Частные производные функции нескольких переменных.

$$z = f(x, y)$$

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$z_x'; \quad \frac{\partial z}{\partial x}; \quad f_x'; \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$z_x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$z_y' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$z = x^y$$

$$z = \sqrt{x^2 + 2y} \qquad z = \frac{1}{2}x^2 \cdot tg(2x+3y)$$

Частные производные высших порядков

Т.е. $z = f(x, y)$ $D \in R^2$

$$z'_x \quad \rightarrow \quad z''_{xx} = (z'_x)'_x; \qquad z''_{xy} = (z'_x)'_y$$

$$z'_y \quad \rightarrow \quad z''_{yy} = (z'_y)'_y; \qquad z''_{yx} = (z'_y)'_x$$

Замечание: $z''_{xy} = z''_{yx}$

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad z''_{yx} = z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Дифференциал функции нескольких переменных

Определение. Дифференциалом функции нескольких переменных называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных, т.е.

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y$$

Учитывая, что для функций $f(x,y) = x$ и $g(x,y) = y$ выполнено $\Delta x = dx; \quad \Delta y = dy$, имеем

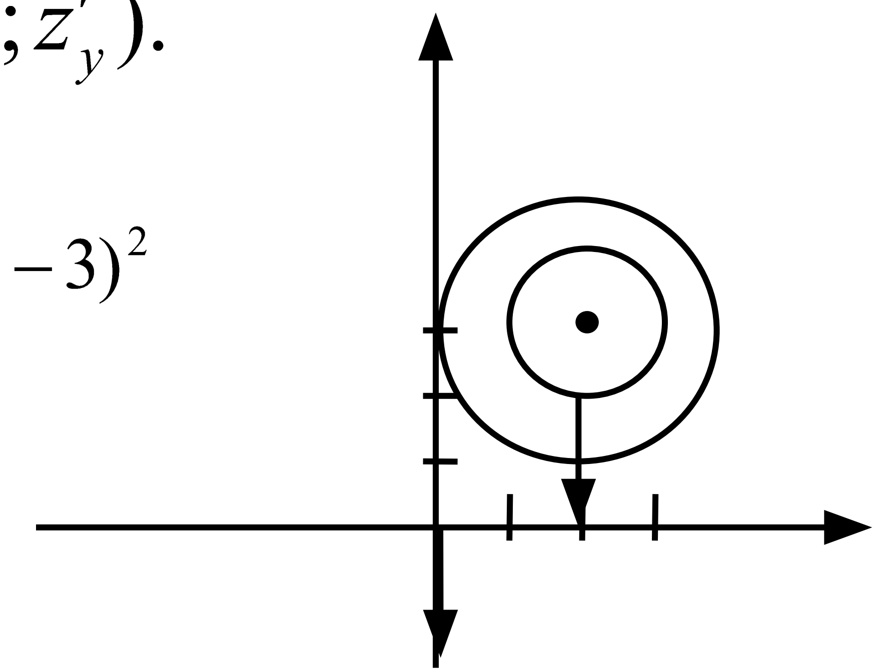
$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

Градиент функции нескольких переменных

Определение. Градиентом функции $z = f(x, y)$ называется вектор с координатами $(z'_x; z'_y)$.

Обозначается $\nabla z = (z'_x; z'_y)$.

Пример. $z = (x-2)^2 + (y-3)^2$

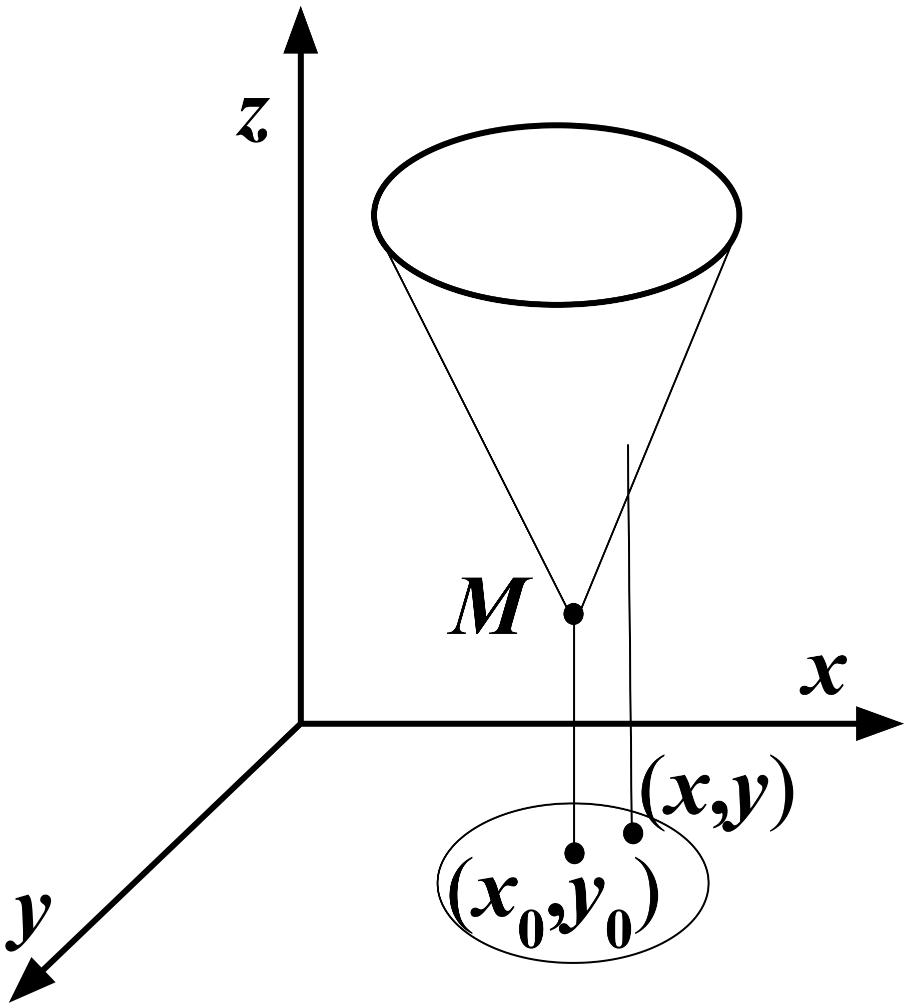


Экстремум функции нескольких переменных.

Определение. Пусть функция $z=f(x; y)$ определена на множестве $D\subset R^2$. Точка $M(x_0;y_0)$ называется точкой максимума (минимума) функции $z=f(x;y)$, если существует окрестность точки M такая, что для каждой точки $(x; y)$ отличной от $(x_0; y_0)$ из этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

$$\left(f(x_0, y_0) \leq f(x, y)\right)$$



$M(x_0, y_0)$ –

– точка минимума,

$$z(x_0, y_0) \le z(x, y)$$

Теорема. (необходимое условие экстремума).

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Замечание:

Точки, в которых выполнены необходимые условия экстремума функции

$z = f(x;\, y)$, т.е.

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

называются <u>критическими или стационарными</u>.

Пример. $z = xy$

$$\begin{cases} z'_x = y \\ z'_y = x \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (0,0)$$

− критическая точка.

$z(0,0)=0$,

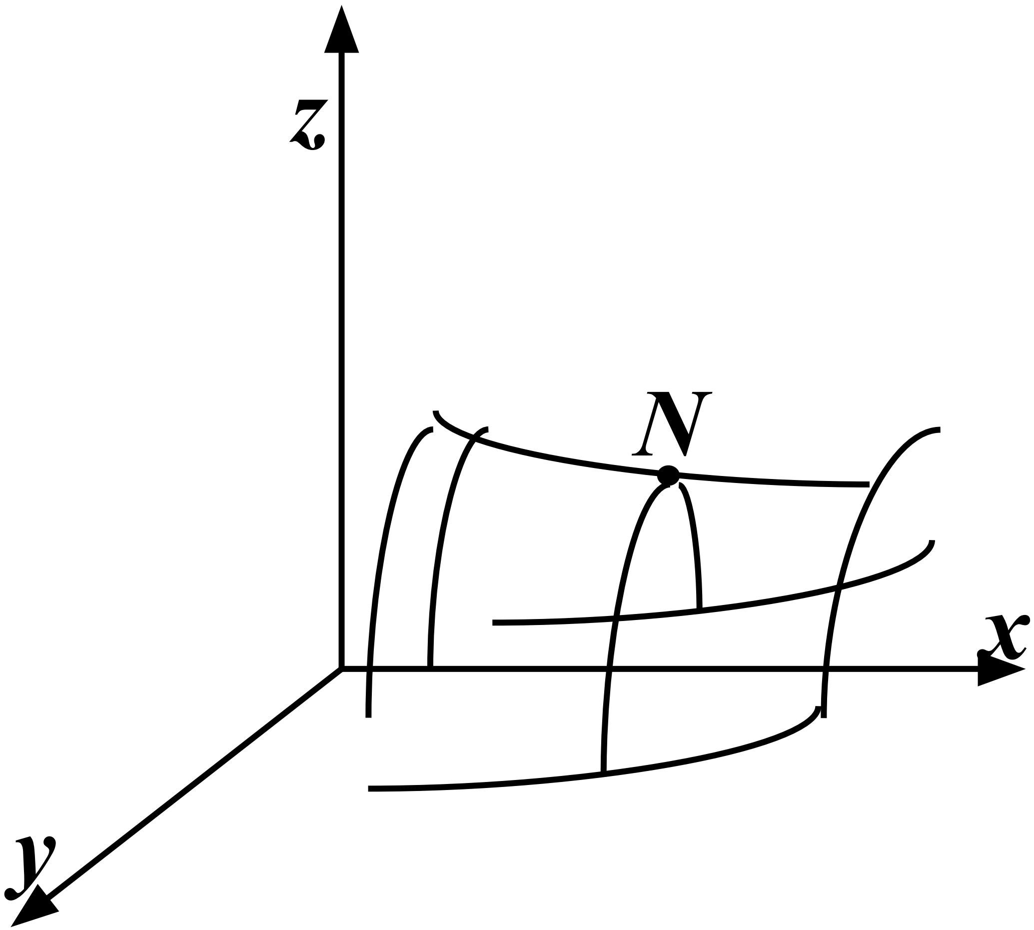
но существует точка (1,−1) такая, что

$z(1,-1)=-1<z(0,0)$;

или точка (2,3) такая, что $z(2,3)=6>z(0,0)$.

Следовательно, необходимого условия недостаточно, для того чтобы сказать, что критическая точка является экстремумом.

Пример.



<u>Теорема</u>. (достаточное условие экстремума функции 2-х переменных).

Пусть функция $z = f(x, y)$

а) определена в некоторой окрестности критической точки (x_0;y_0), в которой частные производные равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

б) имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка такие, что

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) = B, \quad f''_{yy}(x_0, y_0) = C$$

Тогда:

1) если выражение $\Delta = AC - B^2 > 0$

то в точке $(x_0;y_0)$ существует экстремум, причем

если $\Delta = AC - B^2 > 0$ и $A>0$, то это min,

если $\Delta = AC - B^2 > 0$ и $A<0$, то это max,

2) если $\Delta = AC - B^2 < 0$,

то экстремума в точке $(x_0;y_0)$ нет;

3) если $\Delta = AC - B^2 = 0$,

то вопрос об экстремуме остается открытым (нужны дополнительные исследования).

Схема исследования функции на экстремум

1. Определить область определения функции

$$z = f(x, y)$$

2. Найти z'_x и z'_y и решить систему $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$

Найти критические точки.

3. Найти частные производные второго порядка. Для каждой критической точки вычислить

$$A, B, C, \Delta = AC - B^2$$

С помощью достаточного условия сделать вывод о наличии экстремумов.

4. Найти значение функции в точках экстремума.

Пример. $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$

1. $D(z) = R^2$

2. $z'_x = 6xy - 3x^2$

$z'_y = 3x^2 - 4y^3$

$$\begin{cases} 3x(2y - x) = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2y - x = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y \\ 3 \cdot 4y^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

$$4y^2(3 - y) = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = 6 \end{cases}$$

Таким образом

$M_1(0;0)$, $M_2(6;3)$ − критические точки.

3. $z''_{xx} = 6y - 6x;$ $z''_{xy} = 6x$ $z''_{yy} = -12y^2$

Для точки $M_1(0;0)$:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \Delta = AC - B^2 = 0$$

Следовательно, нужны дополнительные исследования.

Для точки $M_2(6;3)$:

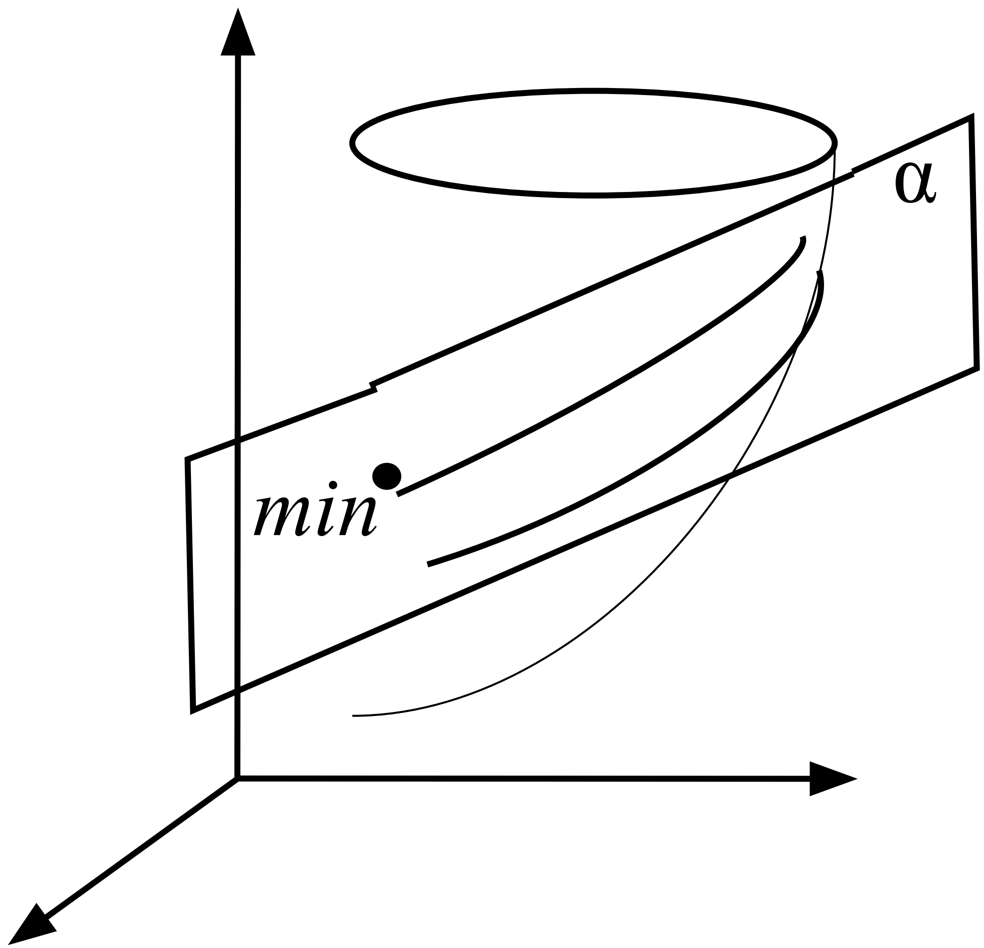
$$A = -18, \; B = 36, \; C = -108, \; \Delta = AC - B^2 = 648 > 0$$

$\Delta > 0, \quad A < 0$ Следовательно, точка $M_2(6;3)$:

является точкой максимума.

4. $z_{\max}(6;3) = 27$

Условный экстремум функции нескольких переменных.



Определение. Точка $(x_0; y_0)$ называется <u>точкой условного максимума (минимума)</u> функции $z=f(x;y)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $(x; y)$ из этой окрестности и удовлетворяющих условию $g(x,y)=0$ выполняется неравенство:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$
$$\left(f(x_0, y_0) \leq f(x, y)\right)$$

<u>**1 способ**</u>. (Сведение задачи на условный экстремум к задаче отыскания экстремума функции одной переменной).

<u>1 способ</u>.

Пример. $z = xy$ $x + y = 1$

<u>2 способ</u>. **<u>Метод Лагранжа.</u>**

Строим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = f'_x(x, y) + \lambda \cdot g'_x(x, y) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = f'_y(x, y) + \lambda \cdot g'_y(x, y) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Пример 1.

$$z = xy \qquad x + y = 1$$

Пример 2.

$$z = xy \qquad x^2 + y^2 = 2$$