

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Подготовил:
Лычагин Андрей 34 группа.
Проверила:
Индюкова Наталья Федоровна.

Определение

- Иррациональное число — это вещественное число, которое не является рациональным, то есть которое не может быть представленным в виде дроби m/n , где m — целое число, n — натуральное число.
- Множество иррациональных чисел (I) обычно обозначается таким образом: $I = R/Q$ — множество иррациональных чисел есть разность множеств вещественных и рациональных чисел.



История

- Иррациональные числа были неявным образом восприняты индийскими математиками в VII веке до нашей эры, когда Манава (ок. 750 г. до н. э. — ок. 690 г. до н. э.) выяснил, что квадратные корни некоторых натуральных чисел, таких как 2 и 61, не могут быть явно выражены.
- Первое доказательство существования иррациональных чисел обычно приписывается Гиппасу из Метапонта (ок. 500 гг. до н. э.), пифагорейцу, который нашел это доказательство, изучая длины сторон пентаграммы.

Гиппас обосновал, что не существует единой единицы длины, поскольку предположение о ее существовании приводит к противоречию. Он показал, что если гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника содержит целое число единичных отрезков, то это число должно быть одновременно и четным, и нечетным. Доказательство выглядело следующим образом:

- Отношение длины гипотенузы к длине катета равнобедренного прямоугольного треугольника может быть выражено как $a:b$, где a и b выбраны наименьшими из возможных.
- По теореме Пифагора: $a^2 = 2b^2$.
- Так как a^2 четное, a должно быть четным (так квадрат нечетного числа был бы нечетным).
- Поскольку $a:b$ несократима, b обязано быть нечетным.
- Так как a четное, обозначим $a = 2y$.
- Тогда $a^2 = 4y^2 = 2b^2$.
- $b^2 = 2y^2$, следовательно b^2 четное, тогда и b четно.
- Однако было доказано, что b нечетное. Противоречие.

Открытие Гиппаса поставило перед пифагорейской математикой серьезную проблему, разрушив предположение, что числа и геометрические объекты едины и неразделимы, лежавшее в основе всей теории.

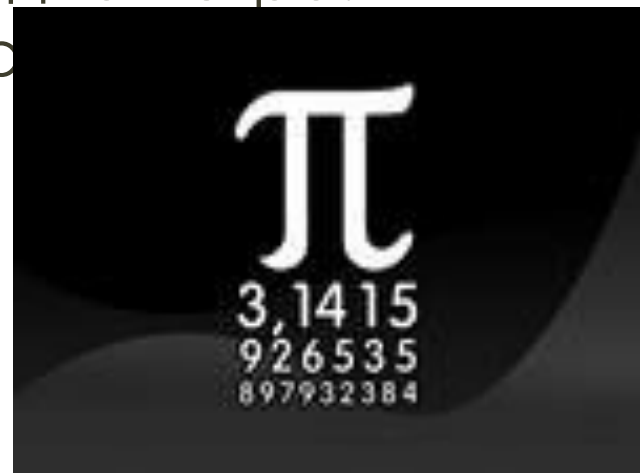
- Феодор Киренский доказал иррациональность корней натуральных чисел до 17 (исключая, естественно, точные квадраты — 1, 4, 9 и 16), но остановился на этом, так как имевшаяся в его инструментарии алгебра не позволяла доказать иррациональность квадратного корня из 17.
- Позже Евдокс Книдский (410 или 408 г. до н. э. — 355 или 347 г. до н. э.) развил теорию пропорций, которая принимала во внимание как рациональные, так и иррациональные отношения. Это послужило основанием для понимания фундаментальной сути иррациональных чисел. Величина стала считаться не числом, но обозначением сущностей, таких как отрезки прямых, углы, площади, объемы, промежутки времени — сущностей, которые могут меняться непрерывно (в современном понимании этого слова).

СВОЙСТВА

- Всякое вещественное число может быть записано бесконечной десятичной дробью, при этом иррациональные числа и только они записываются непериодическими бесконечными десятичными дробями.
- Иррациональные числа определяют Дедекиндовы сечения в множестве рациональных чисел, у которых в нижнем классе нет наибольшего, а в верхнем нет наименьшего числа.
- Каждое трансцендентное число является иррациональным.
- Каждое иррациональное число является либо алгебраическим, либо трансцендентным.
- Множество иррациональных чисел всюду плотно на числовой прямой: между любыми двумя числами имеется иррациональное число.
- Множество иррациональных чисел несчётно, является множеством второй категории

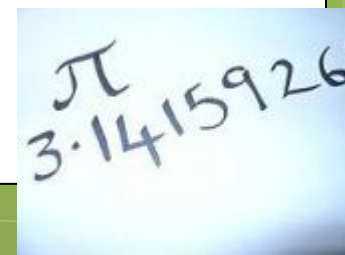
Число «пи»

- -это одно из множества представителей иррациональных чисел
- «пи» — математическая константа, выражающая отношение длины окружности к длине её диаметра. Обозначается буквой гр алфавита «пи».



Трансцендентность

- π — трансцендентное число, это означает, что оно не может быть корнем какого-либо многочлена с целыми коэффициентами. Трансцендентность числа π была доказана в 1882 году профессором Кенигсбергского, а позже Мюнхенского университета Линдеманом. Доказательство упростил Феликс Клейн в 1894 году.
- Поскольку в евклидовой геометрии площадь круга и длина окружности являются функциями числа π , то доказательство трансцендентности π положило конец спору о квадратуре круга, длившемуся более 2,5 тысяч лет.



Соотношения

Известно много формул числа π :

□ Франсуа Виет, 1593:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots$$



□ Формула Валлиса:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots = \frac{\pi}{2}$$



□ Ряд Лейбница:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$



Тождество Эйлера: $e^{i\pi} + 1 = 0$



Т. н. «интеграл Пуассона» или
«интеграл Гаусса»

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$



Интегральный синус:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

История

- Впервые обозначением этого числа греческой буквой воспользовался британский математик Джонс в 1706 году, а общепринятым оно стало после работ Леонарда Эйлера в 1737 году. Это обозначение происходит от начальной буквы греческих слов $\tau\epsilon\rho\iota\phi\epsilon\rho\epsilon\iota\alpha$ — окружность, периферия и $\tau\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ — периметр. История числа π шла параллельно с развитием всей математики. Некоторые авторы разделяют весь процесс на 3 периода: древний период, в течение которого π изучалось с позиции геометрии, классическая эра, последовавшая за развитием математического анализа в Европе в XVII веке, и эра цифровых компьютеров.



- Архимед, возможно, первым предложил математический способ вычисления π . Для этого он вписывал в окружность и описывал около неё правильные многоугольники. Принимая диаметр окружности за единицу, Архимед рассматривал периметр вписанного многоугольника как нижнюю оценку длины окружности, а периметр описанного многоугольника как верхнюю оценку.

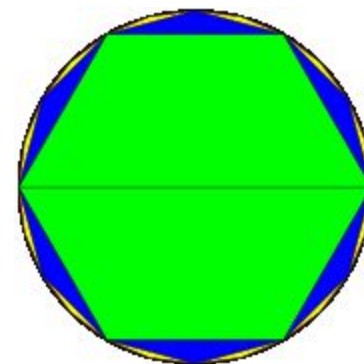
Рассматривая правильный 96-угольник Архимед

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$



Около 265 года н. э. математик Лю Хуэй из царства Вэй предоставил простой и точный итеративный алгоритм (англ.) с любой степенью точности. Он самостоятельно провёл вычисление для 3072-угольника и получил приближённое значение для π по следующему принципу:

$$\pi \approx A_{3072} = 3 \cdot 2^8 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 1}}}}}}}}}} \approx 3,14159.$$



- Позднее Лю Хуэй придумал быстрый метод вычисления π и получил приближённое значение 3,1416 только лишь с 96-угольником, используя преимущества того факта, что разница в площади следующих друг за другом многоугольников формирует геометрическую прогрессию со знаменателем 4.



3.14159265358979323846
2643383270502884197169
3981071706537684876404
0716402862019862803
48253421706732148086
51328236647088446095
50582277253510812848
1117458410219521
10554622949303
8196442881097566593344

Нерешённые проблемы

- Неизвестно, являются ли числа π и e алгебраически независимыми.
- Неизвестно, являются ли числа $\pi + e$, $\pi - e$, πe , π / e , π^e , e^π трансцендентными.
- До сих пор ничего не известно о нормальности числа π ; неизвестно даже, какие из цифр 0—9 встречаются в десятичном представлении числа π бесконечное количество раз.

История вычисления

- В 1997 году Дэвид Бэйли, Питер Боруэйн и Саймон Плурфф открыли способ (англ.) быстрого вычисления произвольной двоичной цифры числа π без вычисления предыдущих цифр, основанный на формуле:
$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right)$$

Мнемонические правила

Чтобы нам не ошибаться,
Надо правильно прочесть:
Три, четырнадцать, пятнадцать,
Девяносто два и шесть.

Надо только постараться
И запомнить всё как есть:
Три, четырнадцать, пятнадцать,
Девяносто два и шесть.

Три, четырнадцать, пятнадцать,
Девять, два, шесть, пять, три, пять.
Чтоб наукой заниматься,
Это каждый должен знать.

Можно просто постараться
И почаще повторять:
«Три, четырнадцать, пятнадцать,
Девять, двадцать шесть и пять».

Подсчитайте количество букв в каждом слове
в нижеприведенных фразах (без учёта знаков
препинания) и запишите эти цифры
подряд — не забывая про десятичную запятую
после первой цифры «3», разумеется.
Получится приближенное число Пи:

Это я знаю и помню прекрасно: Пи многие
знаки мне лишни, напрасны.
Кто и шутя, и скоро пожелает Пи узнать
число — ужь знает!
Вот и Миша и Анята прибежали Пи узнать
число они желали.



□ Если соблюдать стихотворный размер, можно довольно быстро запомнить:

Три, четырнадцать, пятнадцать, девять два, шесть
пять, три пять

Восемь девять, семь и девять, три два, три
восемь, сорок шесть

Два шесть четыре, три три восемь, три два семь
девять, пять ноль два

Восемь восемь и четыре, девятнадцать, семь,
один

Дополнительные факты

- Неофициальный праздник «День числа пи» отмечается 14 марта, которое в американском формате дат (месяц/день) записывается как 3.14, что соответствует приближённому значению числа π . Считается, что праздник придумал в 1987 году физик из Сан-Франциско Ларри Шоу, обративший внимание на то, что 14 марта ровно в 01:59 дата и время совпадают с первыми разрядами числа $\pi = 3,14159$.

- Памятник числу «пи» на ступенях перед зданием Музея искусства Сиэтле



- Ещё одной датой, связанной с числом π , является 22 июля, которое называется «Днём приближённого числа Пи» (англ. *Pi Approximation Day*), так как в европейском формате дат этот день записывается как 22/7, а значение этой дроби является приближённым значением числа π .



А вам слабо?

- 17 июня 2009 года украинский нейрохирург, доктор медицинских наук, профессор Андрей Слюсарчук установил мировой рекорд, запомнив 30 миллионов знаков **числа Пи**, которые были напечатаны в 20 томах текста. С установлением нового рекорда Андрея Слюсарчука официально поздравил президент Украины Виктор Андреевич Ющенко. Поскольку устное перечисление 30 млн цифр π со скоростью одна цифра в секунду заняло бы почти год (347 дней) при непрерывном перечислении 24 часа в сутки, 7 дней в неделю, то был применён следующий подход для проверки рекорда: во время демонстраций Слюсарчука просят назвать произвольно выбранные проверяющими последовательности цифр числа Пи, расположенные на произвольно выбранных местах произвольных страниц 20-томной распечатки, группированной в упорядоченные таблицы. Он многократно успешно проходит этот тест.

ЧИСЛО «Е»

Число «e»

- -это еще одно число из множества представителей иррациональных чисел
- e — математическая константа, основание натурального логарифма, трансцендентное число. Иногда число e называют числом Эйлера или числом Непера. Обозначается строчной латинской буквой «e». Численное значение
 $e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 352\ 662\ 497\ 757\dots$



Способы определения

Число e может быть определено несколькими способами.

- Через предел:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- Как сумма ряда:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

- Как единственное число a , для которого выполняется

- Как единственное $\int_1^a \frac{dt}{t} = 1$. оложительное число a , для которого верно

$$\frac{d}{dt} a^t = a^t.$$

СВОЙСТВА

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \cdot \text{нное свойство}$$

играет важную роль в решении

дифференциальных уравнений. Так,

например,

единственным

решением

дифференциального

уравнения

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x)$$

является функция

$$f(x) = ce^x$$

где c — произвольная

константа.

```
2.7182818284590452353602874713526624
977572470936999595749669676277240766
303535475945713821785251664274274663
919320030599218174135966290435729003
342952605956307381323286279434907632
338298807531952510190115738341879307
021540891499348841675092447614606680
822648001684774118537423454424371075
390777449920695517027618386062613313
845830007520449338265602976067371132
007093287091274437470472306969772093
101416928368190255151086574637721112
523897844250569536967707854499699679
4686445490598793163688923009879312...
```

□ Число e трансцендентно. Это первое число, которое не было выведено как трансцендентное специально, его трансцендентность была доказана только в 1873 году Шарлем Эрмитом. Предполагается, что e — нормальное число, то есть вероятность появления разных цифр в его записи одинакова.

□ Число e разлагается в бесконечную цепную дробь

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \dots]$$

следующим образом:

то есть

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \dots}}}}}}}}}}}}}}}$$

□ Представление
Каталана:

$$e = 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}} \cdot \sqrt[8]{\frac{10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}} \dots$$



История

- Данное число иногда называют неперовым в честь шотландского учёного Непера, автора работы «Описание удивительной таблицы логарифмов» (1614 год). Однако это название не совсем корректно, так как у него логарифм числа x был равен

$$10^7 \cdot \log_{1/e} \left(\frac{x}{10^7} \right)$$

- Константу впервые вычислил швейцарский математик Бернулли при анализе следующего предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n .$$

Мнемоника

Мнемоника (греч. та μνημονιχα — искусство запоминания), мнемотехника — совокупность специальных приёмов и способов, облегчающих запоминание нужной информации и увеличивающих объём памяти путём образования ассоциаций (связей). Замена абстрактных объектов и фактов на понятия и представления, имеющие визуальное, аудиальное или кинестетическое представление, связывание объектов с уже имеющейся информацией в памяти различных типов для упрощения запоминания.

- Приблизительное значение зашифровано в: «Мы порхали и блистали, но застряли в перевале; не признали наши крали авторалли» (нужно выписать подряд цифры, выражающие число букв в словах следующего стихка, и поставить запятую после первого знака)
- Два и семь, восемнадцать,
Двадцать восемь, восемнадцать,
Двадцать восемь, сорок пять,
Девяносто, сорок пять.

□ Мнемоническое правило: два и семь, далее два
раза год рождения Льва Толстого (1828), затем
углы равнобедренного прямоугольного
треугольника (45, 90 и 45 градусов). Стихотворная
мнемофраза, иллюстрирующая часть этого
правила: «Экспоненту помнить способ есть
простой: две и семь десятых, дважды Лев
Толстой»

Числа 45, 90 и 45 можно запоминать как «год
победы над фашистской Германией, затем
дВАЖДЫ ЭТОТ ГОД и СНОВА он»

Интересные факты

- В IPO компании Google в 2004 году было объявлено о намерении компании увеличить свою прибыль на 2 718 281 828 долларов. Заявленное число представляет собой первые 10 цифр известной математической константы.