

ВОЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО
ЧИСЛА В СТЕПЕНЬ. ИЗВЛЕЧЕНИЕ
КУБИЧЕСКОГО КОРНЯ ИЗ
КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА.

РАБОТА ВЫПОЛНЕНА УЧЕНИКАМИ 10 «В»:
МАЛАХОВЫМ ИВАНОМ,
ЕЛИСЕЕВЫМ НИКИТОЙ,
ШАРЫПИНЫМ ЕВГЕНИЕМ.

ТЕОРЕМА 1 (ФОРМУЛА МУАВРА)

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, (\operatorname{Re} \alpha + i \operatorname{Im} \alpha)^n = (\operatorname{Re} \alpha + i \operatorname{Im} \alpha)^n = \sum$$

Понимая, что $\alpha = \operatorname{Re} \alpha + i \operatorname{Im} \alpha$ – это комплексное число, то формула Муавра позволяет возвести комплексное число в n -ю степень. Для этого достаточно возвести модуль числа в n -ю степень и умножить аргумент на n .

Для возведения комплексного числа в n -ю степень следует:

- модуль числа возвести в n -ю степень;*
- аргумент числа умножить на n .*

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

а) $(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^6$

По формуле Муавра, $(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^6 = \cos(15^\circ \cdot 6) + i \sin(15^\circ \cdot 6) = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ = i$.

б) $(\sqrt{3} - i)^{11}$

Модуль числа $\sqrt{3} - i$ равен 2, а его аргумент равен $-\frac{\pi}{6}$. \Rightarrow

модуль числа $(\sqrt{3} - i)^{11}$ равен $2^{11} = 2048$, а $\arg((\sqrt{3} - i)^{11}) =$

$$= -\frac{11\pi}{6} + 2\pi = \frac{\pi}{6}. \quad \text{Поэтому} \quad (\sqrt{3} - i)^{11} = 2048 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) =$$

$$= 2048 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right) = 1024(\sqrt{3} - i).$$

СЛЕДСТВИЯ

Следствие 1. $(\rho(\cos \alpha + i \sin \alpha))^n = \rho^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Следствие 2. $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$, $n \in \mathbf{Z}$.

Следствие 3. Если модуль комплексного числа z равен единице, а его аргумент равен $\frac{2\pi}{m}$ ($m = 3, 4, 5, \dots$), то множество степеней $z^0, z^1, z^2, z^3, \dots, z^{m-1}$ образует на комплексной плоскости множество вершин правильного m -угольника, вписанного в единичную окружность

КУБИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ

Определение. Кубическим корнем (или корнем третьей степени) из комплексного числа z называют комплексное число, куб которого равен z . Множество всех кубических корней из комплексного числа z обозначают $\sqrt[3]{z}$. Извлечь кубический корень из комплексного числа z — это значит найти множество $\sqrt[3]{z}$.

ТЕОРЕМА N°2

$$\sqrt[3]{z} = \left\{ \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{3} \right) \mid k = 0, 1, 2 \right\}.$$

Для каждого ненулевого комплексного числа количество корней третьей степени из него равно трем.

Теорема 2 позволяет составить геометрический алгоритм извлечения кубического корня.

**Алгоритм извлечения кубического корня
из комплексного числа z**

1. Найти модуль ρ и аргумент α этого числа.
2. Провести окружность радиусом $\sqrt[3]{\rho}$ с центром в начале координат.
3. Провести из начала координат луч под углом $\frac{\alpha}{3}$ к положительному направлению оси абсцисс.
4. Найти точку z_0 пересечения окружности и луча.
5. Построить правильный треугольник, вписанный в окружность, одна из вершин которого равна z_0 .

Вершины треугольника образуют множество всех корней 3-й степени из числа z

