Лекция № 7

КиДвТП

Тема: Математические модели теории надежности

Вопросы:

1. Общие понятия о моделях надежности
2. Статистическая обработка результатов испытаний и определение ПН
3. Расчёт критерия согласия
4. Законы распределения наработки до отказа

1 Общие понятия о моделях надежности

- Для решения задач по оценке надежности и прогнозированию работоспособности объекта необходимо иметь мат. модель, которая представлена аналитическими выражениями одного из показателей P(t), a(t) или λ(t).
- Рассмотрим U – образную кривую для интенсивности отказов λ(t) большинства невосстанавливаемых объектов. Каждый из трех участков (приработки, нормальной эксплуатации и старения) имеет характерную зависимость λ(t) и, следовательно, свою математическую модель.
- Основной путь для получения модели состоит в проведении испытаний, вычислении статистических оценок и их аппроксимации аналитическими функциями. Вид аналитической функции, описывающей изменение показателей надежности P(t), a(t) или λ(t), определяет **закон распределения СВ**, который выбирается в зависимости от свойств объекта, его условий работы и характера отказов.

2 Статистическая обработка результатов испытаний и определение ПН

- Пусть в результате испытаний No невосстанавливаемых одинаковых объектов получена статистическая выборка – массив наработки до отказа каждого из No испытанных объектов. Такая выборка характеризует СВ наработки до отказа объекта.
- Необходимо выбрать закон распределения СВ *T* и проверить правильность выбора по соответствующему критерию.
- Подбор закона распределения осуществляется на основе аппроксимации экспериментальных данных о наработке до отказа, которые должны быть представлены в наиболее компактном графическом виде. Выбор той или иной аппроксимирующей функции носит характер гипотезы, которую выдвигает исследователь. Экспериментальные данные могут с большей или меньшей вероятностью подтверждать или не подтверждать справедливость той или иной гипотезы. Поэтому исследователь должен получить ответ на вопрос: согласуются ли результаты эксперимента с гипотезой о том, что СВ наработки подчинена выбранному им закону распределения?

2 Статистическая обработка результатов испытаний и определение ПН

Алгоритм обработки результатов и расчета ПН

1. Формирование статистического ряда

При большом числе испытываемых объектов полученный массив наработок $\{t_1, t_i, \ldots, \ldots, t_n\}$ является громоздкой и мало наглядной формой записи случайной величины *T*. Поэтому для компактности и наглядности выборка представляется в графическом изображении статистического ряда – **гистограмме наработки до отказа.** Для этого необходимо:

- установить интервал наработки $[t_{\min}, t_{\max}]$ и его длину $\varsigma t = t_{\max} - t_{\min}$, где $t_{\min} \le Min\{t_1,...,t_i,...,t_n\}$, $t_{\max} \ge Max\{t_1,...,t_i,...,t_n\}$;
- разбить интервал наработки $[t_{\min}, t_{\max}]$ на k интервалов равной ширины Δt – шаг гистограммы

$$\Delta t = \frac{\varsigma t}{k}, \quad \Delta t = t_{i+1} - t_i = t_i - t_{i-1};$$

- подсчитать частоты (вероятности) появления отказов во всех k интервалах:

$$\overline{P}_1 = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1)}{N_0} = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_{\min} + \Delta t)}{N_0};$$

$$\overline{P}_2 = \frac{\Delta n(t_1, t_2)}{N_0} = \frac{\Delta n(t_1, t_1 + \Delta t)}{N_0};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overline{P}_i = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_i)}{N_0} = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_{i-1} + \Delta t)}{N_0},$$

где $\Delta n(t_{i-1}, t_{i-1} + \Delta t)$ – число объектов, отказавших в интервале $[t_{i-1}, t_{i-1} + \Delta t]$.

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{P}_i = 1;$$

Полученный статистический ряд представляется в виде гистограммы, которая строится следующим образом. По оси абсцисс t откладываются интервалы Δt , на каждом из которых, как на основании, строится прямоугольник, высота которого пропорциональна соответствующей частоте Pi . Возможный вид гистограммы приведен на рис. 1

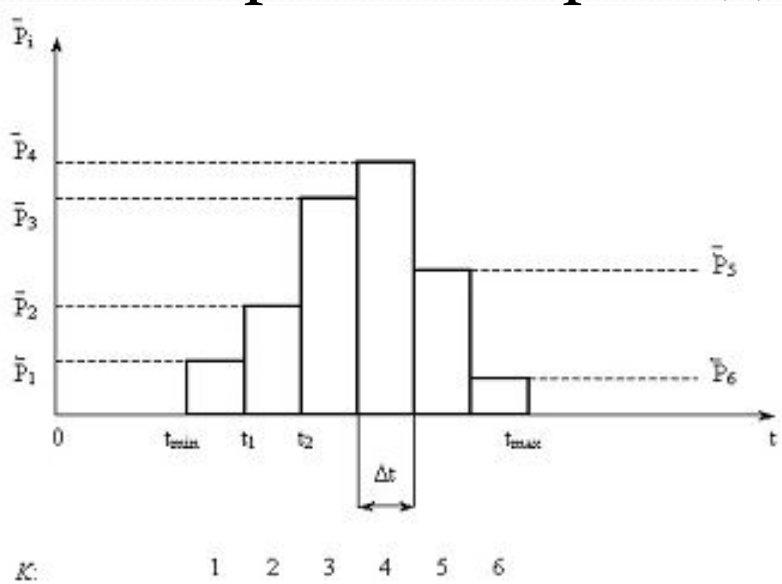

Рис. 1. *Гистограмма статистических оценок ВБР.*

2. ***Расчет эмпирических функций.*** Используя данные сформированного статистического ряда, определяются статистические оценки показателей надежности, т. е. эмпирические функции:

- *функция распределения отказов (оценка ВО)*

$$\overline{Q}(t_{\min}) = \frac{n(t_{\min})}{N_0} = 0;$$

$$\overline{Q}(t_1) = \frac{n(t_1)}{N_0} = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1)}{N_0} = \overline{P}_1;$$

$$\overline{Q}(t_2) = \frac{n(t_2)}{N_0} = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1) + \Delta n(t_1, t_2)}{N_0} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2;$$

....

$$\overline{Q}(t_{\max}) = \frac{n(t_{\max})}{N_0} = \sum_1^k \overline{P}_i = 1$$

- *функция надежности (оценка ВБР)*

$$\overline{P}(t_{\min}) = 1 - \overline{Q}(t_{\min}) = 1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{P}(t_{\max}) = 1 - \overline{Q}(t_{\max}) = 0;$$

На рис. 2-4 приведены соответственно графики статистических оценок $Q\ (t)$, $a(t)$,$\lambda\ (t)$.

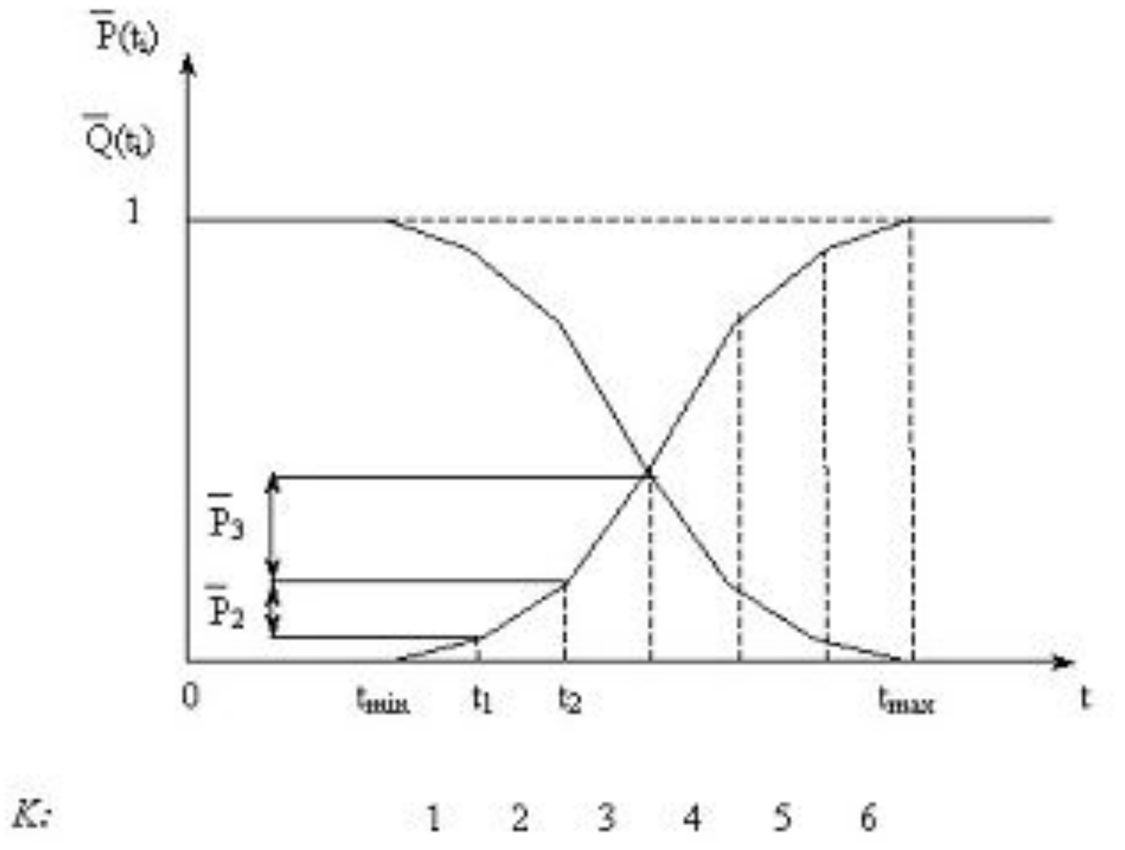

Рис. 2 *Графики статистических оценок ВБР и ВО.*

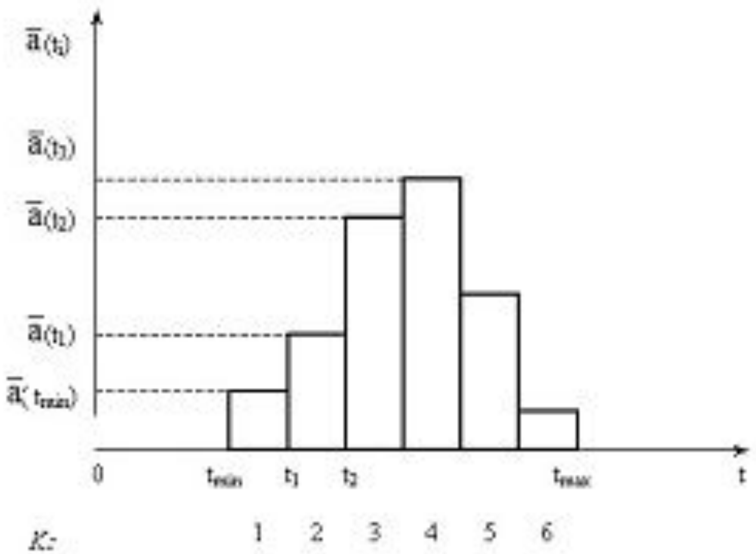

Рис. 3 *Статистические оценки ПРО.*

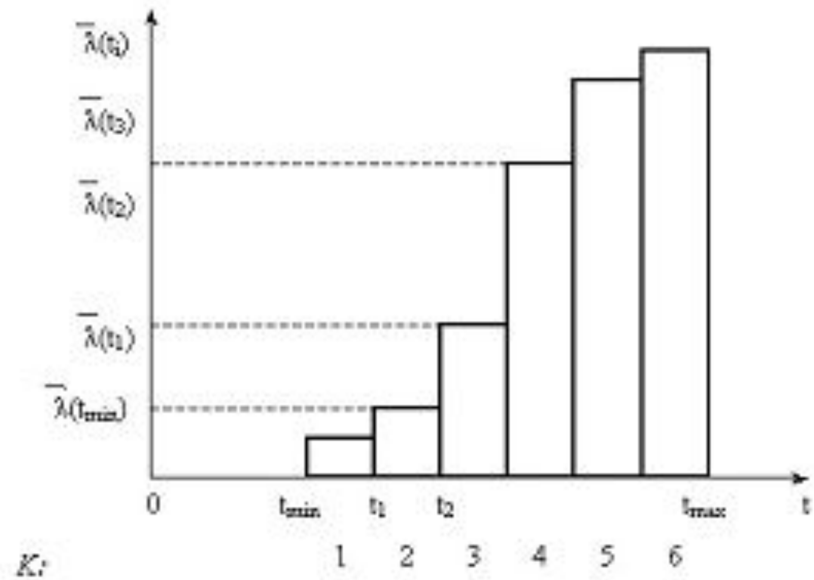

Рис. 4 *Статистические оценки ИО.*

- плотность распределения отказов (оценка ПРО):

$$\overline{a}(t_1) = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1)}{N_0 \cdot \Delta t} = \frac{\overline{P}_1}{\Delta t};$$

$$\overline{a}(t_2) = \frac{\Delta n(t_1, t_2)}{N_0 \cdot \Delta t} = \frac{\overline{P}_2}{\Delta t};$$

....

$$\overline{a}(t_i) = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_i)}{N_0 \cdot \Delta t} = \frac{\overline{P}_i}{\Delta t};$$

- интенсивность отказов (оценка ИО):

$$\overline{\lambda}(t_1) = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1)}{N(t_1) \cdot \Delta t} = \frac{\Delta n(t_{\min}, t_1)}{[N_0 - n(t_1)] \cdot \Delta t};$$

$$\overline{\lambda}(t_2) = \frac{\Delta n(t_1, t_2)}{N(t_2) \cdot \Delta t} = \frac{\Delta n(t_1, t_2)}{[N_0 - n(t_2)] \cdot \Delta t};$$

....

$$\overline{\lambda}(t_i) = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_i)}{N(t_i) \cdot \Delta t} = \frac{\Delta n(t_{i-1}, t_i)}{[N_0 - n(t_i)] \cdot \Delta t}.$$

3. Расчет статистических оценок числовых характеристик

Для расчета статистических оценок числовых характеристик можно воспользоваться данными сформированного статистического ряда. Определяются такие оценки:

- *оценка средней наработки до отказа (статистическое среднее наработки):*

$$\overline{T}_{cp} = \sum_{1}^{k} \tilde{t}_i \cdot \overline{P}_i \, ;$$

- *оценка дисперсии наработки до отказа (эмпирическая дисперсия наработки):*

$$\overline{D} = \sum_{1}^{k} \left(\tilde{t}_i - \overline{T}_{cp}\right)^2 \cdot \overline{P}_i ;$$

где $\tilde{t}_i = t_i + \dfrac{\Delta t}{2} = t_{i+1} - \dfrac{\Delta t}{2}$ – середина i-го интервала наработки, т. е. среднее значение наработки в интервале.

Оценка СКО $\overline{D} = \overline{\sigma}^2$.

Целесообразно рассчитать оценки и некоторых вспомогательных характеристик рассеивания случайной величины T:

- выборочный коэффициент асимметрии наработки до отказа

$$A = \sum_{1}^{k} \left(\tilde{t}_i - \overline{T}_{cp}\right)^3 \frac{\overline{P}_i}{\overline{\sigma}^3},$$

- выборочный эксцесс наработки до отказа

$$E = \left[\sum_{1}^{k} \left(\tilde{t}_i - \overline{T}_{cp}\right)^4 \frac{\overline{P}_i}{\overline{\sigma}^4} \right] - 3.$$

Эти характеристики используются для выбора аппроксимирующей функции.

Так коэффициент асимметрии является характеристикой «скошенности» распределения, например, если распределение симметрично относительно МО, то $A = 0$.

На рис. распределение $a_2(t)$ имеет положительную асимметрию $A > 0$, а $a_3(t)$ – отрицательную $A < 0$.

Эксцесс характеризует «крутость» (остро- или плосковершинность) распределения.

Для нормального распределения $E = 0$.

Кривые $a(t)$, более островершинные по сравнению с нормальной, имеют $E > 0$, а наоборот – более плосковершинные, $E < 0$ (рис. 5 , б).

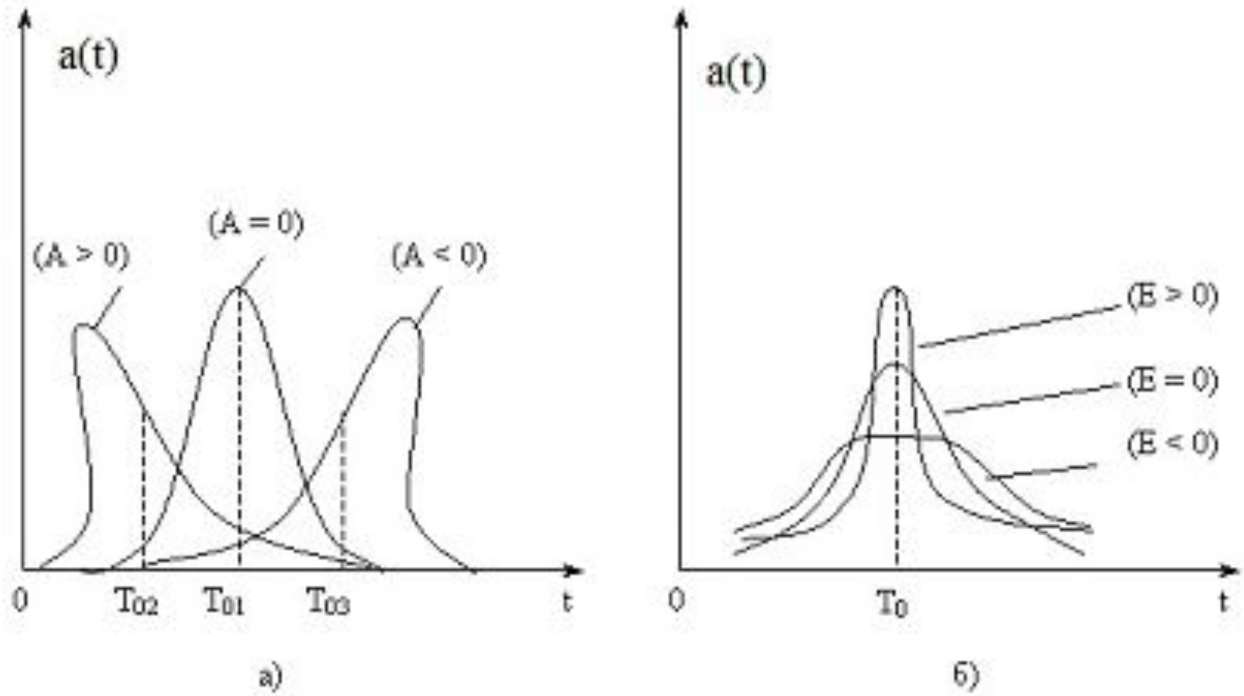

Рис. 5 *Выбор закона распределения*

Выбор закона распределения состоит в подборе аналитической функции, наилучшим образом аппроксимирующей эмпирические функции надежности. Выбор - процедура неопределенная и во многом субъективная, при этом многое зависит от априорных знаний об объекте и его свойствах, условиях работы, а также анализа вида графиков $P(t)$, $a(t)$ или $\lambda\,(t)$.

Очевидно, что выбор распределения будет зависеть, прежде всего, от вида эмпирической функции ПРО $a(t)$, а также от вида - $\lambda\,(t)$. Т.е., выбор закона распределения носит характер принятия той или иной гипотезы.

3 Расчет критерия согласия

Критерий согласия – это критерий проверки гипотезы о том, что случайная величина Т, представленная своей выборкой, имеет распределение предполагаемого типа.

Проверка состоит в следующем. Рассчитывается критерий, как некоторая мера расхождения теоретического и эмпирического распределений, причем эта мера является случайной величиной. Чем больше мера расхождения, тем хуже согласованность эмпирического распределения с теоретическим, и гипотезу о выборе закона распределения следует отвергнуть, как мало правдоподобную. В противном случае – экспериментальные данные не противоречат принятому распределению. Из известных критериев наиболее применяемый критерий согласия $\chi 2$ (хи-квадрат) Пирсона.

Проверка согласованности распределений по критерию χ^2 производится следующим образом:

- рассчитывается критерий χ^2 (мера расхождения)

$$\chi^2 = N_0 \sum_1^k \frac{\left(\overline{P}_i - P_i\right)^2}{P_i},$$

где $P_i = a(\tilde{t}_i)\Delta t$ – теоретическая частота (вероятность) попадания случайной величины в интервал $[t_i, t_i + \Delta t]$;

- определяется «число степеней свободы» $R = k - L$,

где L – число независимых условий, наложенных на частоты $\overline{P}_i$, например:

а) условие $\sum \overline{P}_i = 1$;

б) условие совпадения $\sum \tilde{t}_i \cdot \overline{P}_i = T_{cp}$;

в) условие совпадения $\sum (\tilde{t}_i - \overline{T}_{cp})^2 \cdot \overline{P}_i = D$ и т. д.

Чаще всего $L = 3$. Чем больше число степеней свободы, тем больше случайная величина χ^2 подчиняется распределению Пирсона;

- по рассчитанным χ^2 и R определяется вероятность P того, что величина, имеющая распределение Пирсона с R степенями свободы, превзойдет рассчитанное значение χ^2.

Ответ на вопрос: насколько мала должна быть вероятность P, чтобы отбросить гипотезу о выборе того или иного закона распределения – во многом неопределенный.

На практике, если $P < 0{,}1$, то рекомендуется подыскать другой закон распределения.

В целом, с помощью критерия согласия, можно опровергнуть выбранную гипотезу, если же P достаточно велика, то это не может служить доказательством правильности гипотезы, а указывает лишь на то, что гипотеза не противоречит данным эксперимента.

4 Законы распределения наработки до отказа

Вид аналитической функции, описывающей изменение показателей надежности $P(t)$, $a(t)$ или $\lambda(t)$, определяет ***закон распределения случайной величины***, который выбирается в зависимости от свойств объекта, его условий работы и характера отказов. Наиболее распространенными являются следующие законы распределения:

1. Экспоненциальное распределение;
2. Распределение Релея;
3. Распределение Вейбулла;
4. Классическое нормальное распределение (нормальный закон распределения наработки до отказа);
5. Логарифмически нормальное распределение;
6. Гамма-распределение.