Теория игр
Лекция 1-2
Введение в матричные игры

Введение в матричные игры

1. *История предмета теории игр*
2. *Представление игры*
3. *Классификация игр*
4. *Решение матричных игр в чистых стратегиях*
5. *Смешанные стратегии*
6. *Методы решения матричных игр*

Изучение курса теории игр

История предмета теории игр

- **Теория игр** является частью ***теории принятия решений.*** В теории принятия решений у лица, принимающего решения (**ЛПР**), имеется ряд альтернатив и его целью является выбор ***наилучшей альтернативы***, принятие оптимального решения.
- Различают ***задачу оптимизации*** **–**принятие оптимального решения **одним ЛПР** в **бесконфликтной ситуации** – и **задачу теории игр**, занимающуюся отысканием **оптимальных решений** для **нескольких ЛПР**(игроков), в рамках их **конфликтного взаимодействия**, обусловленного несовпадением их интересов.

История предмета теории игр

- **Теория игр** — математический метод изучения оптимальных стратегий в играх.
- **Теория игр** – это совокупность математических методов анализа и оценки конфликтных ситуаций.
- Под **игрой** понимается ***процесс***, в котором участвуют две и более сторон, ведущих борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою **цель** и использует некоторую **стратегию**, которая может вести к **выигрышу** или **проигрышу** — в зависимости от поведения других игроков.
- **Теория игр** изучает ***ситуации принятия решений*** несколькими взаимодействующими игроками.
- **Теория игр** помогает ***выбрать*** **лучшие стратегии** с учётом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках.

История предмета теории игр

- **Содержание теории игр**:

1. установление принципов ***оптимального поведения*** в условиях неопределенности (конфликта),
2. ***доказательство существования решений***, удовлетворяющих этим принципам,
3. ***указание алгоритмов*** нахождения решений, их реализация.

- **Моделями теории игр** можно описать ***биологические, экономические, правовые, классовые, военные конфликты, взаимодействие человека с природой***.
- Все такие модели в теории игр принято называть **играми**.

История предмета теории игр

- **Оптимальные решения** или **стратегии** в математическом моделировании предлагались ещё в **XVIII** в. ***Задачи производства и ценообразования в условиях олигополии***, которые стали позже хрестоматийными примерами **теории игр**, рассматривались в **XIX** в. А. Курно и Ж.Бертраном. В начале **XX** в. Э.Ласкер, Э.Цермело, Э.Борель выдвигают ***идею математической теории конфликта интересов***.
- **Математическая теория игр** берёт своё начало из неоклассической экономики. Впервые математические аспекты и приложения теории были изложены в классической книге **1944** года **Джона фон Неймана** и **Оскара Моргенштерна** «***Теория игр и экономическое поведение***»

История предмета теории игр

- **Дж. Нэш** в 1949 году пишет диссертацию по теории игр, через 45 лет он получает Нобелевскую премию по экономике. В Принстонском университете **Дж. Нэш** посещал лекции **Дж. Неймана**. В своих трудах **Дж. Нэш** разработал ***принципы «управленческой динамики».*** Первые концепции теории игр анализировали **антагонистические игры**, когда есть **проигравшие** и **выигравшие** за их счет игроки. **Нэш** разрабатывает методы анализа, в которых все участники или **выигрывают**, или **терпят поражение**. Эти ситуации получили названия «**равновесие по Нэшу**», или «**некооперативное равновесие**».

История предмета теории игр

- Игрокам **выгодно** сохранять это ***равновесие***, так как любое изменение **ухудшит** их положение. Эти работы **Дж. Нэша** сделали серьёзный вклад в развитие ***теории игр***, были **пересмотрены** математические инструменты экономического моделирования. **Дж. Нэш** показывает, что классический подход к конкуренции **А.Смита**, когда ***каждый сам за себя***, **<u>не оптимален</u>**. Более **оптимальны стратегии**, когда ***<u>каждый старается сделать лучше для себя, делая лучше для других.</u>***

История предмета теории игр

- Хотя **теория игр** первоначально и рассматривала ***экономические модели***, вплоть до 1950-х она оставалась формальной **теорией в рамках математики**. С 1950-х гг. начинаются попытки применить методы теории игр не только в экономике, но в **биологии, кибернетике, технике, антропологии и военной области.**
- С середины 1980-х гг. начинается **активное практическое использование** теории игр, особенно в ***экономике и менеджменте.*** За последние **20 — 30** лет значение **теории игр** и интерес значительно растет, некоторые направления современной экономической теории невозможно изложить без применения теории игр.

История предмета теории игр

- Большим вкладом в применение теории игр стала работа **Томаса Шеллинга**, нобелевского лауреата по экономике 2005 г. «***Стратегия конфликта***».
- Игры также используются для обучения **в бизнес-кейсах**, семинарах Г. П. Щедровицкого, основоположника организационно-деятельностного подхода. Понятие игры используется в ***психологии и культурологии.***
- Математическая теория игр сейчас бурно развивается, рассматриваются **<u>динамические игры</u>.**

История предмета теории игр

- **Нобелевскими лауреатами** по экономике за достижения в области ***теории игр и экономической теории*** стали: Роберт Ауманн, Райнхард Зелтен, Джон Нэш, Джон Харсаньи, Уильям Викри, Джеймс Миррлис, Томас Шеллинг, Джордж Акерлоф, Майкл Спенс, Джозеф Стиглиц, Леонид Гурвиц, Эрик Мэскин, Роджер Майерсон.
- Однако, **математический аппарат теории игр — затратен.** Его применяют для **оправданных задач**: политика, экономика монополий и распределения рыночной власти и т. п.

История предмета теории игр

- Лауреатами Нобелевской премии в экономике за **2012** стали **Элвин Рот** из Гарварда, США, и **Ллойд Шепли** из Калифорнийского университета, США за цикл работ - «Теория устойчивых распределений и практика рыночного конструирования». Весь механизм базируется на алгоритме **Гейла — Шепли**, разработанном в **1962** году **Ллойдом Шепли** и **Дэвидом Гейлом**.
- Лауреатами Нобелевской премии в экономике за **2014** стал **Жан Тироль** (*Анализ рыночной власти и её регулирования*)

Представление игры

- **Игры** представляют собой ***строго определённые математические объекты***.
- **Игра** образуется ***игроками, набором стратегий*** для каждого игрока ***и указания выигрышей, или платежей***, игроков для каждой комбинации стратегий.
- Большинство **кооперативных игр описываются характеристической функцией**, в то время как для остальных видов чаще используют **нормальную или экстенсивную форму**.

Представление игры

- **Характеризующие признаки игры** как математической модели ситуации:

1. ***наличие нескольких участников***;
2. ***неопределенность поведения участников***, связанная с наличием у каждого из них нескольких вариантов действий;
3. ***различие (несовпадение) интересов участников***;
4. ***взаимосвязанность поведения участников***, поскольку результат, получаемый каждым из них, зависит от поведения всех участников;
5. ***наличие правил поведения***, известных всем участникам.

Представление игры

- *Определение*:

Игра – математическая модель конфликтной ситуации.

- *Определение*:

Ход в игре – выбор и осуществление игроком одного из предусмотренных правилами игры действий.

- *Определение*:

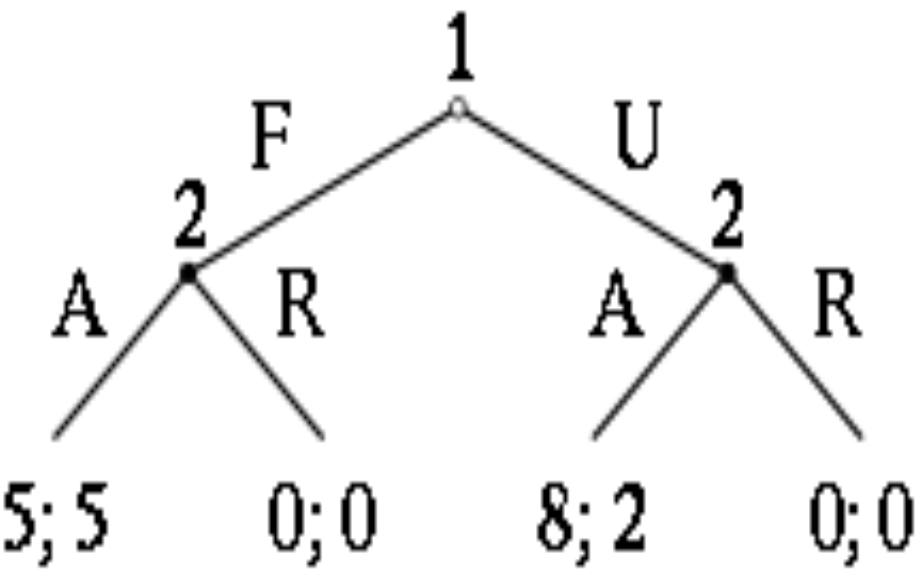
Стратегия – последовательность всех ходов до окончания игры.

Представление игры

- **Анализ** конфликтной ситуации начинается с ***построения формальной модели***, т.е. превращения ее в **игру.**
- Существует несколько способов представления игры:

1. ***Развернутая***(экстенсивная, или позиционная) форма;
2. ***Стратегическая*** (нормальная) форма;
3. ***Байесова форма***.

Экстенсивная форма



Игры в **экстенсивной**, или **расширенной**, **развернутой** форме представляются в виде ориентированного дерева, где каждая вершина соответствует **ситуации выбора** игроком своей ***стратегии***.

Каждому **игроку** сопоставлен ***целый уровень вершин***. **Платежи** записываются ***внизу дерева***, под каждой листовой (конечной) вершиной.

Нормальная форма

- В **нормальной**, или **стратегической**, форме игра описывается ***платёжной матрицей***. Каждая сторона (точнее, измерение) матрицы — это игрок, **строки** определяют ***стратегии первого игрока***, а **столбцы** — ***второго***. На пересечении двух стратегий можно увидеть **выигрыши**, которые получат игроки.
- В примере , если **игрок 1** выбирает первую стратегию, а **второй игрок** — вторую стратегию, то на пересечении мы видим **(−1, −1)**, это значит, что в результате хода оба игрока потеряли по одному очку.

Нормальная форма

	Игрок 2 стратегия 1	Игрок 2 стратегия 2
Игрок 1 стратегия 1	**4, 3**	**–1, –1**
Игрок 1 стратегия 2	**0, 0**	**3, 4**
Нормальная форма для игры с 2 игроками, у каждого из которых по 2 стратегии.		

2. Классификация игр

- **Игры** можно ***классифицировать*** по различным признакам:

1. ***стратегические и чисто случайные***,
2. ***бескоалиционные и коалиционные***,
3. игры 1, 2, …, n лиц (***по числу игроков***),
4. ***конечные*** и ***бесконечные*** (***по числу стратегий***),
5. игры в ***нормальной форме*** и ***динамические***,
6. с ***нулевой суммой*** («***антагонистические***») и с ненулевой суммой.
7. ***Статические*** и ***динамические*** игры.
8. Игры с ***полной*** и ***неполной*** информацией.
9. Игры с ***совершенной*** и ***несовершенной*** информацией.
10. ***Метаигры***.

2. Классификация игр

- *Определение:*

  В играх с нулевой суммой одни игроки выигрывают за счет других, т.е. **суммарный выигрыш всех игроков** равен **нулю**.

- *Определение:*

  Парные игры с нулевой суммой называются **антагонистическими**.

- *Определение:*

  Конечные антагонистические игры называются **матричными** играми.

Решение матричных игр в чистых стратегиях

- Рассмотрим **простейшую модель** – ***игру***, в которой участвуют ***два игрока (парная)***, множество стратегий каждого игрока ***конечно (конечная)***, а выигрыш одного игрока равен проигрышу другого (**бескоалиционная, конечная, антагонистическая парная игра**). Такую игру ***(Г)*** называют **матричной**. Она определяется тройкой ***Г=(X,Y,K),*** где ***X*** – множество стратегий ***1-го игрока***, ***Y*** – множество стратегий ***2-го игрока***, ***K=K(x,y)*** – **функция выигрыша** (выигрыш 1-го игрока и соответственно проигрыш 2-го при условии, что 1-й игрок выбрал стратегию ***x*** , а 2-й – стратегию ***y***). Пару ***(x,y)*** называют **ситуацией** в игре ***Г***.

Решение матричных игр в чистых стратегиях

1. Пусть игрок P_1 располагает m стратегиями $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_m)$, а игрок P_2 располагает n стратегиями $(a^1, \ldots, a^j, \ldots, a^n)$.
2. Выбор игроком P_1 стратегии a_i (строки a_i матрицы A) и выбор игроком P_2 стратегии a^j (столбца a^j матрицы A) приводит к тому, что игрок P_1 **выигрывает** некоторую величину a_{ij} ($a_{ij} > 0$), а игрок P_2 ее **проигрывает**. Стратегии называются ***чистыми***. Далее везде для игрока P_1 используем термин **выигрыш**, а для игрока P_2 **проигрыш.**
3. Тогда **игра *Г*** полностью определяется заданием матрицы ***A.*** Матрица $A = (a_{ij})_{mn}$ называется **матрицей игры** или **платежной матрицей.**

Платежная матрица

		Стратегии игрока P_2				
		a^1	…	a^j	…	a^n
Стратегии игрока P_1	a_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
	…	…	…	…	…	…
	a_i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}
	…	…	…	…	…	…
	a_m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Решение матричных игр в чистых стратегиях

1. Если **1-й игрок** выбрал стратегию ***i***, то в худшем случае он выиграет ***min(j) a*** $_{ij}$ при $1 \le j \le n$. Поэтому он всегда может гарантировать себе выигрыш ***ά = max(i) α$_i$ = max(i) min(j) a*** $_{ij}$, обозначим его ***ά*** – **нижняя цена игры**, или **максимин**, соответствующая стратегия ***1-го игрока*** называется **максиминной**. Таким образом нижняя цена игры ***ά*** есть ***максимальный гарантированный* выигрыш *1-го игрока ,*** какую бы стратегию не выбрал ***2-ой игрок.***

Решение матричных игр в чистых стратегиях

1. **Второй игрок**, выбрав стратегию ***j***, в худшем случае проиграет $\max(i)\ a_{ij}$ при $1 \leq i \leq m$, а значит, может гарантировать себе проигрыш , $\underline{\alpha} = \min(j)\ \alpha^j = \min(j)\ \max(i)\ a_{ij}$ обозначим его $\underline{\alpha} = \beta$ **-верхняя цена игры**, или **минимакс**, соответствующая стратегия **2-го игрока** называется **минимаксной**. Итак, верхняя цена игры $\underline{\alpha} = \beta$ есть ***минимально гарантированный*** **проигрыш** 2-го игрока при любом выборе стратегии 1-ым игроком.

Схема максимина и минимакса

a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	α_1
…	…	…	…	…	…
a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}	α_i
…	…	…	…	…	…
a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	α_m
α^1	…	α^j	…	α^n	min max

<u>Орлянка</u>. Нижняя цена игры. максимин

1	-<u>1</u>	***-1***
-<u>1</u>	1	***-1***
		-1

$\alpha_1 = \alpha_2 = -1$, $\underline{\alpha} = -1$ - нижняя цена игры

Орлянка. Верхняя цена. Минимакс.

<u>1</u>	-1	
-1	<u>1</u>	
1	*1*	*1*

$\alpha^1 = \alpha^2 = 1$, $\acute{\alpha} = 1$ - верхняя цена игры

<u>α</u> = -1 нижняя цена игры < 1 = $\acute{\alpha}$

<u>Игра мора</u>. Нижняя цена максимин

0	<u>-3</u>	2	0	***-3***
3	0	0	-<u>4</u>	***-4***
-<u>2</u>	0	0	3	***-2***
0	4	-<u>3</u>	0	***-3***
				-2

$\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = -4$, $\alpha_3 = -2$, $\alpha_4 = -3$, $\underline{\alpha} = -2$ нижняя цена

Игра мора. Верхняя цена Минимакс.

0	-3	$\underline{2}$	0	
$\underline{3}$	0	0	-4	
-2	0	0	$\underline{3}$	
0	$\underline{4}$	-3	0	
3	*4*	*2*	*3*	*2*

$\alpha^{1} = 3$, $\alpha^{2} = 4$, $\alpha^{3} = 2$, $\alpha^{4} = 3$, ά = 2.

$\underline{\alpha} = -2$ нижняя цена игры $< 2 =$ ά

Решение матричных игр в чистых стратегиях

1. Справедливо неравенство***:*** $\underline{\alpha} \leq \acute{\alpha}$.
2. В игре ***Г*** естественно считать **оптимальной** такую ситуацию ***(i,j),*** от которой ни одному из игроков невыгодно отклоняться.
3. Ситуация ***(i*,j*)*** называется **ситуацией равновесия**, или седловой точкой, если для любых $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, выполняется неравенство $a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$. Соответствующие стратегии ***i*, j**** называются **оптимальными чистыми стратегиями** 1-го и 2-го игроков, а число $a_{i^*j^*}$ называется **ценой игры**. Элемент $a_{i^*j^*}$ является одновременно ***минимумом в своей строке*** и ***максимумом в своем столбце.***
4. Ситуация **равновесия** существует тогда и только тогда, когда $\underline{\alpha} = \acute{\alpha}$ (это значение и является **ценой игры**).

Решение матричных игр в чистых стратегиях

1. Если **_α_** = ***ά*** , то говорят, что матричная игра имеет ***решение в чистых стратегиях.*** Соответствующие максиминная и минимаксная стратегии (a_{i0} и a^{j0}) называются ***оптимальными (чистыми) стратегиями*** матричной игры. **Цена игры _α_** = ***ά*** равна максимальному гарантированному выигрышу 1-го игрока и минимальному гарантированному проигрышу 2-го игрока. При **_α_** = ***ά*** имеет место **наилучшее решение для обоих игроков.**
2. Если **_α_** < ***ά ,*** то говорят, что матричная игра ***не имеет решения (в чистых стратегиях).***
3. Для одних игр выполняется равенство, а для других неравенство (орлянка, мора).

Решение матричных игр в чистых стратегиях

- Появление равенства $\alpha = \acute{\alpha}$ или неравенства $\alpha < \acute{\alpha}$ целиком обусловлено только платежной матрицей ***A.***
- Для любой матрицы ***A*** с размерами $m \times n$ справедливо следующее утверждение: если $\max(i)\ \min(j)\ a_{ij} = \min(j)\ \max(i)\ a_{ij} = v$, то существует элемент $a_{i0\,j0}$ матрицы ***A*** такой, что для любого номера i $(1,2,3,\ldots.m)$ и j $(1,2,3,\ldots.n)$ имеет место цепочка неравенств:

$$a_{i\,j0} \leq a_{i0\,j0} \leq a_{i0\,j} \text{ и } v = a_{i0\,j0}.$$

(это седловой элемент (седловая точка) матрицы ***A.*** Справедливо и обратное утверждение.

Решение матричных игр в чистых стратегиях

-<u>2</u>	0	4	2	5	***-2***
0	-1	3	1	-<u>3</u>	***-3***
2	**<u>1</u>***	5	3	6	***1****
-<u>1</u>	0	2	2	4	***-1***
2	***1****	***5***	***3***	***6***	***1****

Цена матричной игры ***если существует*** , то **единственна**, но **седловой элемент** может быть ***единственным или множественным***.

Решение матричных игр в чистых стратегиях

- **Доминирование** в теории игр — ситуация, при которой ***одна из стратегий*** некоторого игрока **дает больший выигрыш**, нежели другая, при любых действиях его оппонентов. Обратное понятие, **нетранзитивность**, возникает, если ***некоторая стратегия*** может давать **меньшие выигрыши**, чем другая, в зависимости от поведения остальных участников.
- Понятие **доминирования** используется при ***решении*** или ***упрощении*** некоторых типов

Матричные игры

- Рассмотрим **матричную игру**(конечная игра двух лиц с нулевой суммой, ***антагонистичная игра***).
- **Первый игрок** располагает $\boldsymbol{m}$ стратегиями.
- **Второй игрок** - $\boldsymbol{n}$ стратегиями.
- При выборе игроками $\boldsymbol{A_i}$ и $\boldsymbol{B_j}$ стратегий возникает ситуация характеризующаяся выигрышем первого игрока , равным $\boldsymbol{a_{ij}}$.
- Числа $\boldsymbol{a_{ij}}$ являются элементами матрицы $\boldsymbol{A}$ с размерностью $\boldsymbol{m}$ на $\boldsymbol{n}$.

Матричные игры

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{mxn}$$

$$A_1, A_2, \ldots, A_m$$

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

$$\left(a_{ij}\right)_{mxn} \in R$$

Платежная матрица матричной игры

	B_1	B_2		B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

	B_1	B_2		B_n	α
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
β	β_1	β_2	…	β_n	

Нижняя цена игры (максимин):

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \alpha_i$$

Верхняя цена игры (минимакс):

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j \beta_j$$

Пример 1. Найти нижнюю и верхнюю чистые цены матричной игры:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max(4;\quad 3;\quad 5) = 5$$

$$\beta = \min_j \beta_j = \min(5;\quad 6;\quad 7) = 5$$

$$\alpha = \beta = a_{31} = v = 5$$

Пример 2. Найти нижнюю и верхнюю чистые цены матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 9 \\ 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 4$ $\beta = 7$ $4 \le v \le 7$

$\alpha < \beta$

Чистые и смешанные стратегии игроков

$$A_3 : \bar{x} = \begin{pmatrix} 0; & 0; & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 : \bar{y} = \begin{pmatrix} 1; & 0; & 0 \end{pmatrix}$$

Определение:

Чистая стратегия игрока – это возможный ход игрока, выбранный им с вероятностью, равной **единице**.

$$\left(A_i, B_j\right) : \begin{cases} \bar{x} = \left(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\right) \\ \bar{y} = \left(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\right) \end{cases}$$

Игры с седловой точкой 2

- **Теорема 2.** Пусть $f: A \times B \to R$ и существуют $\max\limits_{x \in A} \min\limits_{y \in B} f(x, y)$ *и* $\min\limits_{y \in B} \max\limits_{x \in A} f(x, y)$. Тогда

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) = \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y)$$

равносильно тому, что f имеет седловую точку.

- *Может ли у матрицы быть несколько седловых точек?*
- *Все ли матрицы имеют седловую точку?*

	a	b	c	d
A	2 5	6 2	4 1	3 0
B	1 4	4 3	1 2	2 1
C	0 1	1 1	5 1	1 5
D	3 2	1 0	2 0	4 4

- Но в некоторых **играх** естественно ввести в рассмотрение также **смешанные стратегии**. Под **смешанной стратегией** понимают ***распределение вероятностей*** на чистых стратегиях.
- В частном случае, когда множество **чистых стратегий** каждого игрока конечно, $X_i = \{x^1_i, . . . , x^{ni}_i\}$ (соответствующая игра называется **конечной**), **смешанная стратегия** представляется ***вектором вероятностей*** соответствующих ***чистых стратегий***: $\mu_i = (\mu^1_i, . . . , \mu^{ni}_i)$.

- Обозначим множество **смешанных стратегий** ***i***-го игрока через $\boldsymbol{M_i}$:

$$M_i = \left\{\mu_i \middle| \mu_i^k \geq 0, k = 1, \ldots, n_i; \mu_i^1 + \ldots + \mu_i^{ni} = 1 \right\rangle\right\}$$

- Стандартное предположение **теории игр** состоит в том, что если **выигрыш**— случайная величина, то игроки предпочитают действия, которые приносят им ***наибольший ожидаемый выигрыш.***
- **Ожидаемый выигрыш *i*-**го игрока, соответствующий набору ***смешанных стратегий*** всех игроков $(\boldsymbol{\mu_1, \ldots, \mu_m})$, вычисляется по формуле:

$$U(\mu_i, \mu_{-i}) = \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} \mu_1^{ki} \cdots \mu_m^{km} u_i(x_1^{ki}, \ldots, x_m^{km})$$

- **Ожидание** рассчитывается в предположении, что **игроки *выбирают стратегии* независимо** (в статистическом смысле). Поскольку игрок **максимизирует *ожидаемый выигрыш***, то он будет **смешивать** несколько разных стратегий, только если они дают ему **одинаковый выигрыш** (при данных стратегиях других игроков). **Смешанные стратегии** можно представить как результат **рандомизации** игроком своих действий, т. е. **как результат их случайного выбора.**

- Набор смешанных стратегий $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ является **равновесием Нэша** в ***смешанных стратегиях***, если стратегия μ^*_i каждого игрока $i = 1, \ldots, n$ является наилучшим для него откликом на стратегии других игроков μ^*_{-i}:

$$U\left(\mu_i^*, \mu_{-i}^*\right) = \max_{\mu_i \in M_i} U\left(\mu_i, \mu_{-i}^*\right)$$

Определение. ***Смешанной стратегией*** первого (второго) игрока называется вектор

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad x_i \geq 0, \; i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$\left(\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad y_j \geq 0, \; i = \overline{1, n}, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right)$$

Определение. Если $x_i > 0$, $y_j > 0$, игра называется ***активной***

Платежная функция игры:

$$f(\bar{x},\bar{y})=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i y_j$$

Определение. Стратегии

$$\bar{x}^*=\left(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_m^*\right),\quad \bar{y}^*=\left(y_1^*,y_2^*,\ldots,y_n^*\right)$$

называются ***оптимальными***, если для произвольных стратегий

$$\bar{x}=\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right),\quad \bar{y}=\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)$$

выполняется условие

$$f\left(\bar{x},\bar{y}^*\right)\le f\left(\bar{x}^*,\bar{y}^*\right)\le f\left(\bar{x}^*,\bar{y}\right)$$

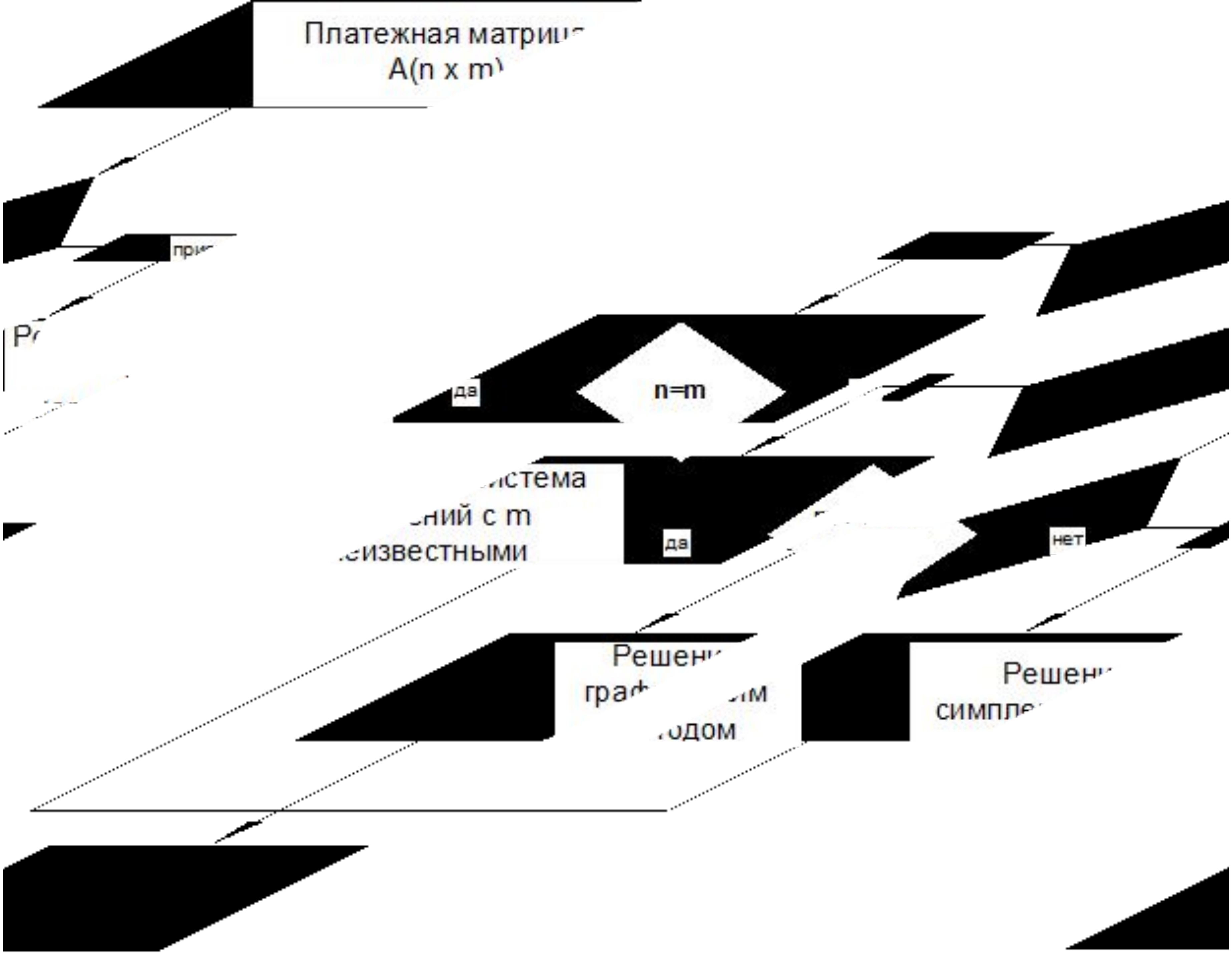
Определение. ***Решением игры*** называется совокупность оптимальных стратегий и цены игры

Цена игры: $f\left(\bar{x}^*, \bar{y}^*\right) = v$

Теорема (об активных стратегиях). Если один игрок придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры, если другой игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

Теорема фон Неймана (основная теорема матричных игр). Любая матричная игра имеет по крайней мере одно решение в смешанных стратегиях – две оптимальные стратегии и соответствующую им цену:

$$\left\langle \overline{x}^*, \overline{y}^*, v = f\left(\overline{x}^*, \overline{y}^*\right)\right\rangle$$


Платежная матриц
A(n x m
при
n=m
да
истема
ний с m
еизвестными
да
нет
Решени
граф им
одом
Решени
симпле

Методы решения матричных игр

1. Игра имеет седловой элемент в платежной матрице.

   В этом случае **игрок 1** имеет ***чистую максиминную стратегию***, а **игрок 2** - ***чистую минимаксную стратегию***, и при этом $\boldsymbol{\alpha=\beta=v}$. Тогда говорят, что **игра** решается в ***чистых стратегиях***.

Методы решения матричных игр

2. Игра с платежной матрицей 2x2 без седлового элемента.

	B_1	B_2	
A_1	a_{11}	a_{12}	x_1
A_2	a_{21}	a_{22}	x_2
	y_1	y_2	

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = v & \text{(если 2-й игрок играет только } B_1\text{)} \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = v & \text{(если 2-й игрок играет только } B_2\text{)} \\ x_1^* + x_2^* = 1 \end{cases}$$

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$x_2^* = 1 - x_1^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}y_2^* = v & \text{(если 1-й игрок играет только } A_1\text{)} \\ a_{21}y_1^* + a_{22}y_2^* = v & \text{(если 1-й игрок играет только } A_2\text{)} \\ y_1^* + y_2^* = 1 \end{cases}$$

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$y_2^* = 1 - y_1^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Пример. Найти смешанные стратегии игроков для игры с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_1^* \\ x_2^* \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1^* = 1/3, \quad x_2^* = 2/3, \quad v = 5/3 \\ y_1^* = 2/3, \quad y_2^* = 1/3 \end{array}$$

$$y_1^* \quad y_1^* \qquad \left\langle \left(1/3; 2/3\right); \quad \left(2/3; 1/3\right); \quad 5/3 \right\rangle$$

$$\begin{cases} 1x_1^* + & 2x_2^* = & v \\ 3x_1^* + & 1x_2^* = & v \\ x_1^* + & x_2^* = & 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1y_1^* + & 3y_2^* = & v \\ 2y_1^* + & 1y_2^* = & v \\ y_1^* + & y_2^* = & 1 \end{cases}$$

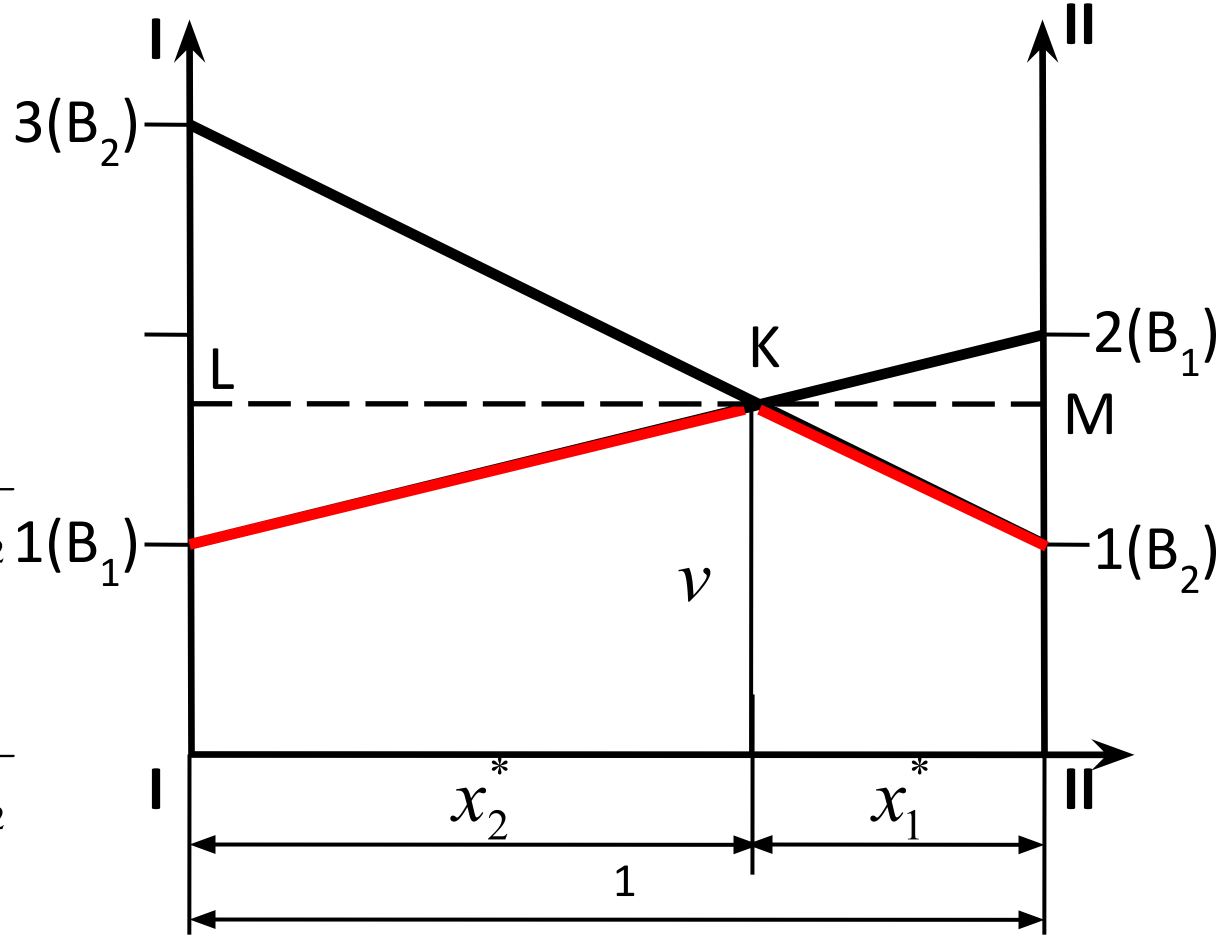
Методы решения матричных игр

2′. Графическое решение игры 2х2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1^* = \frac{LB_2}{LB_1 + LB_2} = \frac{MB_2}{MB_1 + MB_2}$$

$$y_2^* = \frac{LB_1}{LB_1 + LB_2} = \frac{MB_1}{MB_1 + MB_2}$$



Методы решения матричных игр

Решение игр вида 2xn и mx2

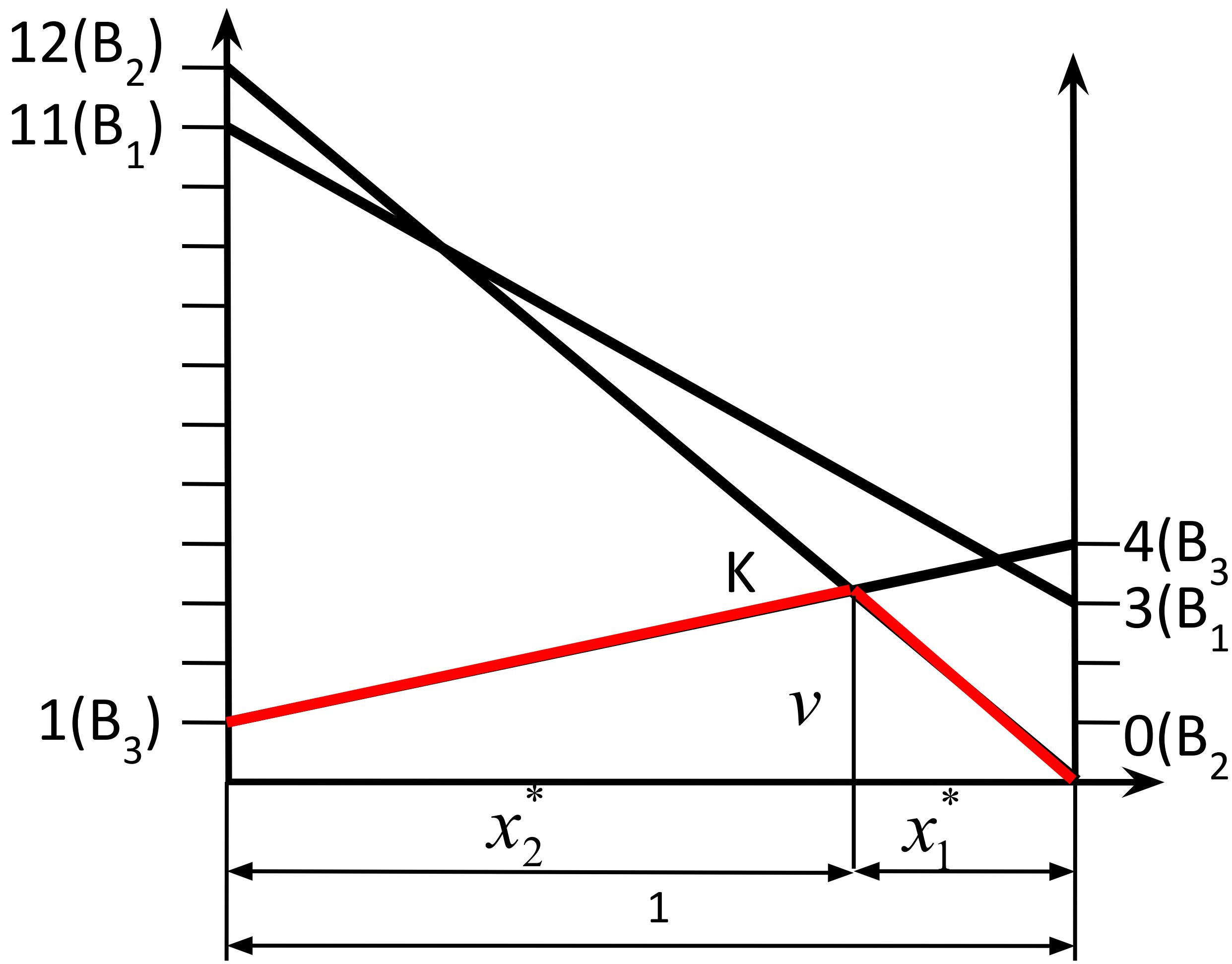
- У таких игр всегда имеется решение, содержащее **не более** двух ***активных стратегий*** для каждого из игроков. Если найти эти ***активные стратегии***, то игра ***2 x n*** или ***m x 2*** сводится к игре ***2 x 2***, которую мы уже умеем решать. Поэтому игры ***2 x n*** и ***m x 2*** решают обычно **графоаналитическим методом**.
- Следовательно ***активные стратегии*** позволяют упростить задачу также, как и ***доминирование***.

Методы решения матричных игр

3. Графо-аналитическое решение игры 2xn.

$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \\ \quad\; \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \\ \quad\; \begin{array}{cc} y_2 & y_3 \end{array} & \end{array}$$



$$\widetilde{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} y_2 & \quad y_3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} 12x_1^* + 0x_2^* = v \\ 1x_1^* + 4x_2^* = v \\ x_1^* + x_2^* = 1 \end{cases}$$

$x_1^* = 4/15, \quad x_2^* = 11/15, \quad v = 3{,}2$

$y_1^* = 1/5, \quad y_2^* = 4/5$

$$\begin{cases} 12y_1^* + 1y_2^* = v \\ 0y_1^* + 4y_2^* = v \\ y_1^* + y_2^* = 1 \end{cases}$$

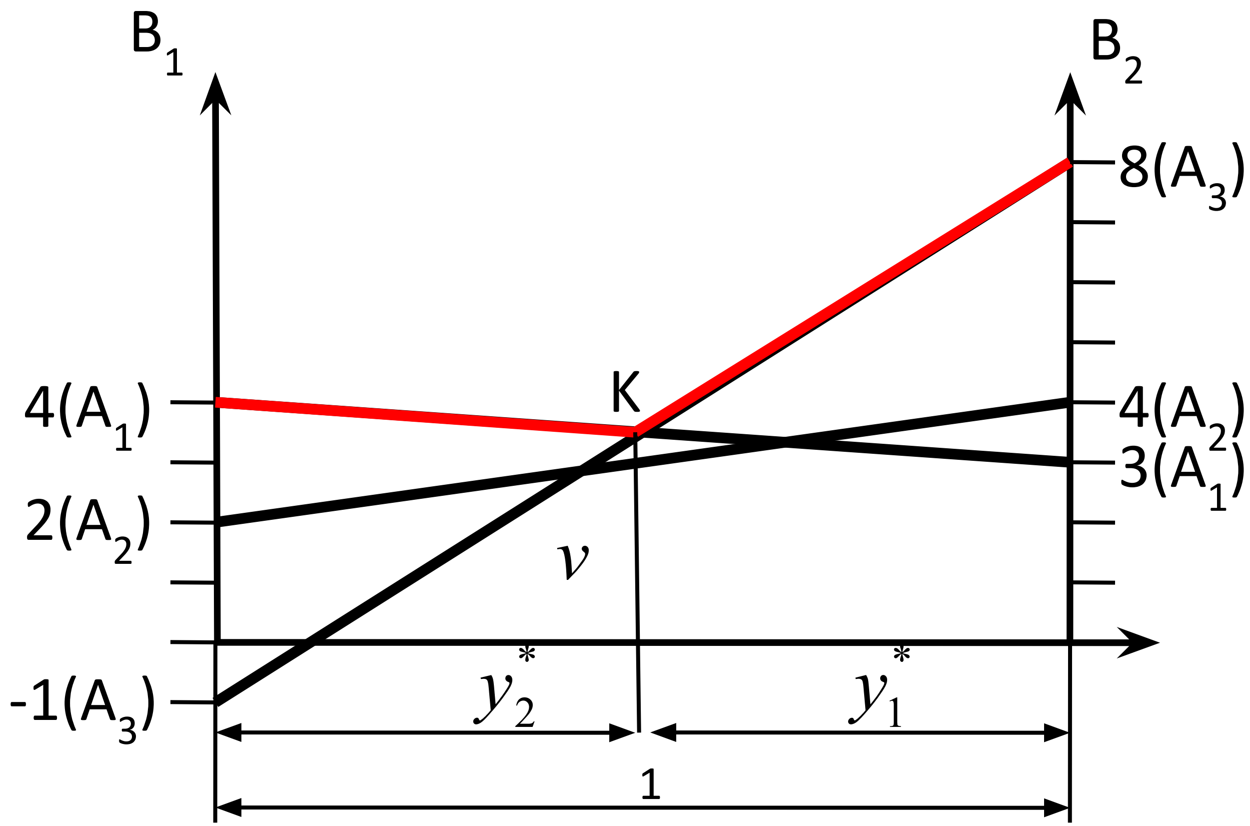
$\langle (4/15; 11/15); \quad (0; 1/5; 4/5); \quad 3{,}2 \rangle$

Методы решения матричных игр

4. Графо-аналитическое решение игры mx2.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} & \end{array}$$

$$\widetilde{A} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} & \end{array}$$



$$\widetilde{A} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1^* \\ x_3^* \end{array} \\ \begin{array}{cc} y_1^* & \quad y_2^* \end{array} & \end{array}$$

$$\begin{cases} 4x_1^* - 1x_3^* = v \\ 3x_1^* + 8x_3^* = v \\ x_1^* + x_3^* = 1 \end{cases} \qquad x_1^* = 0{,}9, \quad x_3^* = 0{,}1, \quad v = 3{,}5$$

$$y_1^* = 0{,}5, \quad y_2^* = 0{,}5$$

$$\begin{cases} 4y_1^* + 3y_2^* = v \\ -y_1^* + 8y_2^* = v \\ y_1^* + y_2^* = 1 \end{cases} \qquad \left\langle (0{,}9;\ 0;\ 0{,}1); \quad (0{,}5;\ 0{,}5); \quad 3{,}5 \right\rangle$$

Методы решения матричных игр

5. Игры с доминирующими и дублирующими стратегиями.

$$a_{i1} \ge a_{k1}, a_{i2} \ge a_{k2}, \dots, a_{in} \ge a_{kn}. \quad \Rightarrow x_k^* = 0$$

$$\begin{aligned} &a_{1j}\{\le, <, =\}a_{1l}, \\ &a_{2j}\{\le, <, =\}a_{2l}, \qquad\qquad \Rightarrow y_l^* = 0 \\ &\dots \\ &a_{mj}\{\le, <, =\}a_{ml}. \end{aligned}$$

Первый метод, используемый для уменьшения размерности матрицы, основан на одном из важнейших понятий в теории игр - **понятии доминирования стратегий**.

- Если ***i***-я строка поэлементно не меньше (≥) ***j***-й строки, то говорят, что ***i***-я строка **доминирует** над ***j***-й строкой.
- Поэтому игрок **А** не использует ***j***-ю стратегию, так как его **выигрыш** при ***i***-й стратегии **не меньше**, чем при ***j***-й стратегии, вне зависимости от того, как играет игрок **В**.

Первый метод, используемый для уменьшения размерности матрицы, основан на одном из важнейших понятий в теории игр **- понятии доминирования стратегий**.

- Если ***i***-й столбец поэлементно не меньше (≥) ***j***-го столбца, то говорят, что ***j***-й столбец **доминирует** над ***i***-м столбцом. Поэтому игрок **В** не использует ***i***-ю стратегию, так как его **проигрыш** (***равный выигрышу игрока*** **А**) при ***j***-й стратегии **не больше** (≤), чем при ***i***-й стратегии, вне зависимости от того, как играет игрок **А**.

Первый метод, используемый для уменьшения размерности матрицы, основан на одном из важнейших понятий в теории игр **- понятии доминирования стратегий**.

- ***Стратегии***, над которыми **доминируют** другие стратегии, **надо отбросить** и приписать им **нулевые вероятности**. На **цене игры** это никак **не скажется**. Зато размер матрицы игры понизится. С этого и нужно начинать решение игры.
- Частный случай **доминирования** является **дублирование** стратегий.

Пример

	q_1	q_2	q_3	q_4
p_1	**8**	**9**	**9**	**4**
p_2	**6**	**5**	**8**	**7**
p_3	**3**	**4**	**8**	**6**
p_4	**8**	**9**	**9**	**4**

Пример

	q_1	q_2	q_3	q_4
p_1	**8**	**9**	**9**	**4**
p_2	**6**	**5**	**8**	**7**
p_3	**3**	**4**	**8**	**6**
p_4	**8**	**9**	**9**	**4**

Пример

	q_1	q_2	q_3	q_4
p_1	**8**	**9**	**9**	**4**
p_2	**6**	**5**	**8**	**7**
p_3	**3**	**4**	**8**	**6**
$p4=0$				

Пример

	q_1	q_2	q_3	q_4
p_1	**8**	**9**	**9**	**4**
p_2	**6**	**5**	**8**	**7**
p_3	**3**	**4**	**8**	**6**
$p4=0$				

Пример

	q_1	q_2	q_3	q_4
p_1	**8**	**9**	**9**	**4**
p_2	**6**	**5**	**8**	**7**
$p3=0$				
$p4=0$				

Пример

	q_1	q_2	q_3	q_4
p_1	**8**	**9**	**9**	**4**
p_2	**6**	**5**	**8**	**7**
$p3=0$				
$p4=0$				

Пример

	q_1	q_2	$q3=0$	q_4
p_1	**8**	**9**		**4**
p_2	**6**	**5**		**7**
$p3=0$				
$p4=0$				

Дальнейшее упрощение невозможно.

Мы свели игру 4×4 к игре 2×3.

Пример 2 - упростить игру

	q_1	q_2	q_3	q_4
p_1	**4**	**5**	**6**	**7**
p_2	**3**	**4**	**6**	**5**
p_3	**7**	**6**	**10**	**8**
p_4	**8**	**5**	**4**	**3**

Дублирование и доминирование

- *Замечание.* Если игра $m \times n$ имеет **седловую точку**, то после упрощений платёжной матрицы мы всегда получим игру 1×1.

Методы решения матричных игр

6. Эквивалентное преобразование платежной матрицы.

Теорема. Оптимальные смешанные стратегии ***x**** и ***y**** соответственно 1-го и 2-го игроков в ***матричной игре*** $\left(a_{ij}\right)_{mxn}$

с ценой ***v*** будут оптимальными и в ***матричной игре*** $\left(ba_{ij}+c\right)_{mxn}$

с ценой ***v'=bv+c**,* где $b > 0, \quad c \in R$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 1{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}9 \end{pmatrix} \qquad b = 10, c = -6 \Rightarrow \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Пример 3

- Задана платежная матрица:

400	***-300***	***600***
-200	***-400***	***500***
800	***700***	***-100***

- Необходимо упростить матрицу.

b=0.01
c=4

$\longrightarrow$

8	1	10
2	0	9
12	11	3

Методы решения матричных игр

7. Решение матричной игры mxn (общий случай).

Здесь матричная игра сводится к задаче линейного программирования. Пусть дана игра с матрицей:

	y_1	y_2		y_n
x_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
x_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
x_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Все элементы матрицы при этом считаются неотрицательными; Тогда цена игры будет положительной, v>0. Вводятся новые переменные:

$$a_{ij} \geq 0 \qquad \Rightarrow v > 0$$

$$t_i = \frac{x_i}{v}, \quad u_j = \frac{y_j}{v}, \quad i = 1,...,m; \quad j = 1,...,n$$

Теперь **матричная игра** сводится к следующей задаче ***линейного программирования*** относительно 1-го игрока:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1, \\ \ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1, \\ T = \dfrac{1}{v} = t_1 + t_2 + \ldots + t_m \to \min, \\ t_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

или к двойственной ей – для 2-го игрока:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \le 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \le 1, \\ \ldots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n \le 1, \\ Z = \dfrac{1}{v} = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \to \max \\ u_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Понятие об игре с природой

	$П_1$	$П_2$		$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
p	p_1	p_2	…	p_n

Матрица рисков:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}, \quad r_{ij} \geq \max_i a_{ij} - a_{ij}$$

Понятие об игре с природой

- Любую **хозяйственную деятельность** человека можно рассматривать как **игру с природой**. В широком смысле под "**природой**" понимается ***совокупность неопределенных факторов***; влияющих на эффективность принимаемых решений. ***Безразличие природы*** к игре (выигрышу) к возможности получения экономистом (статистиком) дополнительной информации о ее состоянии отличают игру экономиста с природой от обычной матричной игры, в которой принимают участие два сознательных игрока.
- Данный тип задач **относится** к **задачам принятия решений в условиях**

Понятие об игре с природой

- Предположим, что **ЛПР** рассматривает несколько возможных решений: $\boldsymbol{i = 1,\ldots,m}$. Ситуация, в которой действует **ЛПР**, является ***неопределенной***. Известно лишь, что наличествует какой-то из вариантов: $\boldsymbol{j = 1,\ldots, n}$. Если будет принято $\boldsymbol{i}$-е решение, а ситуация есть $\boldsymbol{j}$-я , то фирма, возглавляемая **ЛПР**, получит доход $\boldsymbol{a_{ij}}$. Матрица $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$ называется **матрицей последствий** (возможных решений).

Понятие об игре с природой

- В этой ситуации **полной неопределенности** могут быть высказаны лишь некоторые рекомендации предварительного характера. Они не обязательно будут приняты **ЛПР**. Многое будет зависеть, например, от его **склонности к риску**.
- Оценим риск, который несет ***i***-е решение. Нам неизвестна реальная ситуация. Но если бы ее знали, то **выбрали бы наилучшее решение**, т.е. приносящее наибольший доход. Т.е. если ситуация есть ***j***-я , то было бы принято решение, дающее доход a_{ij}.

Понятие об игре с природой

- Значит, принимая $\boldsymbol{i}$-е решение мы рискуем получить не $\boldsymbol{a_j}$, а только $\boldsymbol{a_{ij}}$, значит принятие $\boldsymbol{i}$-го решения несет **риск** недобрать $\boldsymbol{r_{ij} = a_j - a_{ij}}$. Матрица $\boldsymbol{R = (r_{ij})}$ называется **матрицей рис**ков.
- Уникальные **единичные случайные явления** связаны с ***неопределенностью***, **массовые случайные явления** обязательно допускают некоторые ***закономерности вероятностного характера***.

Пример:

Пусть матрица последствий есть:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Составим матрицу рисков.

Имеем $q_1 = max(q_{i1}) = 8,\ q_2 = 5,\ q_3 = 8,\ q_4 = 12$.

Следовательно, матрица рисков есть

$$r_{ij} = q_j - q_{ij},$$

$$R = (r_{ij})$$

$$R = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Понятие об игре с природой

- Ситуация **полной неопределенности** характеризуется отсутствием какой бы то ни было ***дополнительной информации***.
- Какие же существуют правила-рекомендации по принятию решений в этой ситуации?

Понятие об игре с природой

1. ***Правило Вальда*** (**правило крайнего пессимизма**). Рассматривая *i*-е решение будем полагать, что на самом деле ситуация складывается самая плохая, т.е. приносящая самый малый доход a_i Но теперь уж выберем решение i_0 с наибольшим a_{i0}. Итак, правило **Вальда** рекомендует принять решение i_0, такое что:

$$a_{i0} = \max_{i} a_i = \max_{i} (\min_{j} a_{ij})$$

- По критерию ***Вальда*** за оптимальную принимается чистая стратегия, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш, т.е. $\boldsymbol{a = max(min\ a_{ij})}$ Критерий ***Вальда*** ориентирует статистику на самые неблагоприятные состояния природы, т.е. этот критерий выражает **пессимистическую** оценку ситуации.
- Так, в вышеуказанном ***примере***, имеем $\boldsymbol{a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 1}$. Из этих чисел ***максимальным*** является число ***3***. Значит, правило ***Вальда*** рекомендует принять **3-е решение.**

2. ***Правило Сэвиджа*** (***правило минимального риска***). При применении этого правила анализируется ***матрица рисков*** $R = (r_{ij})$. Рассматривая i-е решение будем полагать, что на самом деле складывается ***ситуация максимального риска*** $b_i = \max [r_{ij}]$,

Но теперь уж выберем решение i_0 с наименьшим b_{i0}. Итак, ***правило Сэвиджа*** рекомендует принять решение i_0, такое что

$$b_{i0} = \min_i b_i = \min_i \left(\max_j r_{ij} \right)$$

Критерий минимального риска **Севиджа** рекомендует выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, при которой величина максимального риска минимизируется в наихудших условиях, т.е. обеспечивается:

$$a = \min(\max r_{ij})$$

Критерий Сэвиджа ориентирует статистику на самые неблагоприятные состояния природы, т. е. этот критерий выражает **пессимистическую** оценку ситуации.

- В рассматриваемом примере имеем $b_1 = 8$, $b_2 = 6$, $b_3 = 5$, $b_4 = 7$. Минимальным из этих чисел является число **5**. Т.е. ***правило Сэвиджа*** рекомендует принять **3-е решение**.

3. ***Правило Гурвица*** (взвешивающее пессимистический и оптимистический подходы к ситуации). Принимается решение $\boldsymbol{i}$, на котором достигается максимум:

$$\lambda \min_{j} q_{ij} + (1-\lambda) \max_{j} q_{ij} \qquad \text{где } 0 \le \lambda \le 1$$

Значение λ выбирается из субъективных соображений. Если λ приближается к ***1***, то ***правило Гурвица*** приближается к ***правилу Вальда***, при приближении λ к ***0***, ***правило Гурвица*** приближается к ***правилу "розового оптимизма"*** (догадайтесь сами, что это значит). (***максимакс***)

Критерий Гурвица является критерием пессимизма - оптимизма.
Критерий Гурвица учитывает возможность как наихудшего, так и наилучшего для человека поведения природы.

- Как выбирается *λ*? Чем хуже последствия ошибочных решений, тем больше желание застраховаться от ошибок, тем ***λ*** ближе к ***1***.
- В вышеуказанном примере при ***λ= 1/2*** ***правило Гурвица*** рекомендует ***2-е решение***.

4. Предположим, что в рассматриваемой схеме известны **вероятности** p_j того, что реальная ситуация развивается по варианту j. Именно такое положение называется ***частичной неопределенностью***. Как здесь принимать решение? Можно выбрать одно из следующих правил.

- Правило ***максимизации среднего ожидаемого дохода***. Доход, получаемый фирмой при реализации i-го решения, является случайной величиной Q_i с рядом распределения. ***Правило*** рекомендует принять решение, приносящее ***максимальный средний ожидаемый доход***.

4а. По ***критерию Байеса*** за оптимальные принимается та стратегия (чистая) A_i, при которой максимизируется ***средний выигрыш*** ***а*** или минимизируется ***средний риск***

$$r - max \sum(a_{ij} p_j)$$

4б. *Критерий Лапласа*.

Если вероятности состояний природы правдоподобны, для их оценки используют принцип недостаточного основания Лапласа, согласно которого ***все состояния природы полагаются равновероятными***, т.е.:

$$q_1 = q_2 = ... = q_n = 1/n.$$

Пример

- Предположим, что в схеме из предыдущего примера вероятности есть (***1/2, 1/6, 1/6, 1/6***).
- Математическое ожидание ***M[Qi]*** и есть средний ожидаемый доход, обозначаемый $\overline{Q_i}$. Правило рекомендует принять решение, приносящее максимальный средний ожидаемый доход.
- Тогда $\overline{Q_1} = 23/6; \overline{Q_2} = 25/6; \overline{Q_3} = 7; \overline{Q_4} = 17/6$
- Максимальный средний ожидаемый доход равен *7*, соответствует ***третьему решению***.

Пример

- Вычислим средние ожидаемые риски при указанных выше вероятностях. Получаем:

$$\overline{R_1} = {}^{26}\!/_{6};\ \overline{R_2} = 4;\ \overline{R_3} = {}^{7}\!/_{6};\ \overline{R_4} = {}^{32}\!/_{6}$$

- Минимальный средний ожидаемый риск равен ***7/6***, соответствует ***третьему решению***.
- ***По правилу Лапласа просчитать самостоятельно!***
- В случае, если количество Парето-оптимальных решений **больше одного**, то для определения лучшего решения применяется взвешивающая формула

Критерий Байеса:

$$\max_i \overline{a}_i = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$$

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \max_i \overline{a}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Критерий Вальда:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\alpha = \max_{\overline{x}} \min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i$$

Критерий Сэвиджа:

$$S = \min_i \max_j r_{ij}$$

$$S = \min_{\overline{x}} \max_j \sum_{i=1}^{m} r_{ij} x_i$$

Критерий Гурвица: $H = \max_i \left[\chi \min_j a_{ij} + (1 - \chi) \max_j a_{ij} \right]$

$\chi \in [0,1]$ - «коэффициент пессимизма»

$\chi = 1$ - критерий Вальда

$\chi = 0$ - ситуация «крайнего оптимизма»