

Распределение Максвелла

Практическое занятие

$$F(|\mathbf{v}|) = f(v)4\pi v^2 = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2$$

1.(5.49) Найти число молекул водорода в объеме $V=1 \text{ см}^3$, если давление $P=200 \text{ мм рт. ст.}$, а средняя квадратичная скорость его молекул при данных условиях $\langle v_{\text{ск}} \rangle = 2,4 \cdot 10^3 \text{ м/с}$.
Решение.

Дано
 $V=1 \text{ см}^3$
 $P=200 \text{ мм рт. ст.}$
 $\langle v_{\text{ск}} \rangle = 2,4 \cdot 10^3 \text{ м/с}$

$N=?$

$$N = \frac{m}{\mu} N_A$$

$$v_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

$$PV = \frac{m}{\mu} RT$$

$$\frac{m}{\mu} = \frac{PV}{RT}$$

$$RT = \frac{(\langle v_{\text{ск}} \rangle)^2 \mu}{3}$$

$$N = \frac{3N_A \cdot PV}{(v_{\text{ск}})^2 \mu}$$

$$N = \frac{3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 26,6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{(2,4)^2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 4,17 \cdot 10^{18} \approx 4,2 \cdot 10^{18}$$

Ответ: $N=4,2 \cdot 10^{18}$.

2.(5.50) Плотность некоторого газа $\rho=6 \cdot 10^{-2}$ кг/м³, а средняя квадратичная скорость его молекул $\langle u_{\text{ск}} \rangle=500$ м/с. Найти давление P , которое газ оказывает на стенки сосуда.

Решение.

Дано

$$\rho=6 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3$$

$$\langle u_{\text{ск}} \rangle=500 \text{ м/с}$$

$P=?$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$u_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

$$PV = \frac{m}{\mu} RT$$

$$P = \frac{m}{V} \cdot \frac{RT}{\mu} = \rho \cdot \frac{RT}{\mu}$$

$$\frac{RT}{\mu} = \frac{(u_{\text{ск}})^2}{3}$$

$$P = \frac{\rho(u_{\text{ск}})^2}{3}$$

$$P = \frac{6 \cdot 10^{-2} \cdot 25 \cdot 10^4}{3} = 5 \cdot 10^3 \text{ (Па)}$$

Ответ: $P=5 \cdot 10^3$ Па.

3.(5.56) 1) Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа, плотность которого при давлении $P=750$ мм рт. ст. равна $\rho=8,2 \cdot 10^{-2}$ кг/м³. 2) Чему равна молярная масса этого газа, если значение плотности дано для температуры $t=17^{\circ}\text{C}$?

Дано

$$\rho = 8,2 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3$$

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

$$P = 750 \cdot 133 =$$

$$= 99,75 \cdot 10^3 \text{ (Па)}$$

$$T = 17 + 273 = 290 \text{ (К)}$$

Решение.

$$v_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

$$PV = \frac{m}{\mu} RT$$

$$\frac{RT}{\mu} = \frac{PV}{m} = \frac{P}{\rho}$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$\mu = \frac{3RT}{(v_{\text{ск}})^2}$$

$$v_{\text{ск}} = ?$$

$$\mu = ?$$

$$v_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$$

$$\mu = \frac{RT\rho}{P}$$

$$v_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 99,75 \cdot 10^3}{8,2 \cdot 10^{-2}}} = 1,91 \cdot 10^3 \text{ (м/с)}$$

$$\mu = \frac{8,31 \cdot 290 \cdot 8,2 \cdot 10^{-2}}{99,75 \cdot 10^3} = 1,98 \cdot 10^{-3} \text{ (кг/моль)}$$

Ответ: 1) $\langle v_{\text{ск}} \rangle = 1,9 \cdot 10^3$ м/с; 2) $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

$$F(|\vec{v}|)dv = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2 dv$$

$$f(u)dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} du \quad u = \frac{v}{v_\theta}$$

$f(u)$

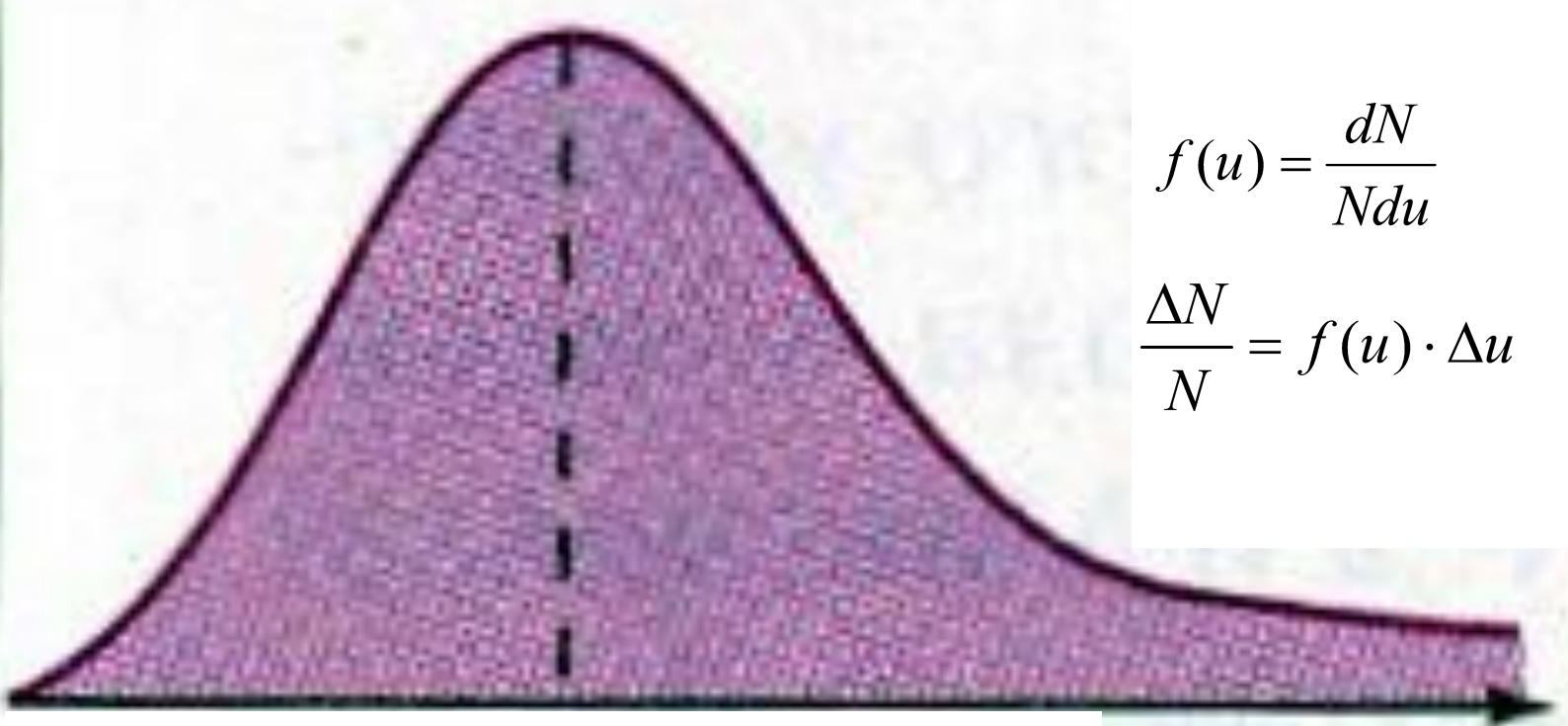
0

1

u

$$f(u) = \frac{dN}{Ndu}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = f(u) \cdot \Delta u$$



Значения функции $f(u)$

u	f(u)	u	f(u)	u	f(u)
0	0	0,9	0,81	1,8	0,29
0,1	0,02	1,0	0,83	1,9	0,22
0,2	0,09	1,1	0,82	2,0	0,16
0,3	0,18	1,2	0,78	2,1	0,12
0,4	0,31	1,3	0,71	2,2	0,09
0,5	0,44	1,4	0,63	2,3	0,06
0,6	0,57	1,5	0,54	2,4	0,04
0,7	0,68	1,6	0,46	2,5	0,03
0,8	0,76	1,7	0,36		

$$dN(u) = N f(u) du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N u^2 e^{-u^2} du$$

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} Nu^2 e^{-u^2} du$$

Относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от $u_1 < u < \infty$, рассчитанные по формуле:

$$\frac{N_1}{N} = \int_{u_1}^{\infty} f(u)du$$

, приводятся в таблице:

u_1	N_1/N	u_1	N_1/N
0	1,000	0,8	0,734
0,2	0,994	1,0	0,572
0,4	0,957	1,25	0,374
0,5	0,918	1,5	0,213
0,6	0,868	2,0	0,046
0,7	0,806	2,5	0,0057

4.(5.95) Какая часть молекул кислорода (O_2) при $t=0^\circ C$ обладает модулем скорости, заключенным в интервале от $u_1=100$ м/с до $u_2=110$ м/с?

Решение.

Дано

$$T=273K$$

$$u_1=100 \text{ м/с до}$$

$$u_2=110 \text{ м/с}$$

$$\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = ?$$

$$v_g = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 273}{32 \cdot 10^{-3}}} \approx 376 \text{ (м/с)}$$

$$u_1 = \frac{v_1}{v_g} = \frac{100}{376} = 0,27$$

$$u_2 = 0,297 (\approx 0,3)$$

$$\Delta u = \frac{v_2 - v_1}{v_g} = 0,027$$

$$\Delta u \ll u$$

$$\frac{\Delta N}{N} = f(u) \cdot \Delta u$$

u	f(u)	u	f(u)	u	f(u)
0	0	0,9	0,81	1,8	0,29
0,1	0,02	1,0	0,83	1,9	0,22
0,2	0,09	1,1	0,82	2,0	0,16
0,3	0,18	1,2	0,78	2,1	0,12
0,4	0,31	1,3	0,71	2,2	0,09
0,5	0,44	1,4	0,63	2,3	0,06
0,6	0,57	1,5	0,54	2,4	0,04
0,7	0,68	1,6	0,46	2,5	0,03
0,8	0,76	1,7	0,36		

$f(u)$

$$\frac{\Delta N}{N} = f(u) \cdot \Delta u$$

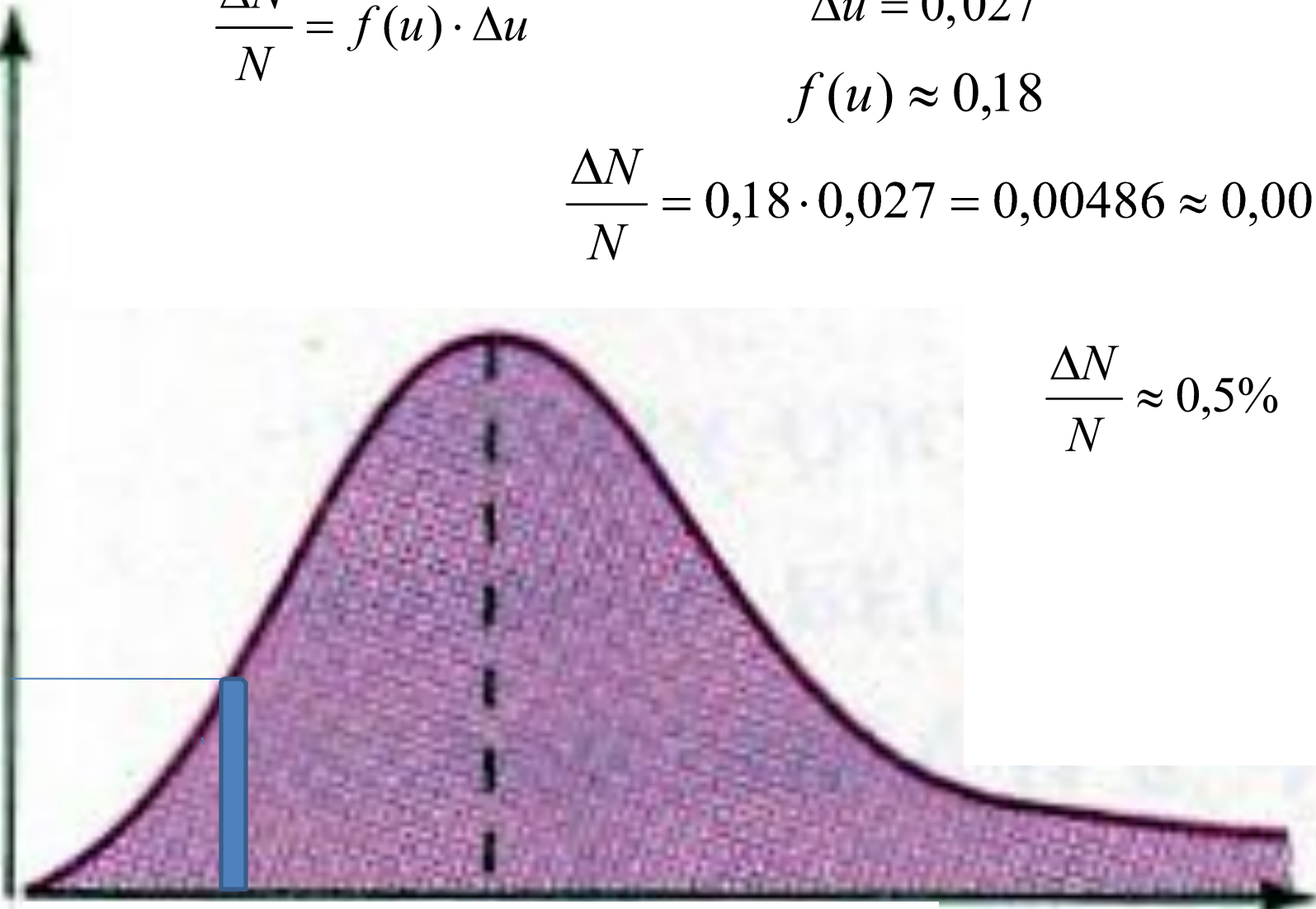
$$\Delta u = 0,027$$

$$f(u) \approx 0,18$$

$$\frac{\Delta N}{N} = 0,18 \cdot 0,027 = 0,00486 \approx 0,005$$

$$\frac{\Delta N}{N} \approx 0,5\%$$

0,18



0,297 0,3

1

u

5.(5.97) Какая часть молекул водорода (H_2) при $t=0^\circ C$ обладает модулем скорости, заключенным в интервале от $u_1=2000$ м/с до $u_2=2100$ м/с?

Решение. .

$$v_g = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 273}{2 \cdot 10^{-3}}} = 1506 \text{ (м/с)}$$

Дано

$$\mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$u_1 = 2000 \text{ м/с}$$

$$u_2 = 2100 \text{ м/с}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = ?$$

$$u = \frac{v}{v_g} = \frac{2000}{1506} = 1,33$$

$$u = 1,33 (\approx 1,3)$$

$$f(u) = 0,71$$

u	f(u)	u	f(u)	u	f(u)
0	0	0,9	0,81	1,8	0,29
0,1	0,02	1,0	0,83	1,9	0,22
0,2	0,09	1,1	0,82	2,0	0,16
0,3	0,18	1,2	0,78	2,1	0,12
0,4	0,31	1,3	0,71	2,2	0,09
0,5	0,44	1,4	0,63	2,3	0,06
0,6	0,57	1,5	0,54	2,4	0,04
0,7	0,68	1,6	0,46	2,5	0,03
0,8	0,76	1,7	0,36		

$$\Delta u \ll u \quad \Delta u = \frac{\Delta v}{v_g} = \frac{2100 - 2000}{1506} = 0,066$$

$$\frac{\Delta N}{N} = f(u) \cdot \Delta u$$

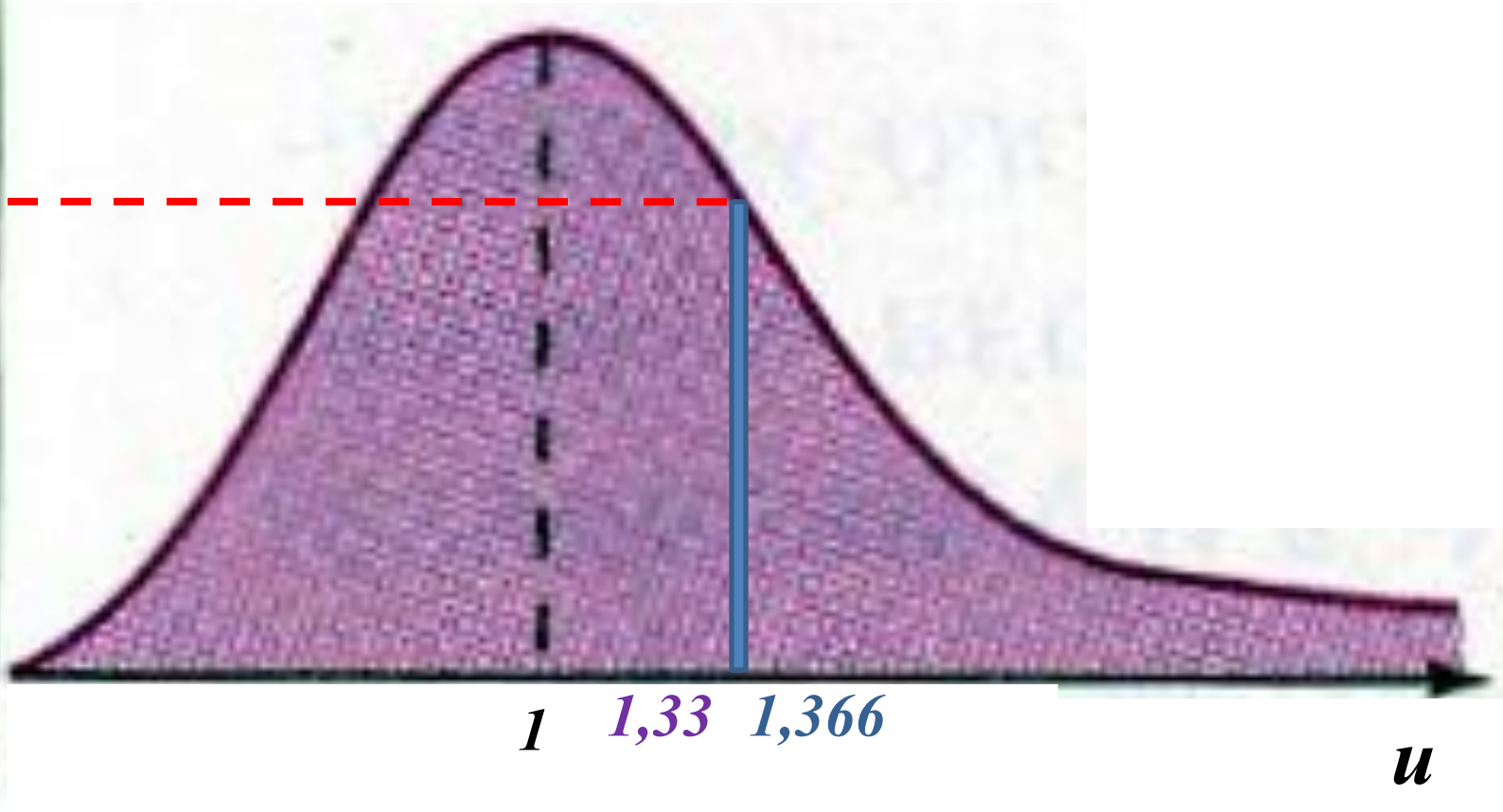
$$u = \frac{v}{v_e} = \frac{2000}{1506} = 1,33 \quad \Delta u = \frac{\Delta v}{v_e} = \frac{2100 - 2000}{1506} = 0,066$$

$$f(u) = 0,71$$

$$\frac{\Delta N}{N} = f(u) \cdot \Delta u = 0,71 \cdot 0,066 = 0,0469 \approx 0,047$$

$f(u)$

0,71



Ответ: 4,5 %.

6.(5.99) Какая часть молекул азота (N_2), находящегося при температуре T , имеет скорости, лежащие в интервале от u_B до $u_B + \Delta u$, где $\Delta u = 20$ м/с?

Задачу решить для: 1) $T = 400$ К, 2) $T = 900$ К.

Дано

$$\mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$\Delta u = 20 \text{ м/с}$$

$$1) \quad T = 400 \text{ К}$$

$$2) \quad T = 900 \text{ К}$$

$$\frac{\Delta N_1}{N} = ?$$

$$\frac{\Delta N_2}{N} = ?$$

$$u_{e_1} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

$$u_{e_1} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 400}{28 \cdot 10^{-3}}} = 487 \text{ (м/с)}$$

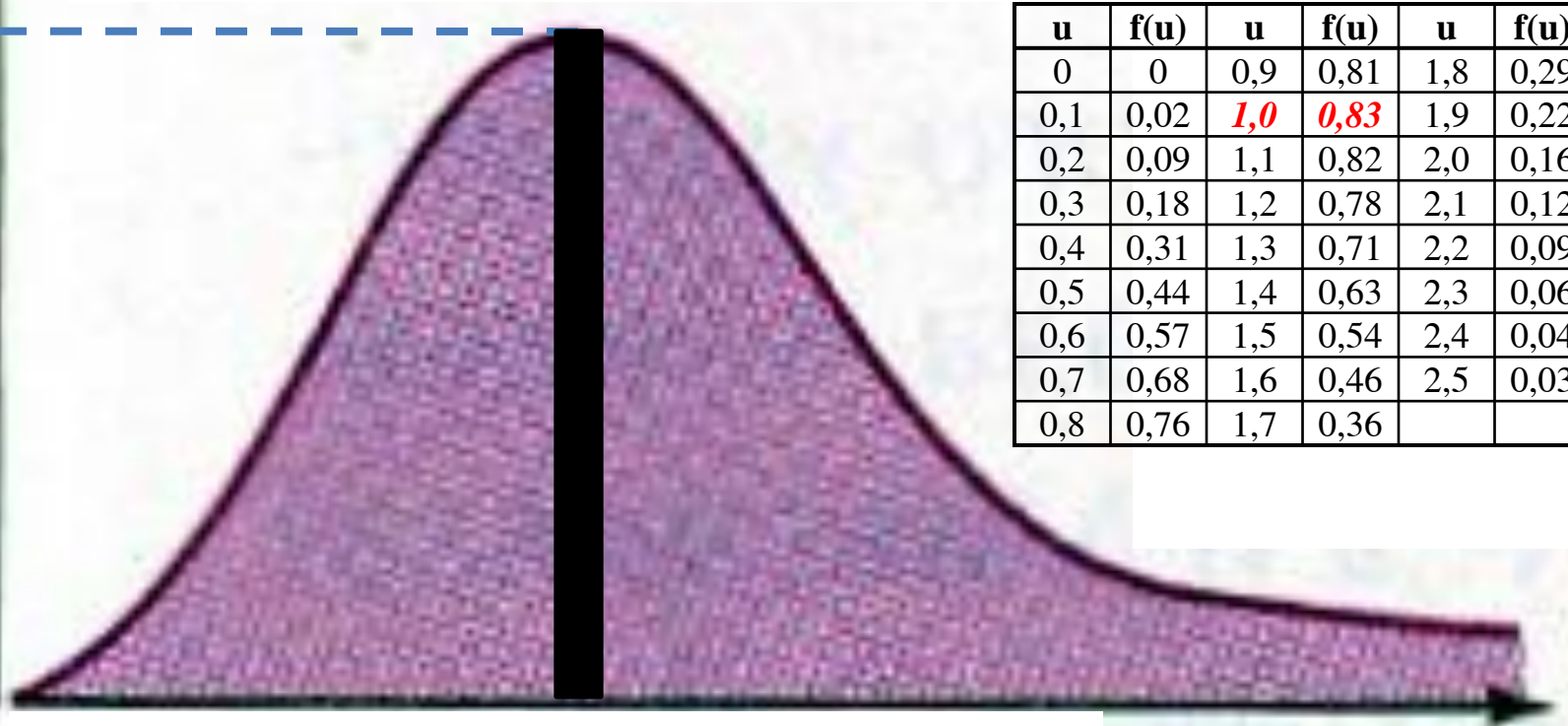
$$u_{e_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 900}{28 \cdot 10^{-3}}} = 731 \text{ (м/с)}$$

$f(u)$

$$u_1 = \frac{v_{\epsilon 1}}{v_{\epsilon 1}} = 1 \quad u_{12} = \frac{v_{\epsilon} + \Delta v}{v_{\epsilon 1}} = 1,041 \quad \Delta u_1 = \frac{\Delta v}{v_{\epsilon 1}} = \frac{20}{487} = 0,041$$

$$f(1) = 0.83 \quad \frac{\Delta N_1}{N} = f(u) \cdot \Delta u_1 = 0,83 \cdot 0,041 = 0,034$$

0,83



1 1,041

u

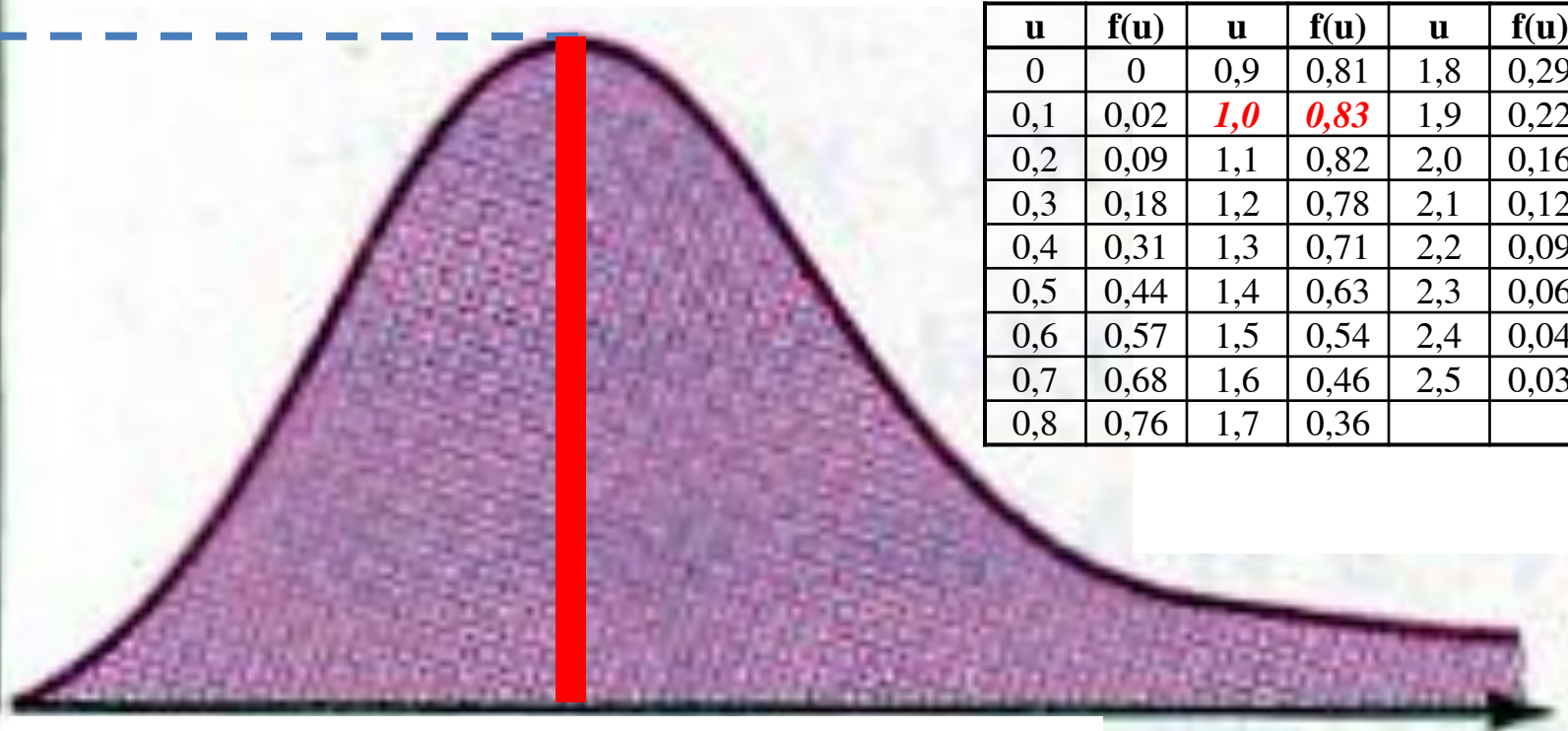
$f(u)$

$$u_2 = \frac{v_{\epsilon_2}}{v_{\epsilon_2}} = 1$$

$$\Delta u_{22} = \frac{v_{\epsilon_2} + \Delta v}{v_{\epsilon_2}} = 1,027$$

$$\Delta u_2 = \frac{\Delta v}{v_{\epsilon_2}} = 0,027$$

$$\frac{\Delta N_2}{N} = f(u) \cdot \Delta u_2 = 0,83 \cdot 0,027 = 0,022$$

0,83

u	f(u)	u	f(u)	u	f(u)
0	0	0,9	0,81	1,8	0,29
0,1	0,02	1,0	0,83	1,9	0,22
0,2	0,09	1,1	0,82	2,0	0,16
0,3	0,18	1,2	0,78	2,1	0,12
0,4	0,31	1,3	0,71	2,2	0,09
0,5	0,44	1,4	0,63	2,3	0,06
0,6	0,57	1,5	0,54	2,4	0,04
0,7	0,68	1,6	0,46	2,5	0,03
0,8	0,76	1,7	0,36		

1 1,022**u****Ответ:** 1) $\Delta N/N=3,4\%$; 2) $\Delta N/N=2,2\%$

%

7.(5.100) Какая часть молекул азота N_x/N при температуре $t=150^\circ\text{C}$ обладает скоростями, лежащими в интервале от $u_1=300$ м/с до $u_2=800$ м/с?

Ответ: $N_1/N=87\%$; $N_2/N=17\%$; $N_x/N=70\%$.

Дано

$t=150^\circ\text{C}$

$u_1=300$ м/с

$u_2=800$ м/с?

$N_x/N=?$

$$\Delta v = v_2 - v_1 = 500 \text{ м/с}$$

$$v_g = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 423}{28 \cdot 10^{-3}}} = 498,7 \approx 499 (\text{м/с})$$

$$u_1 = \frac{v_1}{v_g} = \frac{300}{499} = 0,60$$

$$u_2 = \frac{v_2}{v_g} = \frac{800}{499} = 1,60$$

u_1	N_1/N	u_1	N_1/N
0	1,000	0,8	0,734
0,2	0,994	1,0	0,572
0,4	0,957	1,25	0,374
0,5	0,918	1,5	0,213
0,6	0,868	2,0	0,046
0,7	0,806	2,5	0,0057

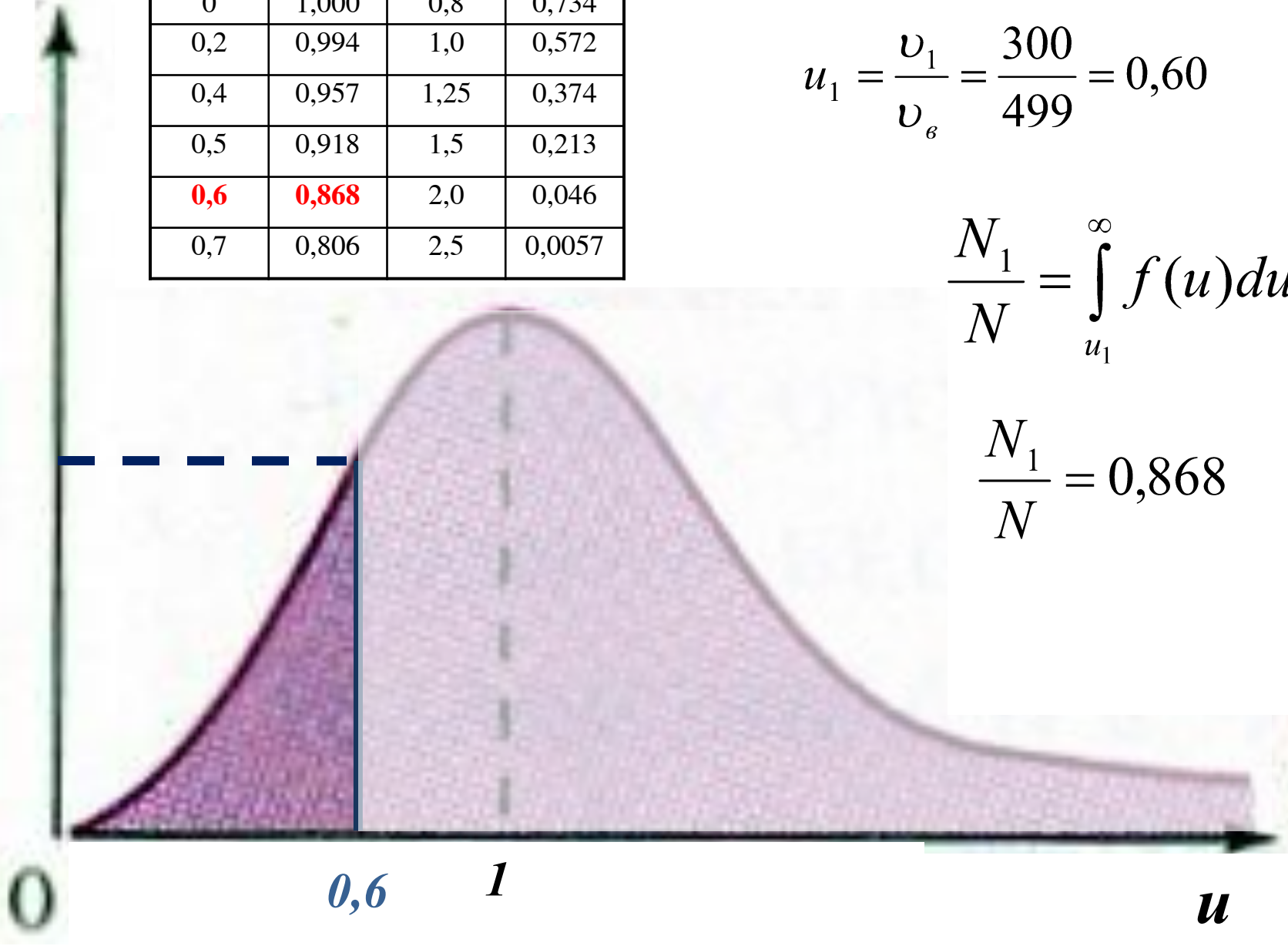
u_1	N_1/N	u_1	N_1/N
0	1,000	0,8	0,734
0,2	0,994	1,0	0,572
0,4	0,957	1,25	0,374
0,5	0,918	1,5	0,213
0,6	0,868	2,0	0,046
0,7	0,806	2,5	0,0057

$$u_1 = \frac{v_1}{v_6} = \frac{300}{499} = 0,60$$

$$\frac{N_1}{N} = \int_{u_1}^{\infty} f(u) du$$

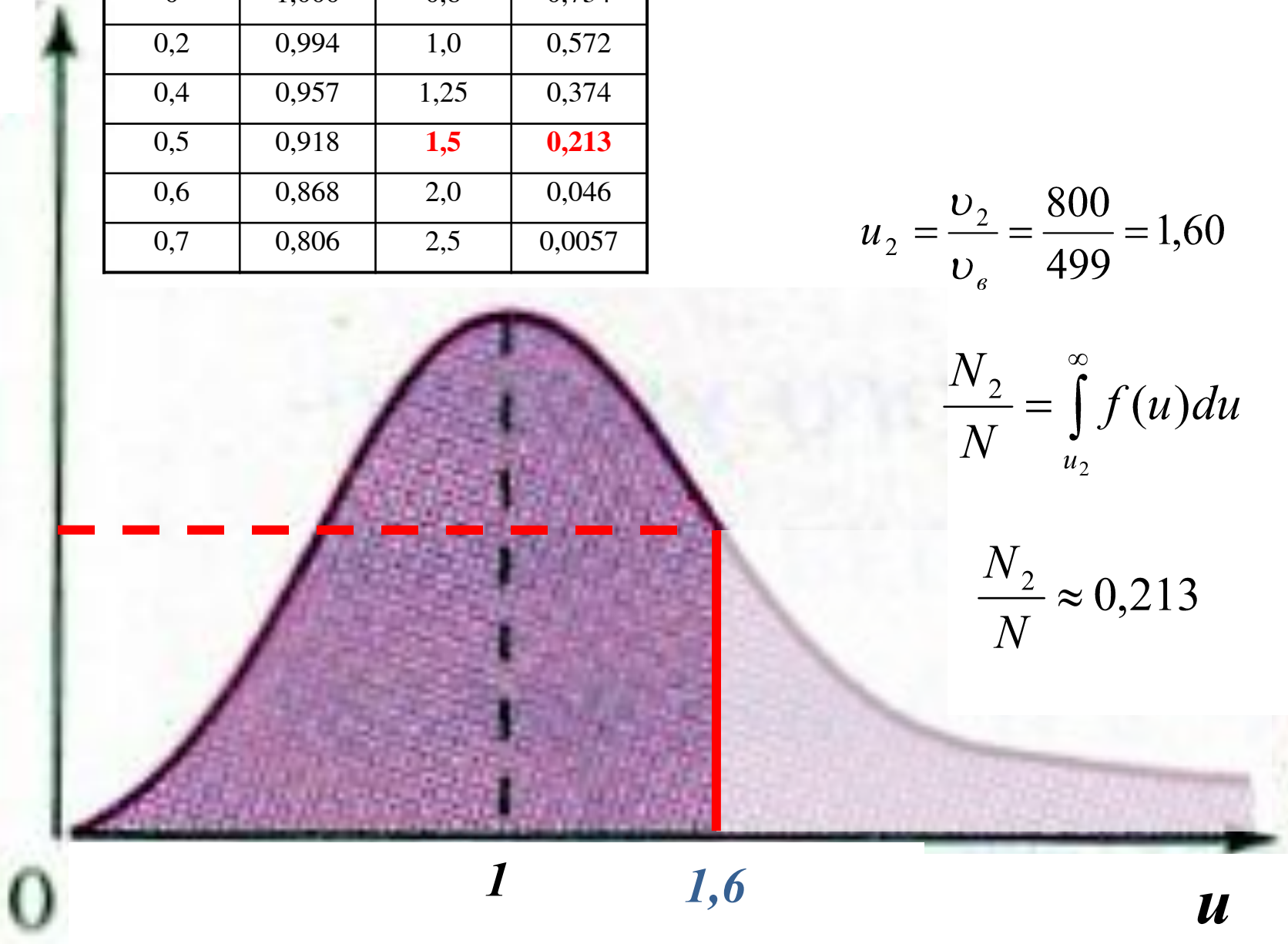
$$\frac{N_1}{N} = 0,868$$

$f(u)$



u_1	N_1/N	u_1	N_1/N
0	1,000	0,8	0,734
0,2	0,994	1,0	0,572
0,4	0,957	1,25	0,374
0,5	0,918	1,5	0,213
0,6	0,868	2,0	0,046
0,7	0,806	2,5	0,0057

$f(u)$



$$u_2 = \frac{v_2}{v_6} = \frac{800}{499} = 1,60$$

$$\frac{N_2}{N} = \int_{u_2}^{\infty} f(u) du$$

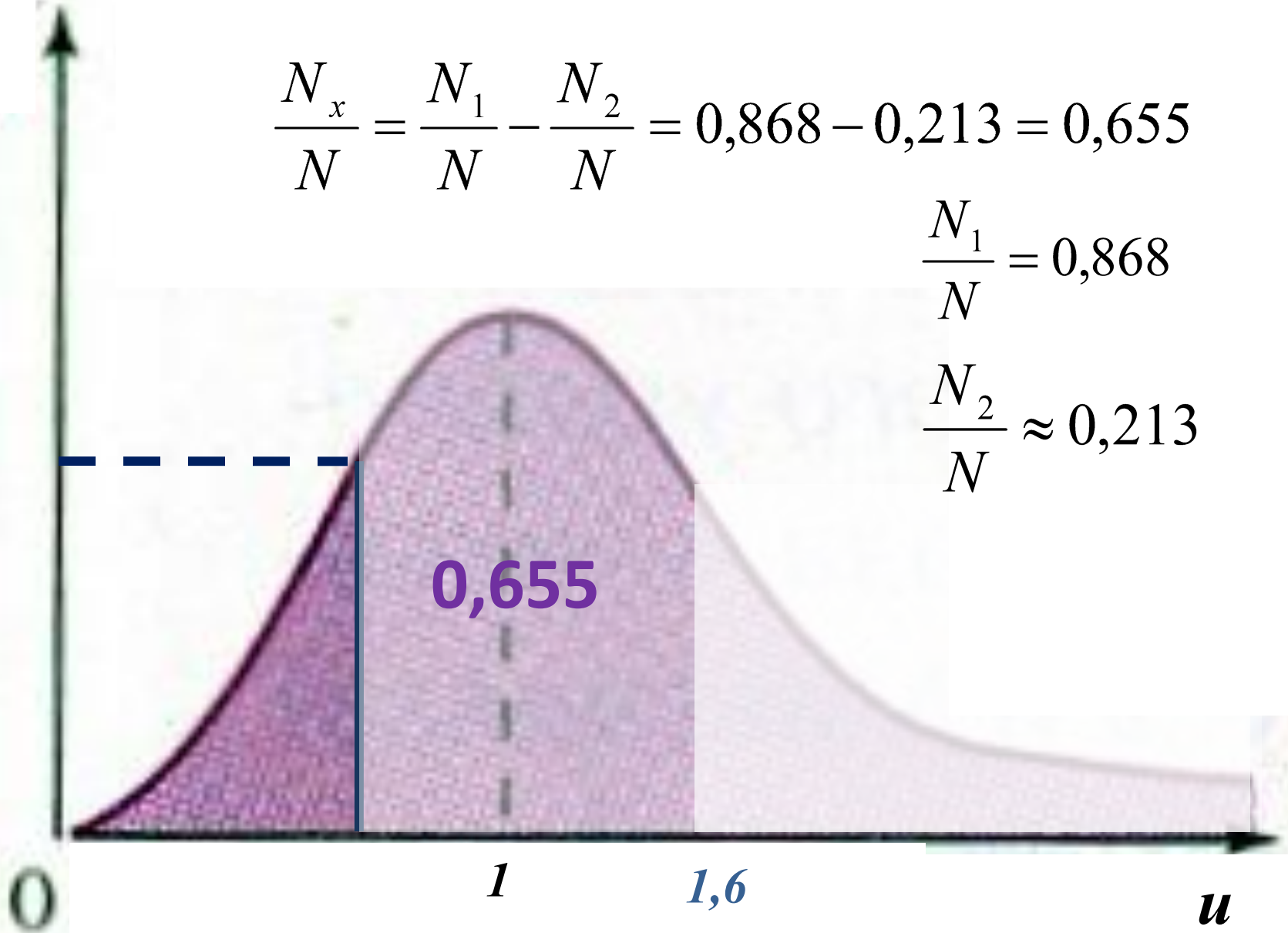
$$\frac{N_2}{N} \approx 0,213$$

$f(u)$

$$\frac{N_x}{N} = \frac{N_1}{N} - \frac{N_2}{N} = 0,868 - 0,213 = 0,655$$

$$\frac{N_1}{N} = 0,868$$

$$\frac{N_2}{N} \approx 0,213$$



Omgeem: $N_1/N=87\%$; $N_2/N=21\%$; $N_x/N=66\%$

8.(5.101) Какая часть общего числа N молекул имеет скорости:

1) больше наиболее вероятной скорости, 2) меньше наиболее вероятной скорости?

Ответ: 1) $N_1/N=57\%$; 2) $N_2/N=43\%$.

Дано

$$v > v_v$$

$$v < v_v$$

$$\frac{N_1}{N} = ?$$

$$\frac{N_2}{N} = ?$$

Решение.

Пусть $\frac{N_1}{N}$ - часть молекул, скорости которых больше наиболее вероятной скорости

Относительная скорость в этом случае

По таблице определяем для $u=1$

$$u = \frac{v}{v_v} = 1$$

$$\frac{N_1}{N} = 0,572$$

u_1	N_1/N	u_1	N_1/N
0	1,000	0,8	0,734
0,2	0,994	1,0	0,572
0,4	0,957	1,25	0,374
0,5	0,918	1,5	0,213
0,6	0,868	2,0	0,046
0,7	0,806	2,5	0,0057

$$\frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} = 1$$

Тогда часть молекул, скорости которых меньше наиболее вероятной скорости

$$\frac{N_2}{N} = 1 - \frac{N_1}{N} = 0,428$$

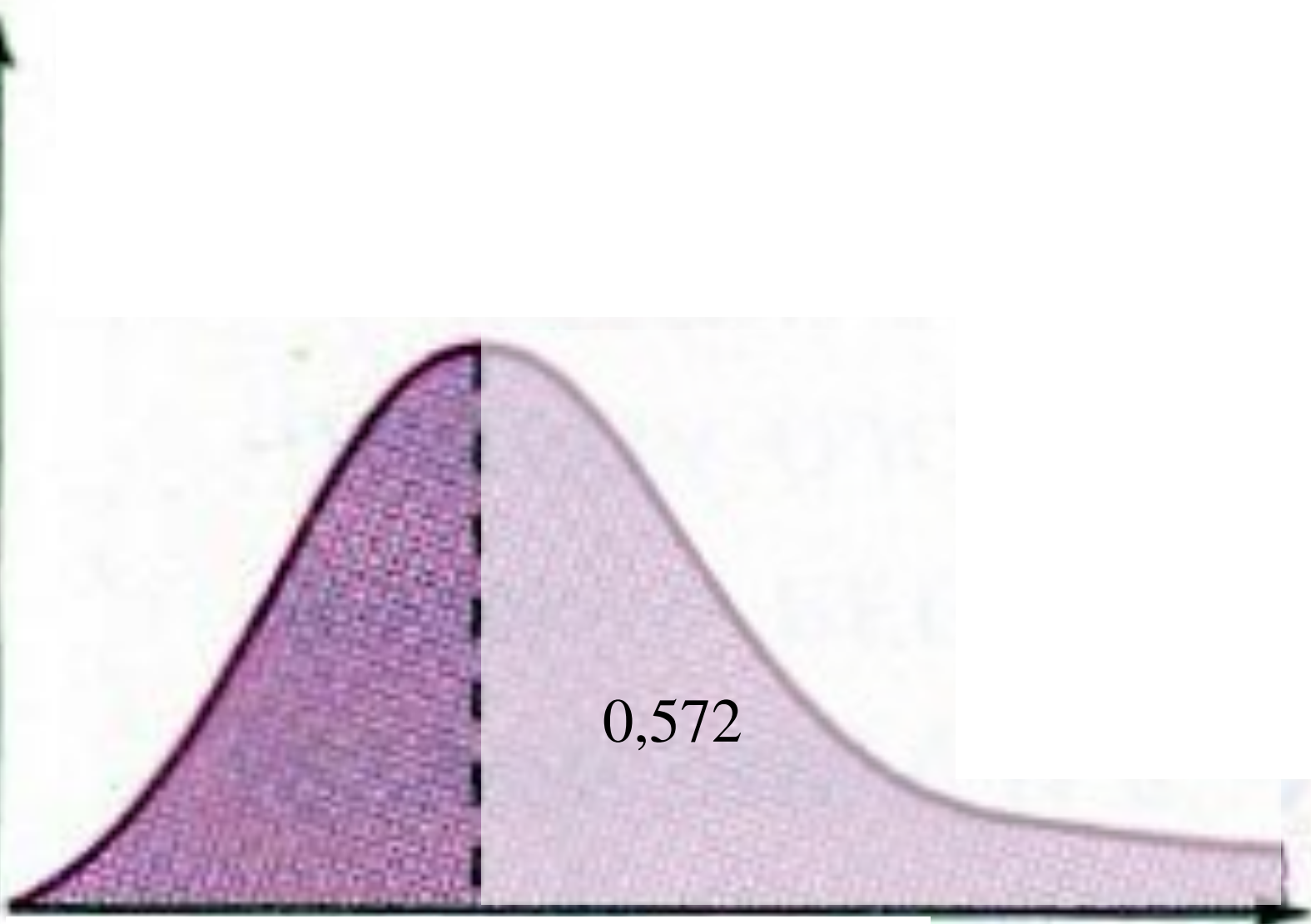
$f(u)$

0

1

u

0,572



9.(5.106) Высотная обсерватория расположена на высоте $h=3250$ м над уровнем моря. Найти давление воздуха на этой высоте. Температура воздуха постоянна и равна 5°C . Молярная масса воздуха

$\mu=29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Давление воздуха на уровне моря $p=760$ мм рт. ст.

Ответ: $P=67,8$ кПа.

Дано

$$h=3250 \text{ м}$$

$$T=5+273=278(\text{K}).$$

$$p_0=760 \text{ мм рт. ст.}$$

$$1 \text{ мм рт. ст.} = 133 \text{ Па}$$

$$\mu=29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

$$g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$P=$

?

Решение.

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}$$

P – атмосферное давление на высоте h ;

$$P = 760 \cdot 133 \cdot e^{-\frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot 3250}{8,31 \cdot 278}} = 67,8 \cdot 10^3 \text{ (Па)}$$

Ответ: $P=67,8$

кПа

10.(5.111) На какой высоте плотность газа составляет 50 % от его плотности на уровне моря? Температура постоянна и равна 0°C. Задачу решить для: 1) воздуха, 2) водорода.

Ответ: 1) $h=5,5$ км; 2) $h=80$ км.

Дано

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$$

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

$$g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$T = 273 \text{ К}$$

$$\mu_1 = 29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

$$\mu_2 = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

Решение.

$$PV = \frac{m}{\mu} RT$$

$$P = P_0 \cdot e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$$

$$h = \frac{RT \ln \frac{\rho}{\rho_0}}{\mu g}$$

$$P = \frac{m}{V \mu} RT = \frac{\rho}{\mu} RT$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$$

$$h_1 = \frac{8,31 \cdot 273 \cdot \ln 2}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ (м)}$$

$$h_2 = \frac{8,31 \cdot 273 \cdot \ln 2}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} = 8,0 \cdot 10^3 \text{ ()}$$