Основные понятия комбинаторики. Формулы перестановки, сочетания и размещения элементов во множестве.


алгебра
геометрия
Математика
теория вероятностей
комбинаторика

* ***Комбинаторикой*** **называется раздел математики, в котором исследуется, сколько различных комбинаций (всевозможных объединений элементов), подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих данному множеству.**
* Слово **«комбинаторика» происходит от латинского слова *combinare*, которое означает «соединять, сочетать».**

Готфрид Вильгельм Лейбниц

(1646 - 1716)

Лейбниц впервые ввёл термин «***комбинаторика***» и стал рассматривать комбинаторику как самостоятельный раздел математики.

Комбинаторика возникла в **17 веке**. Комбинаторные навыки оказались полезными в часы досуга. В таких играх как нарды, карты, шашки, шахматы приходилось рассматривать различные сочетания фигур и выигрывал тот, кто их лучше изучил, знал выигрышные комбинации и умел избегать проигрышные.

Еще с давних пор дипломаты стремясь к тайне переписке, изобретали сложные шифры, а секретные службы пытались эти шифры разгадать.

Методы комбинаторики находят широкое применение в ***физике, химии, биологии, экономике*** и др. областях.

В науке и практике часто встречаются задачи, решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций. Такие задачи получили название ***комбинаторных задач***.

В частности, одним из видов комбинаторных задач являются <u>задачи на соединения</u>

Виды соединений

- перестановки
- размещения
- сочетания

В задачах по комбинаторике часто применяется такое понятие как ***факториал*** (в переводе с английского « factor» – множитель)

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$$

***<u>Свойство</u>*: 0!=1**

Перестановки

Множество называется *упорядоченным*, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от **1** до **n**, где **n** – число элементов множества, так что различным элементам соответствуют различные числа.

Перестановки – **различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов.**

Формула (число размещений «из эн по эм»):

$$\boxed{P_n = n!}$$

Термин “***перестановка***” употребил впервые Якоб Бернулли в книге «Искусство предположений».

P – первая буква французского слова ***permutation*** – перестановка.

*
Перестановки

Пример 1: **В расписании сессии 3 экзамена (история, геометрия, алгебра). Сколько может быть вариантов расписаний?**

Решение. (***обратить внимание на его оформление!***)

Основное множество: {история, геометрия, алгебра} $\Rightarrow n = 3$

Соединение – **вариант расписания сессии**

Проверим, важен ли порядок:

{**история, геометрия, алгебра**} и {**геометрия, история, алгебра**} – варианты расписания сессии для разных групп $\Rightarrow$ порядок важен $\Rightarrow$ это последовательность $\Rightarrow$ это перестановка из трех элементов.

$$P_3 = 3! = 6$$

Ответ: 6 вариантов

Перестановки

Пример 2

Перестановки множества A={a, b, c} из трёх элементов имеют вид:

(a, b, c); (b, c, a); (c, a, b);

(a, c, b); (b, a, c); (c, b, a),

т. е. $P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ **перестановок.**

Пример 3

Сколькими способами можно разместить на полке 4 книги?

$P_4 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ **способа.**

* Перестановки с повторениями

Рассматривая перестановки ранее, мы предполагали, что **n** элементов различны.

Если среди **n** элементов есть **n1** элемент одного вида, **n2** элементов другого вида и т.д., **nk** элементов **k**-го вида, то имеем перестановки с повторениями, их число:

$$\boxed{\overline{P}_n(n_1,..,n_k)=\frac{n!}{n_1!.....n_k!},\text{где}\quad n_1+...+n_k=n}$$

<u>Пример 4.</u>

Сколько различных «слов» можно составить из букв слова **ДЕД**?

n=3, k=2, n1=2, n2=1

$$\overline{P}_3(2,1)=\frac{3!}{2!\cdot 1!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1}=3$$

* Перестановки с повторениями

Пример 5. Слова и фразы с переставленными буквами называют анаграммами. Сколько анаграмм можно составить из слова «макака»?

Решение.

Всего в слове «**МАКАКА**» 6 букв (**m=6**).

Определим сколько раз в слове используется каждая буква:

«М» - 1 раз (**k1=1**)

«А» - 3 раза (**k2=3**)

«К» - 2 раза (**k3=2**)

$$P = \frac{m!}{k_1!\ k_2!\ \ldots k_n!} \Rightarrow P_{1,3,2} = \frac{6!}{1!\ 3!\ 2!} = \frac{4*5*6}{2} = 60.$$

* Размещения

Размещением из **n** элементов по **m** (**m ≤ n**) называется последовательность, состоящая из **m** различных элементов некоторого **n** элементного множества.

Два размещения из ***n*** элементов считаются различными, если они отличаются ***самими элементами*** или ***порядком их расположения***.

Формула (число размещений «из эн по эм»):

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример 6.

Сколькими способами можно рассадить 4 учащихся на 25 мест?

$$A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$$

* Размещения

Пример 7. **Сколькими способами из 40 учеников класса можно выделить актив в следующем составе: *староста, физорг и редактор* стенгазеты?**

Решение:

Требуется выделить упорядоченные трехэлементные подмножества множества, содержащего ***40*** *элементов, т.е. найти* **число размещений без повторений** *из 40 элементов по 3.*

$$A_{40}^{3}=\frac{40!}{37!}=38*39*40=59280$$

* Размещения

<u>Пример 8</u>. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различны и нечетны?

Решение (***обратить внимание на его оформление!***)

Основное множество: {1, 3, 5, 7, 9} - нечетные цифры ⇒ $n = 5$

Соединение – двузначное число ⇒ $m = 2$

Проверим, важен ли порядок: $13 \neq 31$ -разные двузначные числа ⇒

-порядок важен ⇒ это последовательность ⇒ это размещение «из пяти по два».

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 4 \cdot 5 = 20$$ двузначных чисел

Ответ: 20 чисел.

* Размещения с повторениями

* ***Размещения с повторениями*** – соединения, содержащие ***n*** элементов, выбираемых из элементов ***m*** различных видов ($n \le m$) и отличающиеся одно от другого либо составом, либо порядком элементов.
* **Их количество** в предположении неограниченности количества элементов каждого вида равно $\boxed{\bar{A}_m^n = m^n}$

*Размещения с повторениями

<u>Пример 9</u>. В библиотеку, в которой есть много одинаковых учебников ***по десяти предметам***, пришло ***5 школьников***, каждый из которых хочет взять учебник. Библиотекарь записывает в журнал по *порядку названия* (без номера) взятых учебников без имен учеников, которые их взяли. Сколько разных списков в журнале могло появиться?

Решение: Так как учебники по каждому предмету одинаковые, и библиотекарь записывает лишь название (без номера),то **<u>список - размещение с повторением</u>**, число элементов исходного множества равно 10, а количество позиций – 5.

Тогда количество разных списков равно

$\bar{A}_{10}^{5} = 10^5$ = 100000.

<u>Ответ</u>: 100000

*Сочетания

Сочетанием из ***n*** элементов по ***m*** (**m ≤ n**) называется ***m***- элементное подмножество некоторого n элементного множества.

Сочетания *– конечные множества, в которых порядок не имеет значения.*

Формула (число размещений «***из эн по эм***»):

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}}$$

*Сочетания

Пример 10. Сколькими способами можно составить букет из 3 цветов, если в вашем распоряжении 5 цветов: *мак*, *роза*, *тюльпан*, *лилия*, *гвоздика*?

Решение. (***обратить внимание на его оформление!***)

Основное множество: {мак, роза, тюльпан, лилия, гвоздика} ⇒ $n = 5$

Соединение – букет из трех цветков ⇒ $m = 3$

Проверим, важен ли порядок:

{тюльпан, лилия, гвоздика} и {лилия, тюльпан, гвоздика} – один и тот же букет ⇒ порядок неважен ⇒ это подмножество ⇒ это сочетание «из пяти по три».

$$C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

Ответ: 10 букетов

1) Сколькими способами можно делегировать троих студентов на межвузовскую конференцию из 9 членов научного общества?

Решение:

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = \frac{9!}{3!*6!} = \frac{6!*7*8*9}{3!*6!} = 84$$

2) Десять участников конференции обменялись рукопожатиями, пожав руку каждому. Сколько всего рукопожатий было сделано?

Решение:

$$C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = \frac{10!}{2!*8!} = \frac{8!*9*10}{2!*8!} = \frac{90}{2} = 45$$

3) В школьном хоре 6 девочек и 4 мальчика. Сколькими способами можно выбрать из состава школьного хора 2 девочек и 1 мальчика для участия в выступлении окружного хора?

Решение:

$$C_6^2 * C_4^1 = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} * \frac{4!}{1!\,(4-1)!} = \frac{6!*4!}{2!*4!*3!} = \frac{4!*5*6*4}{2!*4!} = 15*4=60$$

45) В классе 10 учебных предметов и 5 разных уроков в день. Скольկими способами могут быть распределены уроки в один день?

Решение:

$$C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!*5!} = \frac{6*7*8*9*10}{5!} = 252$$

*Сочетания с повторениями

Сочетаниями с повторениями из m по n называют соединения, состоящие из n элементов, выбранных из элементов m разных видов, и отличающиеся одно от другого хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из m по n обозначают

$$\boxed{C_m^n}$$

*Сочетания с повторениями

Если из множества, содержащего *n* элементов, выбирается поочередно *m* элементов, причём выбранный элемент каждый раз возвращается обратно, то количество способов произвести неупорядоченную выборку – число ***сочетаний с повторениями*** – составляет

$$\boxed{C_m^n = P_{m-1,\, n} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!}}$$

Пример 11. Сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в распоряжении имеются 4 сорта пирожных?

Решение:

$$C_4^7 = \frac{(4+7-1)!}{(4-1)!4!} = 120$$

Пример 12. **Сколько костей находится в обычной игре "домино"?**

Решение: Кости домино можно рассматривать как сочетания с повторениями по две из семи цифр множества (0,1,2,3,4,5,6). Число всех таких сочетаний равно

$$\boxed{C_7^2 = \frac{(7+2-1)!}{(7-1)!2!} = 28}$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

1 вариант

- На тренировке занимаются **12** баскетболистов. Сколько может быть образовано тренером различных стартовых пятерок?
- Сколько разных слов можно составить из слова «**комбинаторика**»?
- Для составления букета из девяти цветов в магазине имеются розы, гвоздики, хризантемы и пионы. Сколькими способами можно составить из этих цветов букет?
- Сколько существует четырехзначных номеров, не содержащих цифр 0, 5, 8?

2 вариант

- Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 при условии, что ни одна цифра не повторится?
- Сколько чисел меньше миллиона можно записать при помощи цифр 8 и 9?
- В магазине имеются в продаже яблоки, апельсины, груши и мандарины. Сколькими способами можно образовать набор из 12 фруктов?

Ответы и решения.

1-ый вариант

1. - $C_{12}^{5} = 792$
2. - $\mathrm{P}(2,2,1,1,2,1,2,1,1,) = \frac{13!}{16!}$
3. - $C_{4}^{9} = 220$
4. - $A_{4}^{7} = 74$

Ответы и решения.
2-ой вариант

1. $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = 60$

2. Шестизначных чисел $A_6^2 = 64$, пятизначных – 32 четырехзначных – 16, трехзначных – 8, двухзначных – 4, однозначных – 2. Всего – 126

3. $C_4^{12} = 455$