Линейная алгебра

- Определители второго порядка
- Системы из двух линейных уравнений с двумя неизвестными
- Определители n – ого порядка
- Методы вычисления определителей
- Системы из n линейных уравнений с n неизвестными.

Определители 2 порядка

Определители широко применяются во многих разделах высшей математики, в теоретической механике, физике и т.д. для сокращения записей и удобства вычислений.

Определитель 2 - го порядка это число, записанное в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Элементы определителя,

Индексы

Номер строки

Номер столбца

из произведения элементов главной диагонали вычитается произведение элементов побочной диагонали.

Главная диагональ определителя

Побочная диагональ определителя

Системы из двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Центральная задача линейной алгебры - это решение систем линейных уравнений.

Наиболее простым, является случай, когда число неизвестных ***n*** равно числу уравнений ***n***. Пусть ***n* = 2**:

a_{ij} - коэффициенты при неизвестных.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Номер неизвестного,

Номер уравнения

Свободные члены уравнения

Решение данной системы - это пара чисел x_1 и x_2, которая при подстановке обращает оба этих уравнения в тождества.

Системы из двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot a_{22} \cdot x_1 + a_{12} \cdot a_{22} \cdot x_2 = b_1 \cdot a_{22} \\ a_{12} \cdot a_{21} \cdot x_1 + a_{12} \cdot a_{22} \cdot x_2 = a_{12} \cdot b_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) \cdot x_1 = a_{22} \cdot b_1 - a_{12} \cdot b_2$$

Обозначим: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot b_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta \cdot x_1 = \Delta_1$$

Системы из двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Аналогично получим: $\Delta \cdot x_2 = \Delta_2$

обозначив: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1$

Система уравнений будет иметь вид: $\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1 \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2 \end{cases}$

Если $\Delta \neq 0$, то решение системы находится по формулам:

$$\boxed{x_1 = \frac{\boxed{\Delta_1}}{\boxed{\Delta}}; \quad x_2 = \frac{\boxed{\Delta_2}}{\boxed{\Delta}}}$$

Вспомогательные определители системы

Главный определитель системы

Формулы Крамера

Системы из двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

Вычислим главный и вспомогательные определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 7$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 5 = -9$$

Найдем решение системы по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{7}{1} = 7; \qquad x_2 = \frac{-9}{1} = -9$$

Определители n – ого порядка

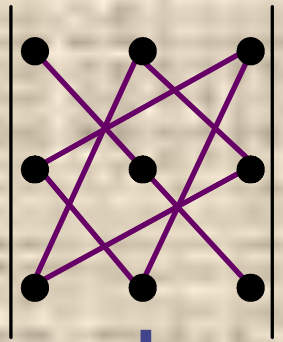
Определителем *n* – ого порядка называется число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

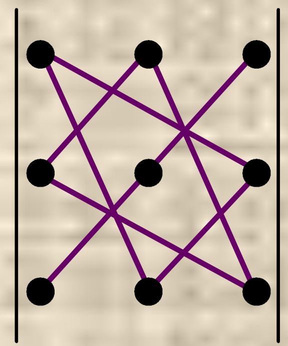
Методы вычисления определителей *n* – ого порядка рассмотрим на примере вычисления определителей третьего порядка.

Методы вычисления определителей

1 **Метод треугольника**



+



–

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 1 + 3\cdot 4\cdot 5 + 2\cdot 6\cdot 0 - 5\cdot(-1)\cdot 0$$

$$- 2\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 6\cdot 4 = 29$$

Метод треугольника применим только для определителей 3 порядка

Методы вычисления определителей

2 **Метод разложения определителя по элементам строки (столбца)**

Определитель второго порядка, который получается из определителя 3 - го порядка путем вычеркивания *i* - й строки и *j* - го столбца, т.е. строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} называется ***минором элемента*** и обозначается M_{ij}

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется

$$A_{ij} = M_{ij} \cdot (-1)^{i+j}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = M_{23} \cdot (-1)^{2+3} = -M_{23}$$

Методы вычисления определителей

Величина определителя равна сумме произведений элементов какой – либо строки (столбца) определителя на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

Разложение определителя по элементам *i – ой* строки

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

Разложение определителя по элементам *j – ого* столбца

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+1} + 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2} + 0\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+3}$$

$$= 2\cdot(3\cdot1-5\cdot1)-1\cdot(0\cdot1-2\cdot1) = -2$$

Методы вычисления определителей

3 Использование свойств определителя

Свойства определителя:

Величина определителя:

- равна нулю, если элементы какого - либо столбца или строки равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21} = 0$$

- равна нулю, если соответствующие элементы двух строк (столбцов) равны

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{12} = 0$$

Методы вычисления определителей

- меняет знак, если поменять местами строки (столбцы):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

- увеличивается в *k* раз, если элементы какого - либо столбца (строки) увеличить в *k* раз:

$$\begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \cdot a_{11} \cdot a_{22} - k \cdot a_{12} \cdot a_{21} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- не меняется при замене строк соответствующими столбцами:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Методы вычисления определителей

- не меняется, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольный множитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + a_{11}ka_{12} - a_{21}a_{12} - ka_{11}a_{12} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- Если определитель имеет так называемый треугольный вид, то он вычисляется как произведение чисел, стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

Методы вычисления определителей

$$\begin{vmatrix}1&3&1\\2&1&3\\-1&4&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&3&1\\0&-5&1\\-1&4&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&3&1\\0&-5&1\\0&7&2\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}-5&1\\7&2\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+1} =$$

$$= -5\cdot 2 - 7\cdot 1 = -17$$

Разложим определитель по элементам 1 столбца

Также, используя свойства, можно привести определитель к треугольному виду и вычислить по последнему свойству.

Системы из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

Рассмотрим общую квадратную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Система линейных уравнений называется ***совместной***, если она имеет решение и ***несовместной***, если она не имеет решений.

Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение и ***неопределенной***, если она имеет бесконечное множество решений.

Система называется ***однородной***, если $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$

Однородная система совместна, так как всегда имеет нулевое решение.

Системы из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

Для сокращения выкладок запишем систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Вспомогательные определители получаются из главного определителя, если заменить соответствующий столбец столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Системы из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

По величине главного и вспомогательных определителей можно судить о характере системы:

- Если $\Delta \neq 0$ то система совместна и определенна.
- Если $\Delta = 0, \ \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ то система совместна и неопределенна.
- Если $\Delta = 0$, но $\Delta_1 \neq 0$ или $\Delta_2 \neq 0$ или $\Delta_3 \neq 0$ то система несовместна.

В общем случае будем иметь *n +1* определителей *n – ого* порядка

$$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots, \Delta_{n-2}, \Delta_{n-1}, \Delta_n$$

и, если $\Delta \neq 0$, то решение системы находится по формулам Крамера:

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \ldots \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}}$$