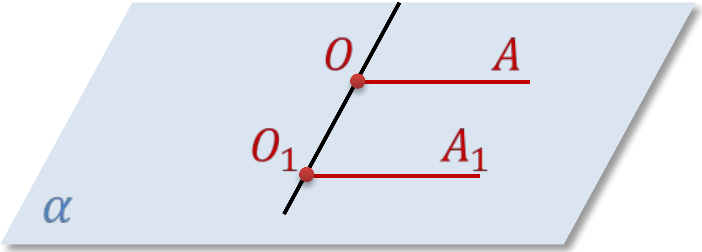
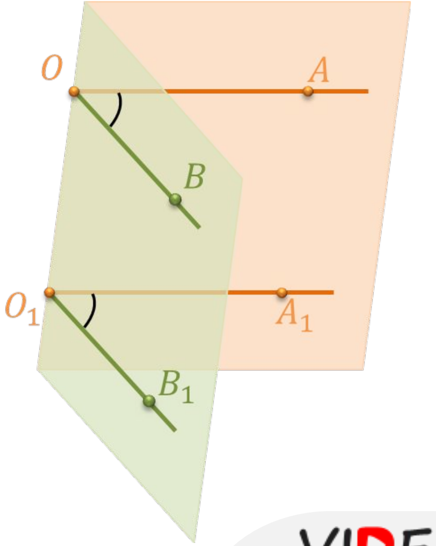
Углы между прямыми

Два луча OA и O_1A_1 в пространстве, не лежащие на одной прямой, называются **сонаправленными**, если *они параллельны* и *лежат в одной полуплоскости* с границей OO_1.

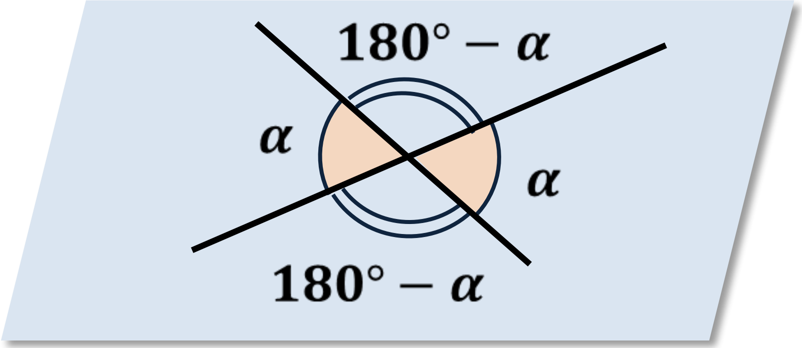


Теорема. Если стороны двух углов соответственно сонаправленны, то такие углы равны.

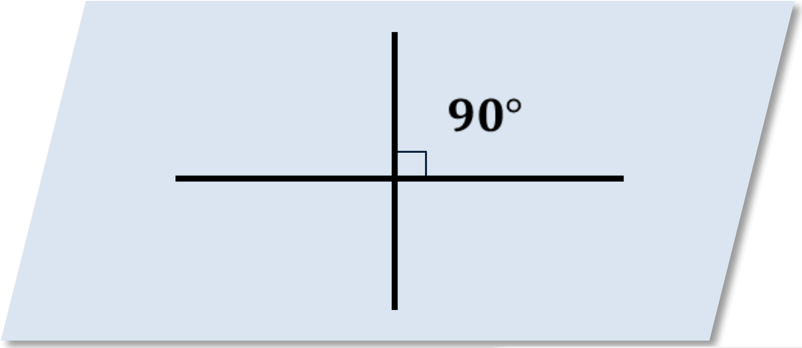


Любые две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и образуют четыре неразвернутых угла.

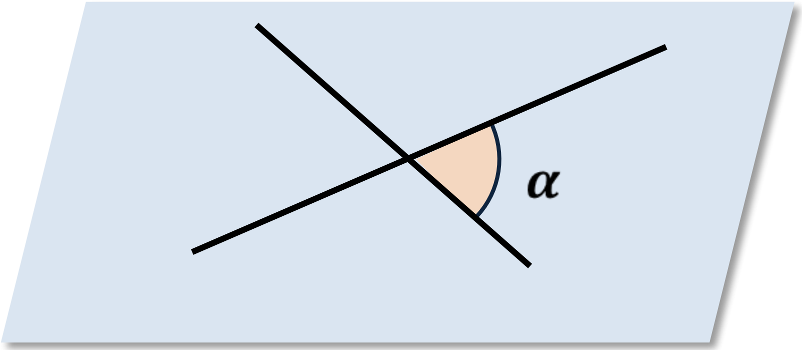
Определение. Если пересекающиеся прямые образуют тупые и острые углы, то **углом между этими прямыми** называется тот, который ***не превосходит*** любой из трёх остальных углов.



Если пересекающиеся прямые образуют *четыре равных угла*, то **угол между этими прямыми** равен **90°**.



Пусть $\boldsymbol{\alpha}$ – тот из углов, который **не превосходит** любого из трёх остальных углов.



$$\mathbf{0} < \boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{90°}$$

Угол между скрещивающимися прямыми

Пусть даны прямые $a \dot{-} b$.

Возьмем произвольную точку M_1.

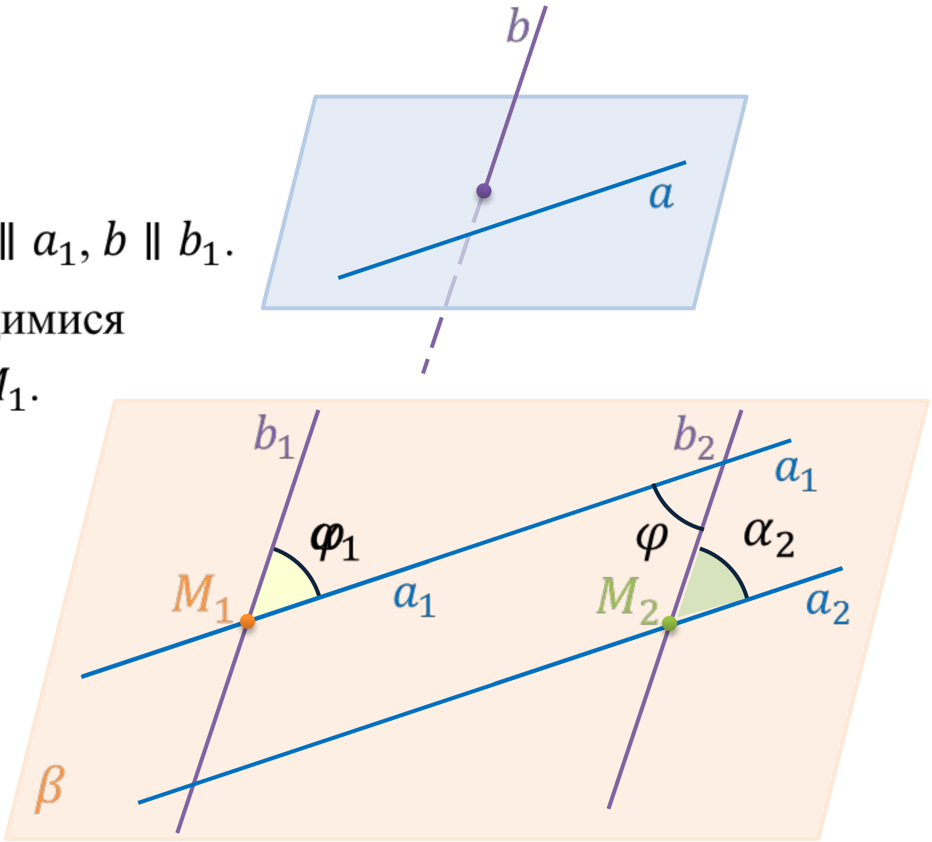
Проведем прямые a_1 и b_1, так чтобы $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$.

Докажем, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки M_1.

Возьмем произвольную точку M_2.

Проведем прямые $a_2 \parallel a$, $b_2 \parallel b$.

Если прямые $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$, $a_2 \subset \beta$, $b_2 \subset \beta$, то $\boldsymbol{\alpha_1} = \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\alpha_2}$.



Угол между скрещивающимися прямыми

Пусть прямые $a_1 \cap b_1 = M_1$, лежат в одной плоскости.

А прямые $a_2 \cap b_2 = M_2$ – лежат в другой плоскости.

Т.к. прямые $a_1 \parallel a$ и $a_2 \parallel a$, то прямые $a_1 \parallel a_2$.

Т.к. прямые $b_1 \parallel b$ и $b_2 \parallel b$, то прямые $b_1 \parallel b_2$.

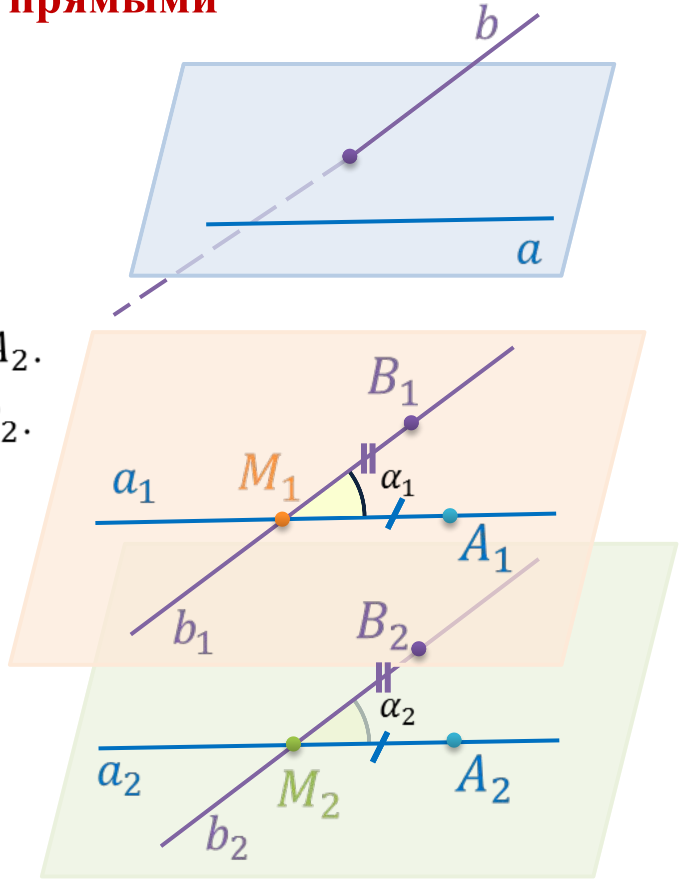
Отметим точки $A_1 \in a_1$, $A_2 \in a_2$, так чтобы $M_1A_1 = M_2A_2$.

Отметим точки $B_1 \in b_1$, $B_2 \in b_2$, так чтобы $M_1B_1 = M_2B_2$.

$\angle A_1M_1B_1 = \alpha_1$, $\angle A_2M_2B_2 = \alpha_2$

По теореме о равенстве углов с сонаправленными сторонами получаем, что $\angle A_1M_1B_1 = \angle A_2M_2B_2$.

Таким образом, величина угла между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки M_1.



Пример.

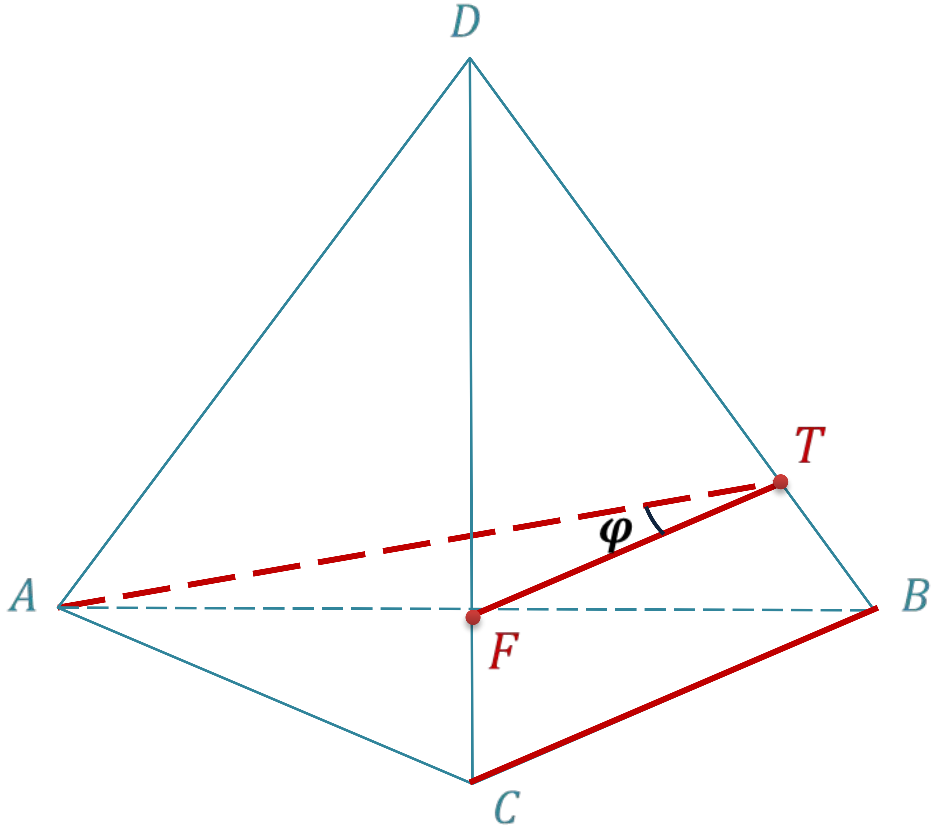
$DABC$ – треугольная пирамида.

$T \in DB$

$BC \dotminus AT$

Угол между прямыми BC и AT равен $\angle ATF$.

$TF \subset BCD, TF \parallel BC$



Пример.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед.

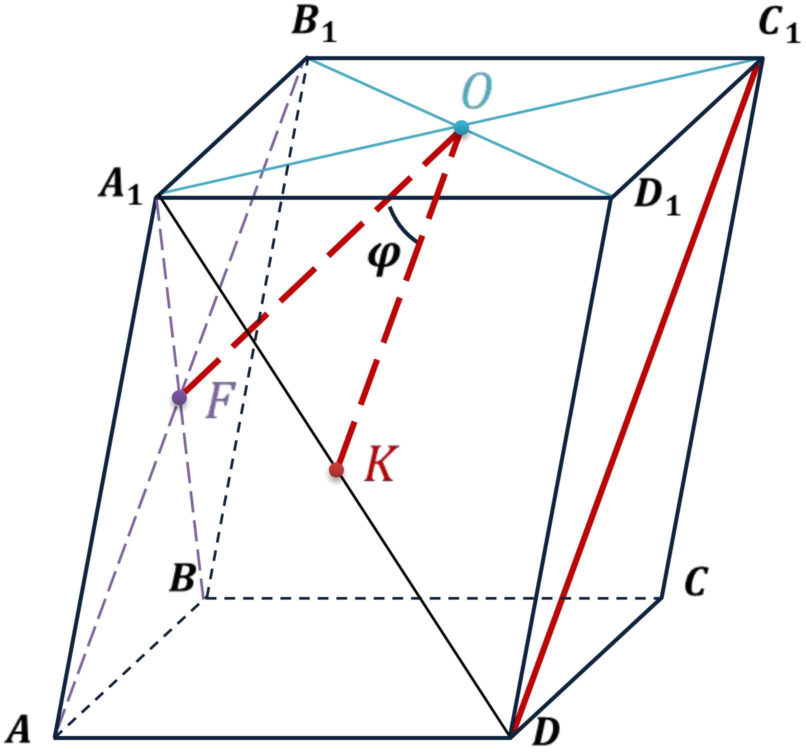
$A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$

$AB_1 \cap A_1B = F$

$C_1D \dotdiv OF$

Угол между прямыми C_1D и OF равен $\angle FOK$.

$OK \subset C_1DA_1$, $OK \parallel C_1D$



Задача. Дана правильная пирамида $SABCD$. MK – средняя линия грани ASD. Найдите угол между прямыми MK и DC.

Решение.

$ABCD$– квадрат.

$MK \dotminus DC$

$MK \subset ASD$

$DC \cap ASD = D$

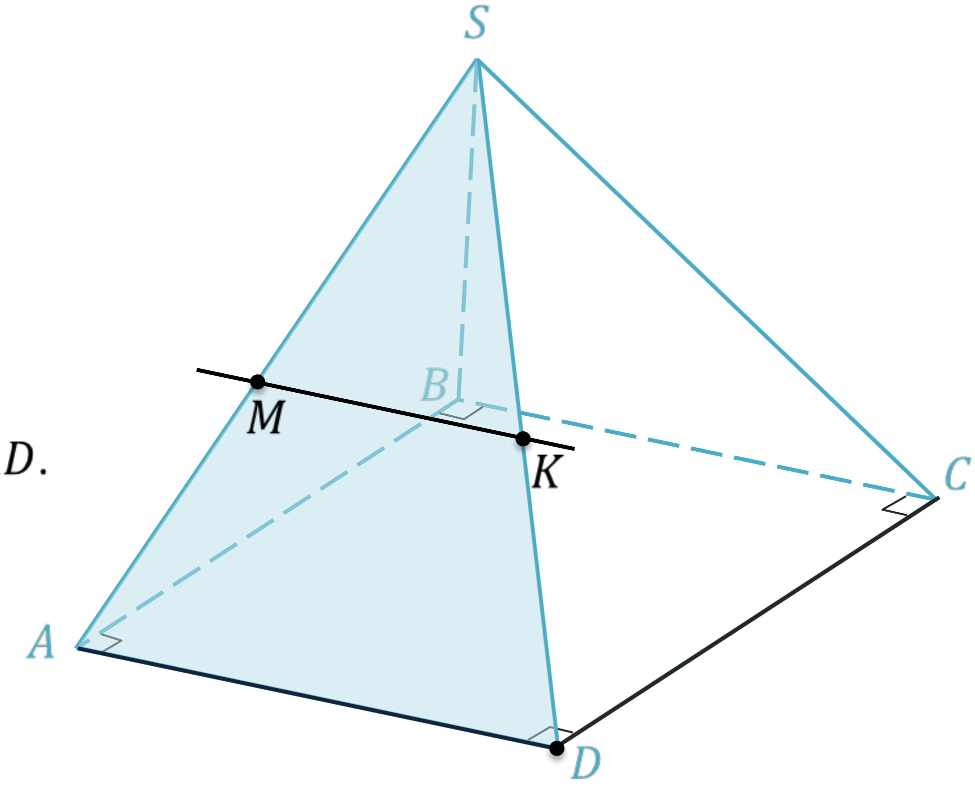
$D \notin MK$

MK – средняя линия ΔASD, $\Longrightarrow MK \parallel AD$.

Угол между прямыми MK и DC равен $\angle ADC$.

Угол между прямыми MK и DC равен $90°$.

Ответ: $90°$.



Задача. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми AD_1 и DC_1.

Решение.

$AD_1 \dot{-} DC_1$

$DC_1 \subset DD_1C_1$

$AD_1 \cap DD_1C_1 = D_1$

$D_1 \notin DC_1$

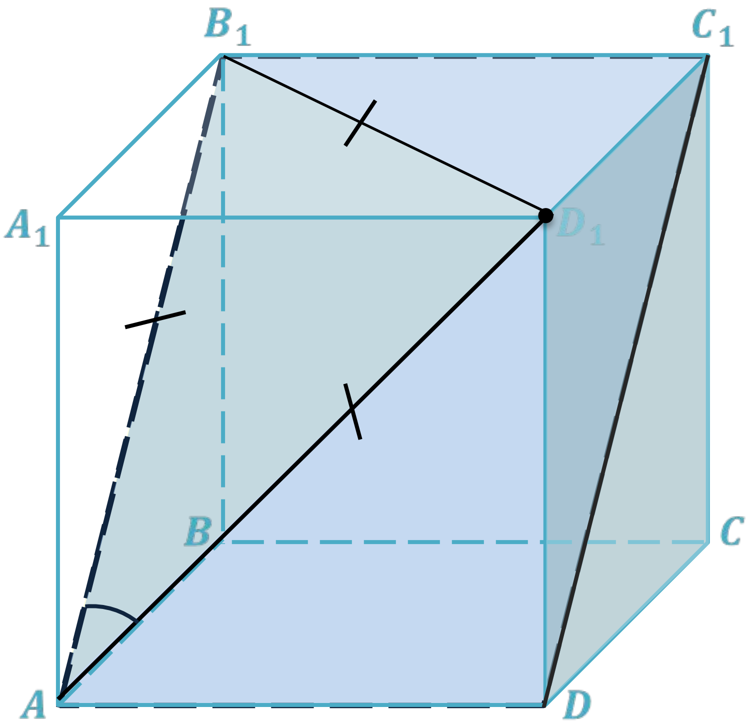
$AB_1 \parallel DC_1$, т.к. AB_1C_1D – параллелограмм.

Угол между прямыми AD_1 и DC_1
равен $\angle B_1AD_1$.

$AB_1 = B_1D_1 = AD_1$

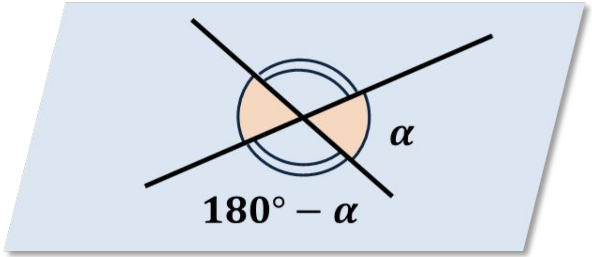
Тогда ΔAB_1D_1 – равносторонний.

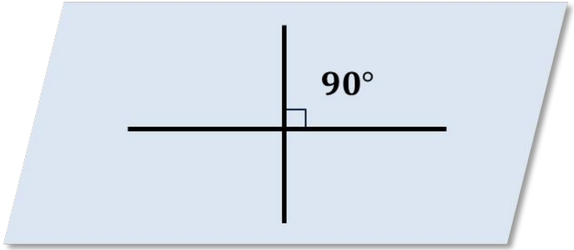
$\angle B_1AD_1 = 60°$

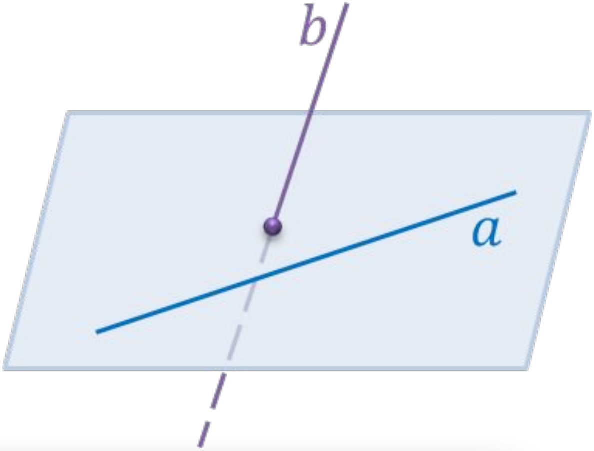


Ответ: 60°.

Углы между прямыми







Задача. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми AD_1 и DC_1.

Решение.

$AD_1 \dot{-} DC_1$

$DC_1 \subset DD_1C_1$

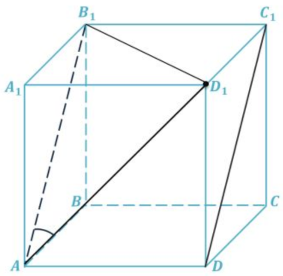
$AD_1 \cap DD_1C_1 = D_1$

$D_1 \notin DC_1$

$AB_1 \parallel DC_1$, т.к. AB_1C_1D – параллелограмм.

Угол между прямыми AD_1 и DC_1
равен $\angle B_1AD_1$.

$AB_1 = B_1D_1 = AD_1$
Тогда ΔAB_1D_1 – равносторонний.
$\angle B_1AD_1 = 60°$



Ответ: 60°.

Задача. Дана правильная пирамида $SABCD$. Найдите угол между прямыми MK и DC.

Решение.

$ABCD$– квадрат.

$MK \dot{-} DC$

$MK \subset ASD$

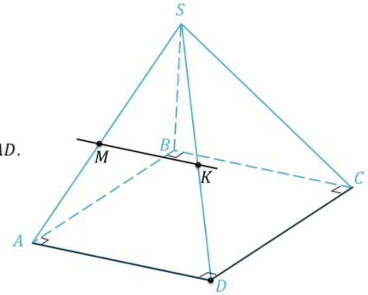
$DC \cap ASD = D$

$D \notin MK$

MK – средняя линия ΔASD, $\Longrightarrow MK \parallel AD$.

Угол между прямыми MK и DC
равен $\angle ADC$.

Угол между прямыми MK и DC
равен 90°.



Ответ: 90°.