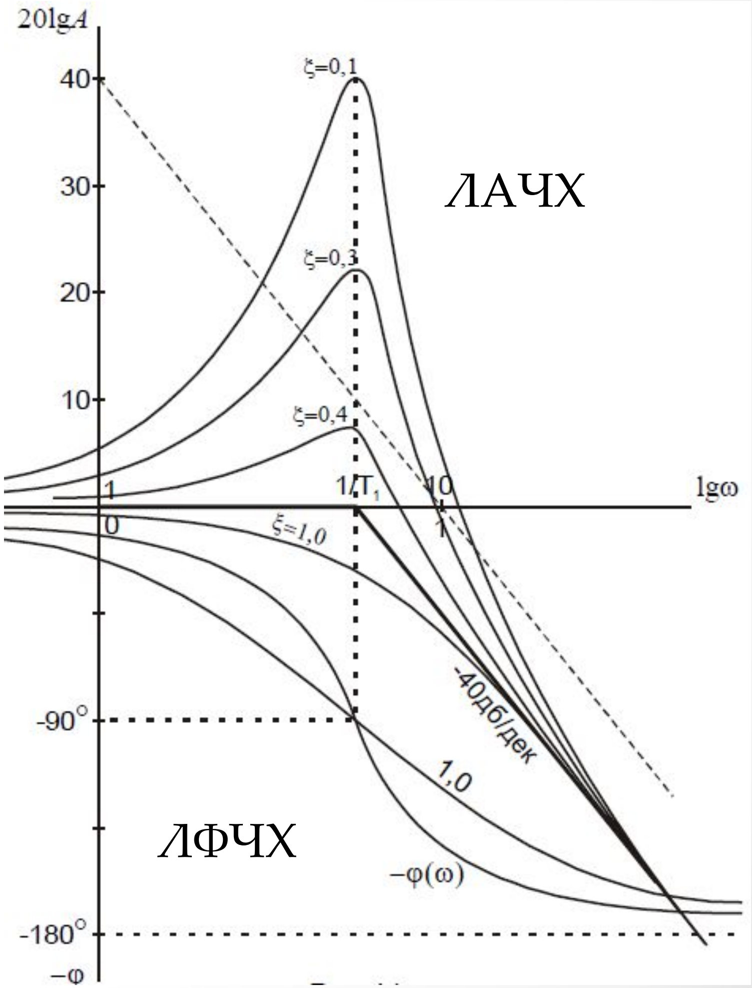
Переходная характеристика



Импульсная характеристика



АФЧХ



Интегрирующее звено

$$W(p) = \frac{k}{p}$$ - Передаточная функция

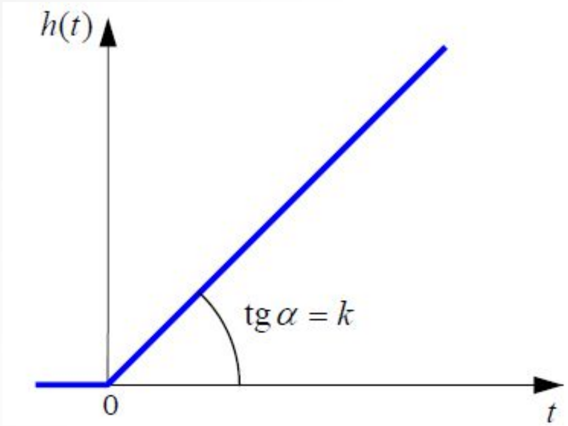
$$h(t) = k \cdot t$$ - Переходная характеристика

$$g(t) = k \quad (npu \;\; t \geq 0)$$ - Импульсная характеристика

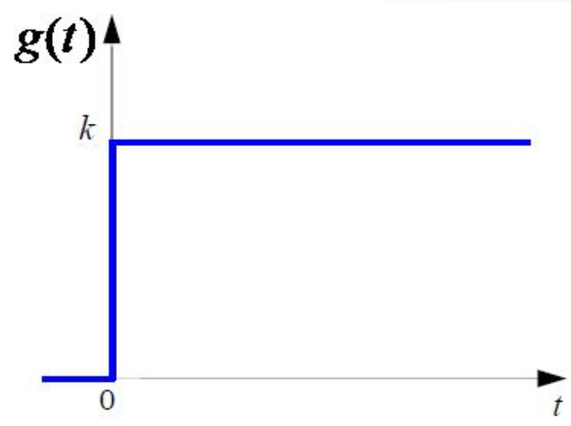
$$W(j\omega) = k \cdot \omega \cdot e^{-j \cdot 90^o}$$ - АФЧХ

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg(k) - 20 \cdot \lg(\omega)$$ - ЛАЧХ

Интегрирующее звено

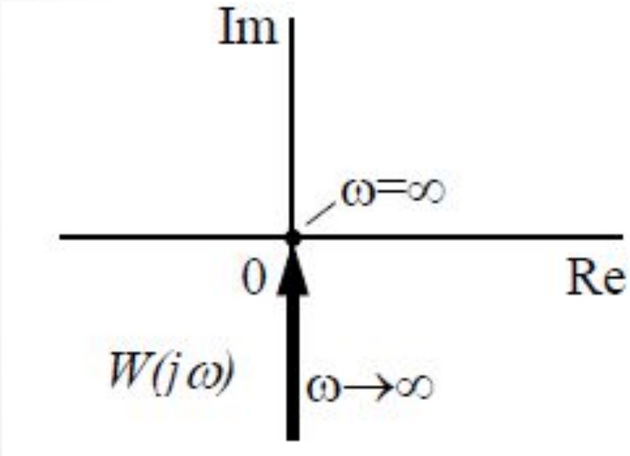


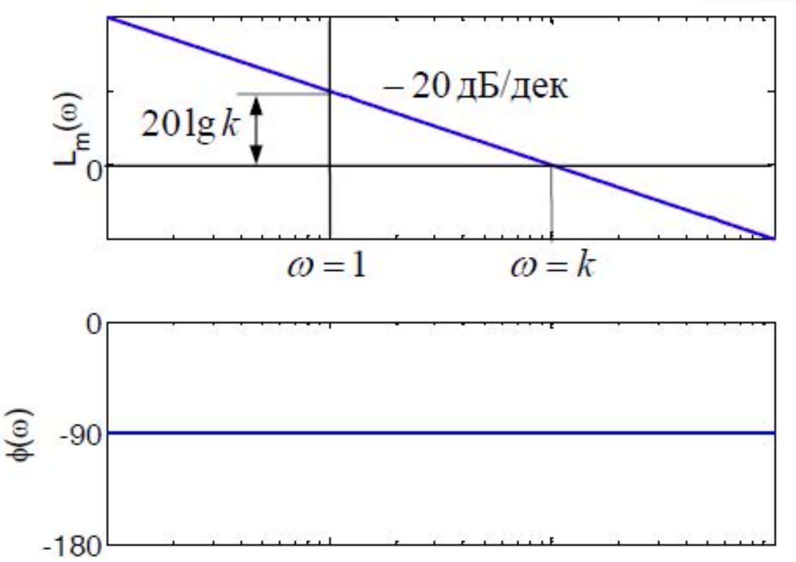
Переходная характеристика



Импульсная характеристика

АФЧХ





ЛАЧХ

ЛФЧХ

Идеально дифференцирующее звено

$$W(p) = k \cdot p$$ - Передаточная функция

Физически не реализуемое, так как звено реагирует не на изменение самой входной величины, а на изменение ее производной, то есть на *тенденцию развития событий.*

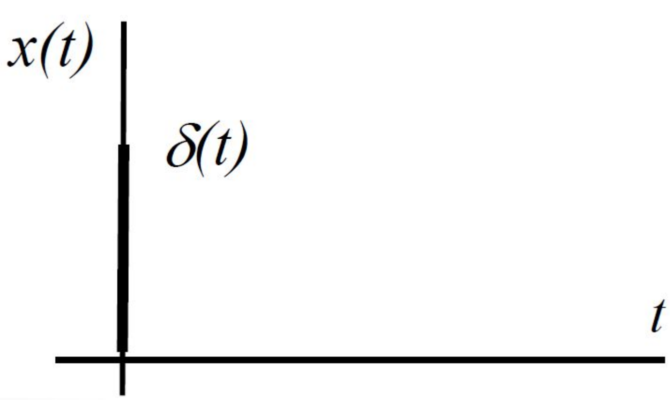
$$h(t) = \delta(t) \cdot k$$ - Переходная характеристика

$$g(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} k$$ - Импульсная характеристика

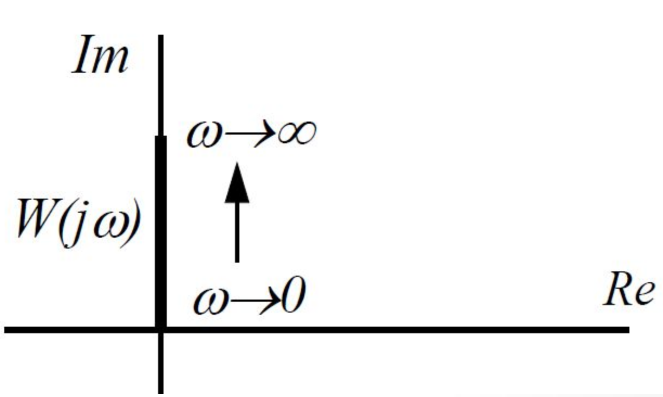
$$W(j\omega) = k \cdot \omega \cdot e^{-j \cdot 90^o}$$ - АФЧХ

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg(k) + 20 \cdot \lg(\omega)$$ - ЛАЧХ

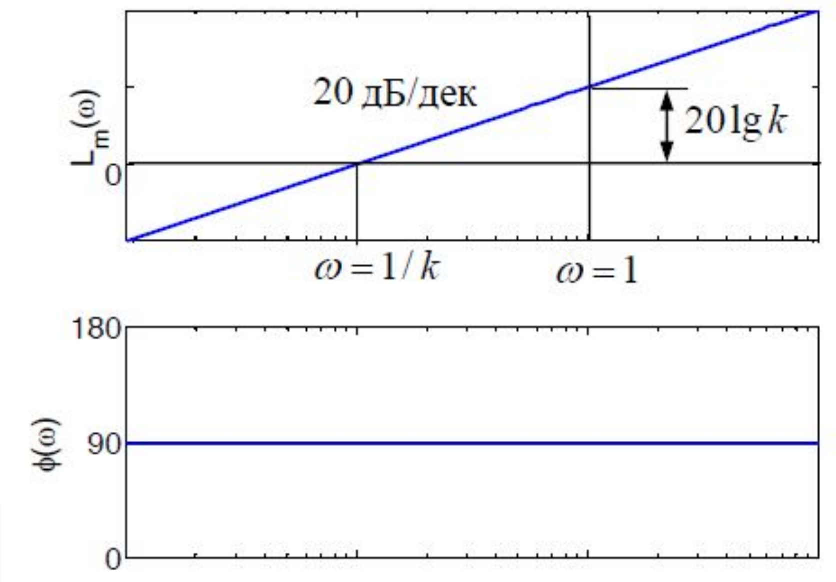
Идеально дифференцирующее звено



Переходная характеристика



АФЧХ



ЛАЧХ

ЛФЧХ

Форсирующее звено

$$W(p) = k \cdot (T \cdot p + 1)$$ - Передаточная функция

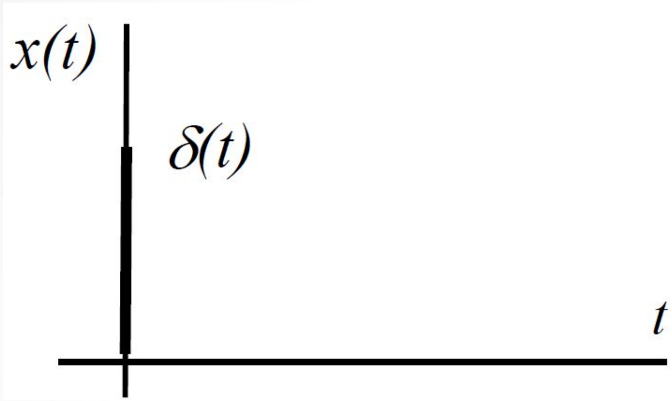
Физически не реализуемое

$$h(t) = k \cdot (T \cdot \delta(t) + 1(t))$$ - Переходная характеристика

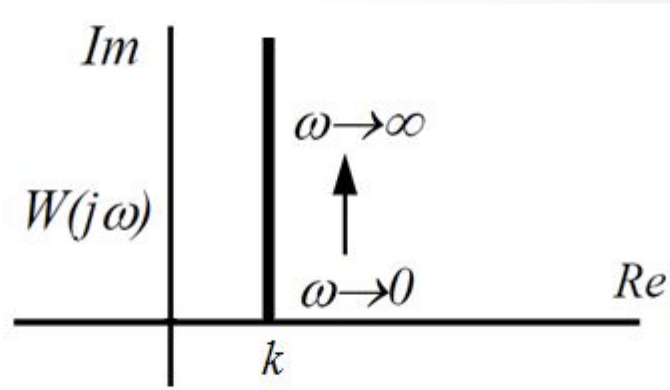
$$W(j\omega) = k\sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2} \cdot e^{j \cdot arctg(\omega T)}$$ - АФЧХ

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg(k) + 20 \cdot \lg(\sqrt{1 + (\omega T)^2})$$ - ЛАЧХ

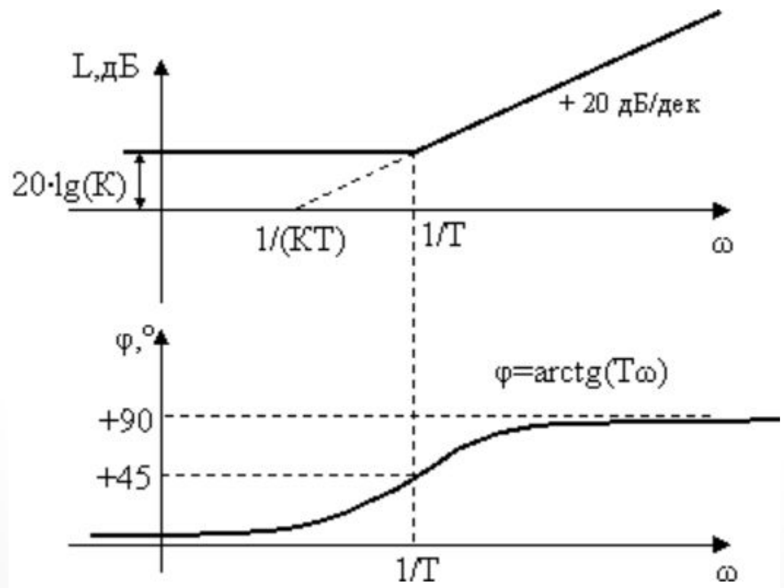
Форсирующее звено



Переходная характеристика



АФЧХ



ЛАЧХ

ЛФЧХ

Построение ЛАЧХ

Рассмотрим звено второго порядка с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)},\ T_1 > T_2 > T_3$$

1)Представим данную передаточную функцию в виде произведения

$$W(p) = k \cdot \frac{1}{(T_1 p + 1)} \cdot (T_2 p + 1) \cdot \frac{1}{(T_3 p + 1)}$$

2)Согласно первому свойству ЛАЧХ, получим:

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg(A_1(\omega)) + 20 \cdot \lg(A_2(\omega)) + 20 \cdot \lg(A_3(\omega)) + 20 \cdot \lg(A_4(\omega))$$

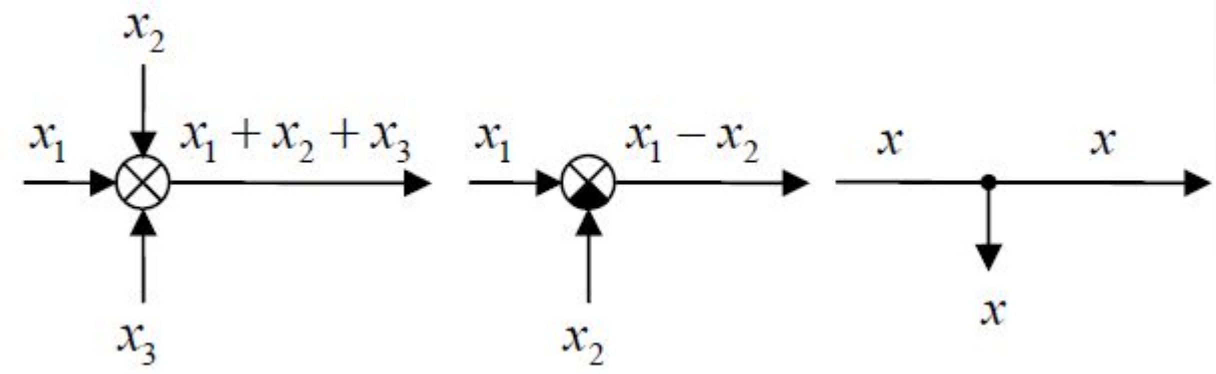
3)Определяем сопрягающие частоты. Частоты на, которых «подключаются» соответствующие звенья.

$$\omega_{c1} = \frac{1}{T_1},\ \omega_{c2} = \frac{1}{T_2},\ \omega_{c3} = \frac{1}{T_3},\ \omega_{c4} = \frac{1}{T_4}.$$

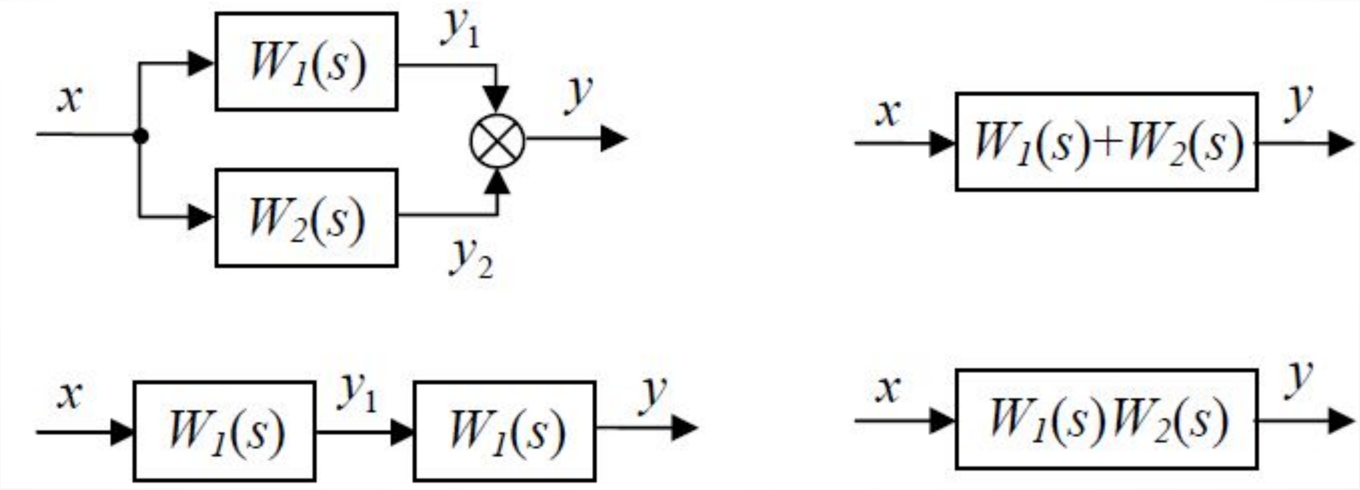
Структурные схемы

Структурное преобразование схем

Разветвление сигнала:

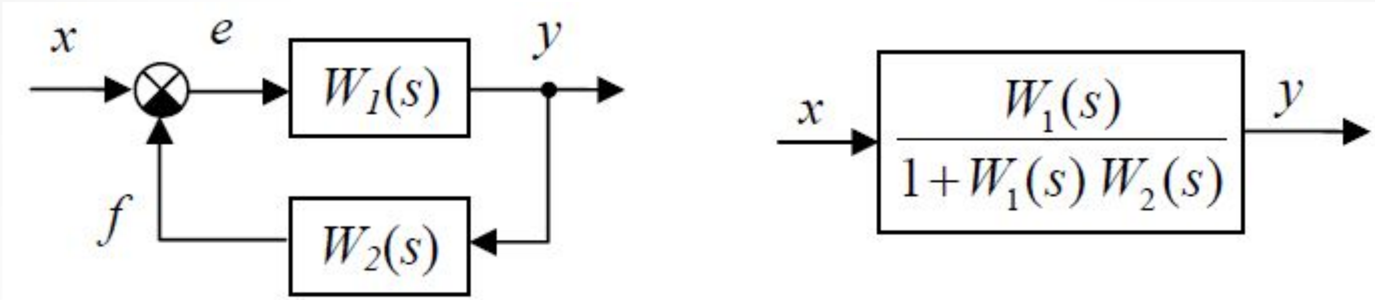


Параллельное и последовательное соединение звеньев:



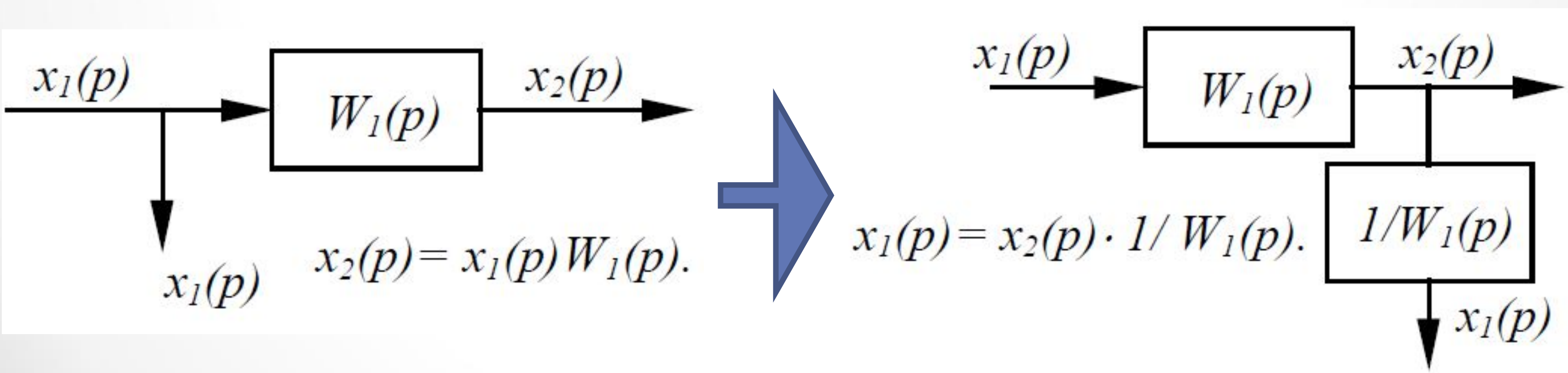
Структурное преобразование схем

Для контура с отрицательной обратной связью:



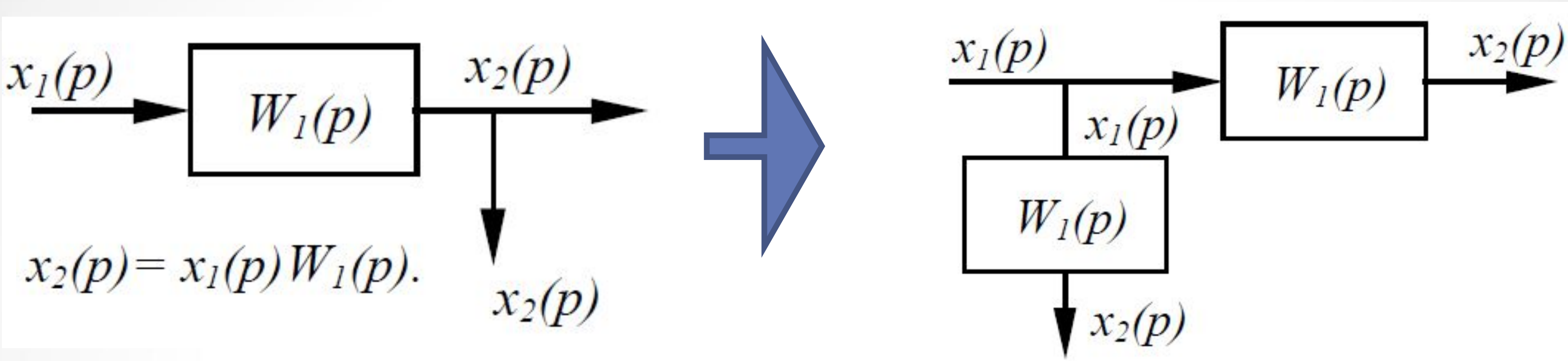
Если обратная связь положительная то в знаменателе будет стоять знак «минус».

Прямой перенос сигнала через ПФ:

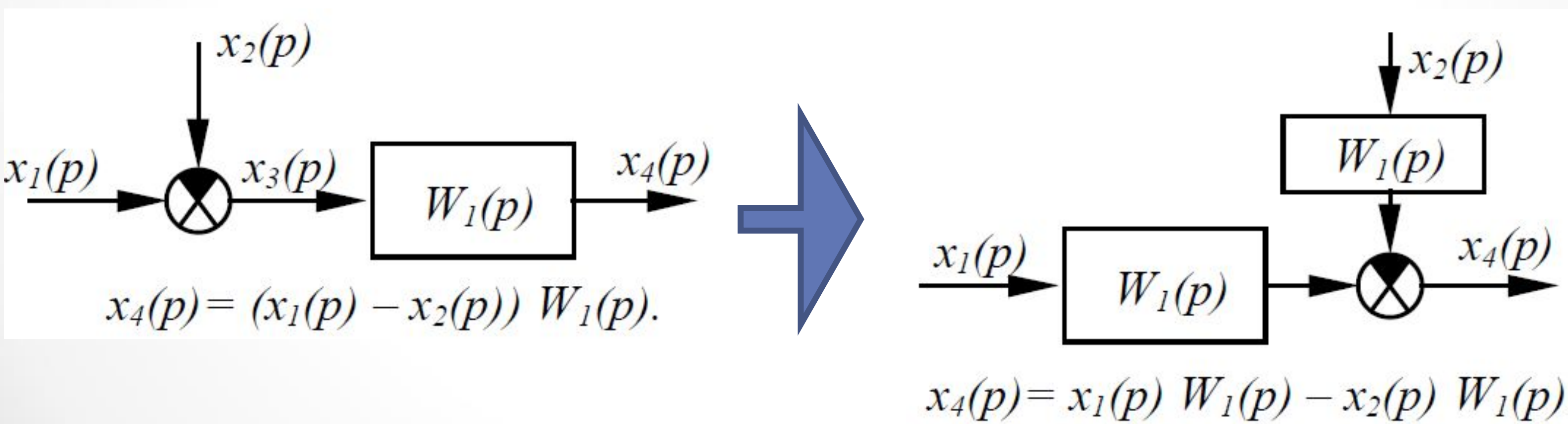


Структурное преобразование схем

Обратный перенос сигнала через ПФ:

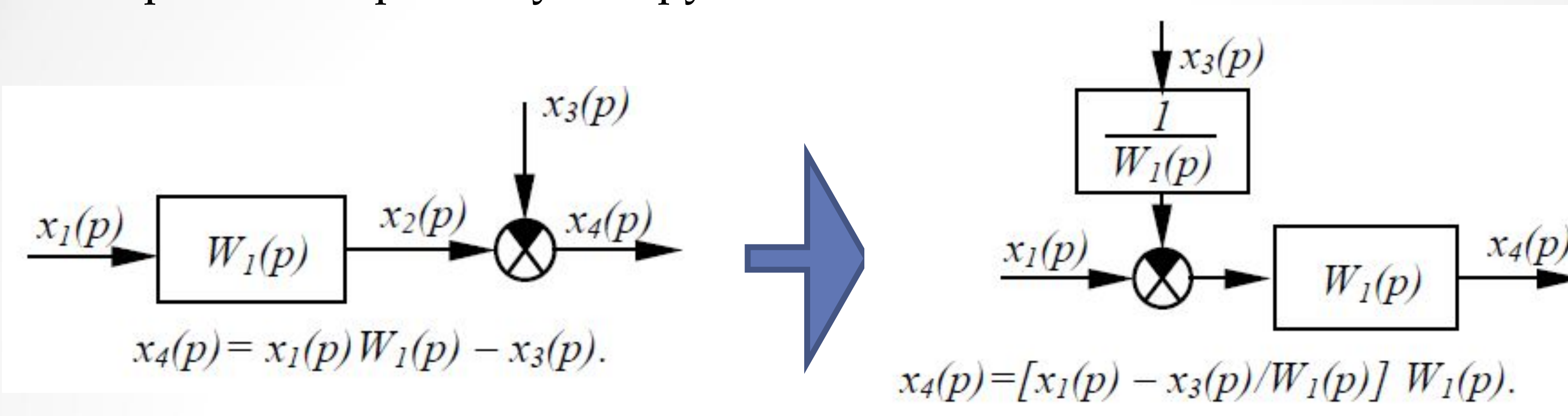


Прямой перенос суммирующего звена:

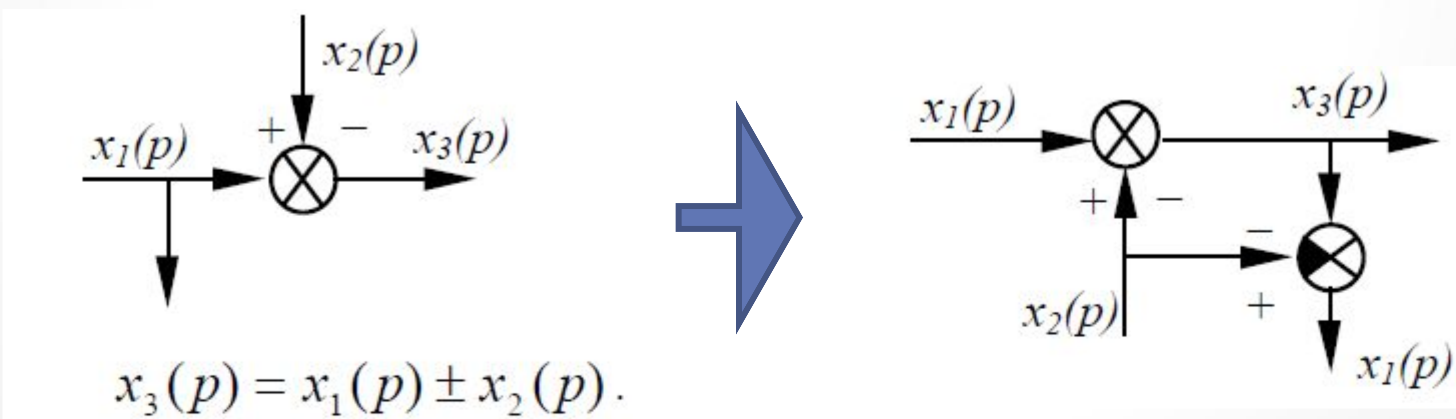


Структурное преобразование схем

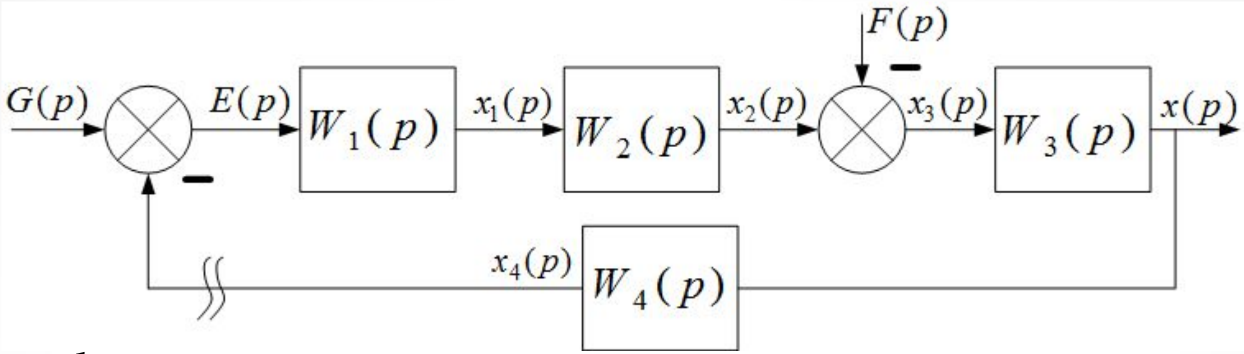
Обратный перенос суммирующего звена:



Прямой перенос суммирующего звена:



Передаточные функции систем



Передаточная функция по управлению

$$W_y(p) = \frac{W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot W_3(p)}{1+W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot W_3(p)\cdot W_4(p)}$$

Передаточная функция по возмущающему воздействию:

$$W_F(p) = -\frac{W_3(p)}{1+W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot W_3(p)\cdot W_4(p)}$$

Передаточная функция по рассогласованию:

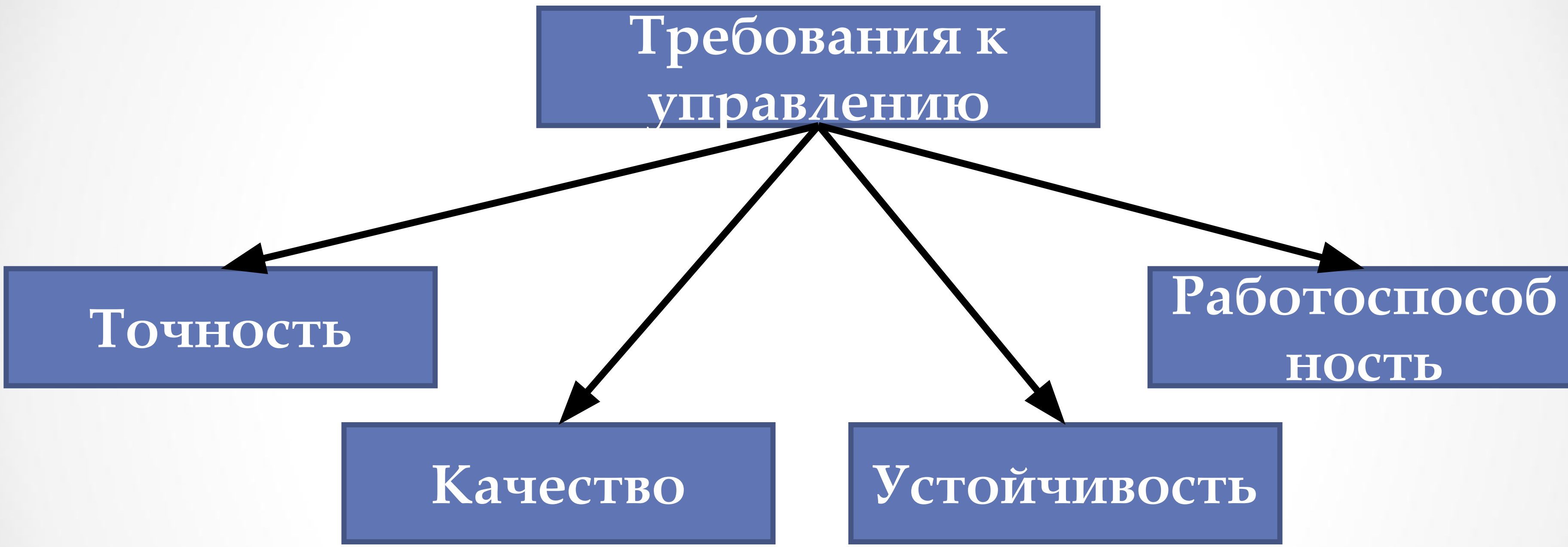
$$W_E(p) = \frac{1}{1+W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot W_3(p)\cdot W_4(p)}$$

$$x(p) = W_y(p)\cdot G(p) + W_F(p)\cdot F(p)$$

$$\left.\begin{aligned}
E(p) &= G(p) - x_4(p),\\
x_1(p) &= E(p)\cdot W_1(p),\\
x_2(p) &= x_1(p)\cdot W_2(p),\\
x_3(p) &= x_2(p) - F(p),\\
x(p) &= x_3(p)\cdot W_3(p),\\
x_4(p) &= x(p)\cdot W_4(p).
\end{aligned}\right\}$$

Анализ САУ

Анализ САУ


Требования к управлению
Точность
Качество
Устойчивость
Работоспособность

Критерии устойчивости (критерий Гурвица)

Характеристическое уравнение **замкнутой** САУ:

$$\Delta(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n$$

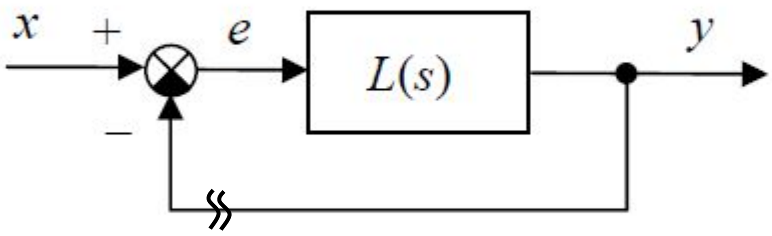
Все корни полинома $\Delta(s)$ имеют отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда все n главных миноров матрицы H_n *(определителей Гурвица)* положительны.

Пример для полинома пятого порядка (n=5):

$$H_5 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{bmatrix} \qquad (a_0 > 0)$$

$$D_1 = a_1 > 0\,, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0\,, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0\,, \quad D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0\,.$$

Критерии устойчивости (критерий Найквиста)



Система устойчива тогда и только тогда, когда годограф **разомкнутой** системы *L(jω)* не охватывает точку (*−1; 0j*) .