## Определение продолжительности нагрева термически массивных тел. Аналитические методы определения времени нагрева

Для ТМТ неприемлемо допущение о равенстве температур поверхности среднемассовой, $T = T(x, y, z, \tau)$

Нагрев считается законченным, когда:

1) температура поверхности равна заданной: $T(R,\tau) = T_з = T_{пов}^{кон}$

2) конечный перепад температур по толщине меньше или равен заданному: $\Delta T(\tau) \le \Delta T_з = \Delta T^{кон}$

Если $\Delta T(\tau) > \Delta T^{кон}$, то продолжаем нагрев, но при других ГУ.

Методы определения времени нагрева $\tau_н$ :

1. Аналитическое решение краевой задачи теплопроводности (КЗТ).
2. Приближенные методы определения $\tau_н$
3. Численные методы решения КЗТ.

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ НАГРЕВА ИЗ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ КЗТ

### 1.1. ДОПУЩЕНИЯ

1) Реальные тела сводим к одному из тел правильной формы.

2) Граничные условия однородны по поверхности тела.

В результате этих двух допущений – симметричность и одномерность температурного поля: $T = T(x, \tau)$

3) Физические свойства не зависят от температуры.

4) Начальные и граничные условия описываются простейшими уравнениями.

5) Продолжительность нагрева существенно больше длительности инерционного периода: $\tau_{\text{н}} >> \tau_{\text{ин}}$ (в общем случае $\tau_{\text{н}} = \tau_{\text{ин}} + \tau_{\text{рег}}$ ).

Следовательно, длительность нагрева приближенно равна длительности регулярного периода: $\tau_{\text{н}} \approx \tau_{\text{рег}}$

## 1.2. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1. Дифференциальное уравнение теплопроводности Фурье:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{2\nu + 1}{x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right); \quad T = T(x,\tau).$$

2. Геометрические условия задачи: $\nu,\ 0 \le x \le R$ ; $R$ – характерный размер.

3. Физические условия задачи: $\lambda = \text{const}$

$c = \text{const}$ ⇒ $a = \lambda/(\rho c) = \text{const}$

$\rho = \text{const}$

4. Начальные и граничные условия. ГУ: $q_{\text{р.м}} = \text{const};\quad q_{\text{р.м}} = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=R}$

Начальные условия (НУ): $T(x,0) = T_0 = T_{\text{нач}}$

## 1.3. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФУРЬЕ

Случай 1:

$q_{\text{р.м}} = \text{const}$ (ГУ 2 рода).

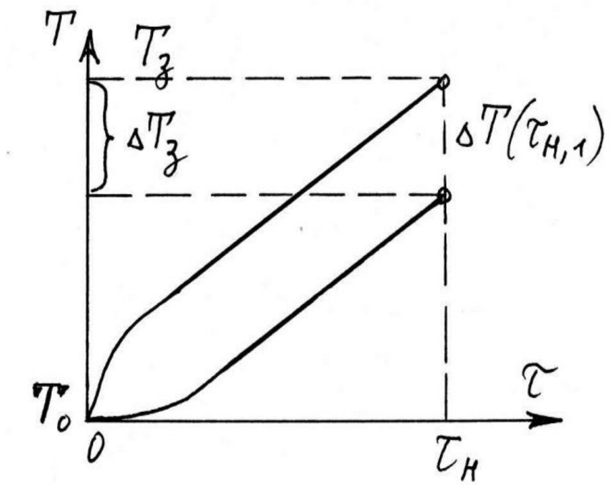
$$T(x,\tau) = T_0 + \frac{q_{\text{р.м}} R}{\lambda}\left((2\nu + 2)\text{Fo} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2 - \frac{2\nu + 2}{2(2\nu + 4)}\right)$$

При $x = R$ $T(R,\tau) = T_0 + \dfrac{q_{\text{р.м}}R}{\lambda}\left((2\nu+2)\text{Fo} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2\nu+2}{2(2\nu+4)}\right)$

при $x = 0$ $T(0,\tau) = T_0 + \dfrac{q_{\text{р.м}}R}{\lambda}\left((2\nu+2)\text{Fo} - \dfrac{2\nu+2}{2(2\nu+4)}\right)$

В результате перепад температур по толщине тела:

$$\Delta T = T(R,\tau) - T(0,\tau) = \frac{q_{\text{р.м}}R}{\lambda} = \text{const}$$




Скорость подъема температуры во всех точках тела одинакова, перепад температур по толщине $\Delta T = \text{const}$

Случай 2: $T(R,\tau) = \text{const}$ (ГУ 1 рода).

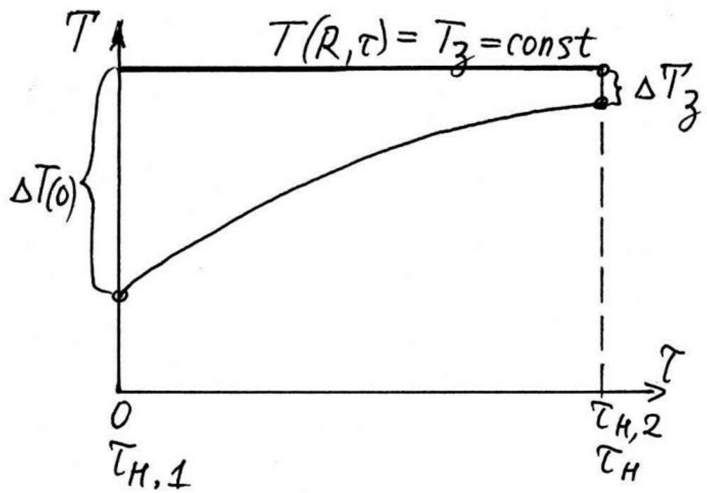
Начальные условия (НУ): $T(x,0) = T(R,0) - \Delta T(0)\left(1 - \left(\dfrac{x}{R}\right)^2\right)$

$\Delta T(0)$ – перепад температур по всему характерному размеру.

Решение представлено в следующей форме:

$$\frac{\Delta T(\tau)}{\Delta T(0)} = A_\nu \exp(-B_\nu \cdot \mathrm{Fo}); \quad \mathrm{Fo} = \frac{a\tau}{R^2}$$

Пластина $\nu = -1/2$: $A_\nu = 1{,}03; \; B_\nu = 2{,}47$




Случай 3: $T_г = \mathrm{const}; \; \alpha = \mathrm{const}$ (ГУ 3 рода).

ГУ: $-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=R} = \alpha\left(T_г - T(R,\tau)\right)$ НУ: $T(x,0) = T_0 = T_{нач}$

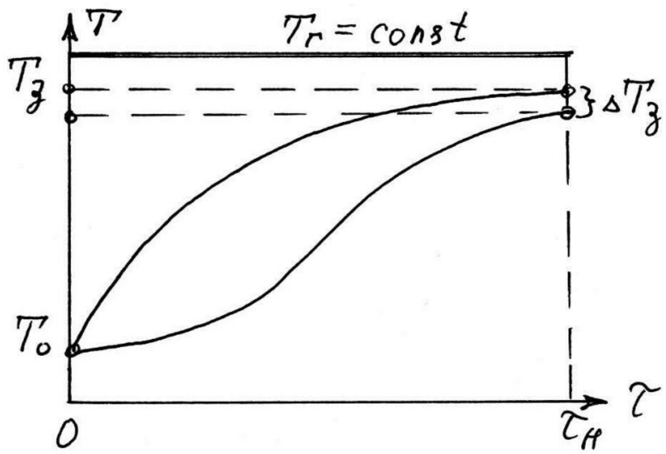
Для пластины решение имеет вид (регулярный режим!):

$$\theta(X,\mathrm{Fo}) = \frac{T_г - T(x,\tau)}{T_г - T_0} = \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1 \cdot \cos\mu_1}\cos(\mu_1 X)\cdot\exp\left(-\mu_1^2\,\mathrm{Fo}\right)$$

$$X = \frac{x}{R}, \quad \mathrm{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda}$$

$$\theta(1, \mathrm{Fo}) = A_1 \cdot \exp\left(-\mu_1^2\ \mathrm{Fo}\right); \quad \theta(0, \mathrm{Fo}) = A_0 \cdot \exp\left(-\mu_1^2\ \mathrm{Fo}\right)$$

Здесь $\mu_1$ – первый корень характеристического уравнения $\mathrm{ctg}\,\mu = \dfrac{\mu}{\mathrm{Bi}}$



# СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!