Многомерные модели временных рядов

Лекция 14

БИТИ
НИЯУ МИФИ

БАЛАКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ФИЛИАЛ НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ»

План лекции

Модели стационарных временных рядов:

- Модель распределенных лагов;
- Авторегрессионная модель распределенных лагов;
- Автокорреляция.

Многомерные модели временных рядов

Ранее мы рассматривали модели для единственного временного ряда.

Теперь мы будем анализировать модели, включающие несколько рядов.

Мотивация:

- Такой подход может улучшить качество прогнозов;
- Такой подход позволяет отвечать на вопросы о динамических причинно-следственных связях.

Примеры вопросов о динамических причинно-следственных связях

- Как увеличение налога на сигареты скажется на их потреблении в этом году, через год, через пять лет?
- Банк России увеличил ставку рефинансирования. Как это скажется на инфляции через месяц? Через 2 месяца? Через 6 месяцев?
- Как увеличение расходов на рекламу сегодня повлияет на объем продаж в следующем квартале?

Динамические модели со стационарными переменными

В рамках этой лекции мы предполагаем, что выполняется предпосылка о стационарности всех используемых временных рядов.

Модель распределенных лагов

The Distributed-Lag Model

$$y_t = \beta_0 + \delta_0 x_t + \delta_1 x_{t-1} + \cdots + \delta_q x_{t-q} + u_t$$

Предпосылки:

1. Регрессоры экзогенны $E(u_t | x_{t-1}, \ldots, x_{t-q}) = 0$
2. Нет совершенной мультиколлинеарности
3. Временные ряды x_t и y_t стационарны
4. Временные ряды x_t и y_t имеют конечные восьмые моменты распределения (техническая предпосылка)

Модель распределенных лагов

The Distributed-Lag Model

$$y_t = \beta_0 + \delta_0 x_t + \delta_1 x_{t-1} + \cdots + \delta_q x_{t-q} + u_t$$

Оценивание:

При выполнении предпосылок 1- 4 МНК дает состоятельные оценки коэффициентов модели.

Модель распределенных лагов

$$y_t = \beta_0 + \delta_0 x_t + \delta_1 x_{t-1} + \cdots + \delta_q x_{t-q} + u_t$$

Интерпретация:

1. δ_0 - мгновенный эффект: мгновенное влияни x_t y_t
2. δ_j - динамический мультипликатор j-го периода, j ≥ 1.
3. $\delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_j$ - накопленный динамический мультипликатор j-го периода.
4. $\delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_q$ - долгосрочный динамический мультипликатор (эффект).

Связь расходов на рекламу (x_t) и объема продаж (y_t) фирмы

$$y_t = \beta_0 + \delta_0 x_t + \delta_1 x_{t-1} + \delta_2 x_{t-2} + u_t$$

$$\hat{y}_t = 9{,}1 + 0{,}3x_t + 0{,}9x_{t-1} + 0{,}6x_{t-2}$$

$\hat{\delta}_0$ - мгновенный эффект: увеличение расходов на рекламу на единицу увеличивает объем продаж в том же периоде на 0,3 единицы.

$\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 = 1{,}2$ - накопленный динамический мультипликатор 1-го периода: увеличение расходов на рекламу на единицу увеличивает объем продаж в сумме в текущем и следующем периодах на 1,2 единицы.

Связь расходов на рекламу (x_t) и объема продаж (y_t) фирмы

$$y_t = \beta_0 + \delta_0 x_t + \delta_1 x_{t-1} + \delta_2 x_{t-2} + u_t$$

$$\hat{y}_t = 9{,}1 + 0{,}3x_t + 0{,}9x_{t-1} + 0{,}6x_{t-2}$$

$\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2 = 1{,}8$ - долгосрочный динамический мультипликатор: увеличение расходов на рекламу на единицу увеличивает объем продаж в сумме по итогам текущего и всех последующих периодов на 1,8 единицы.

Заморозки во Флориде и цены на апельсины

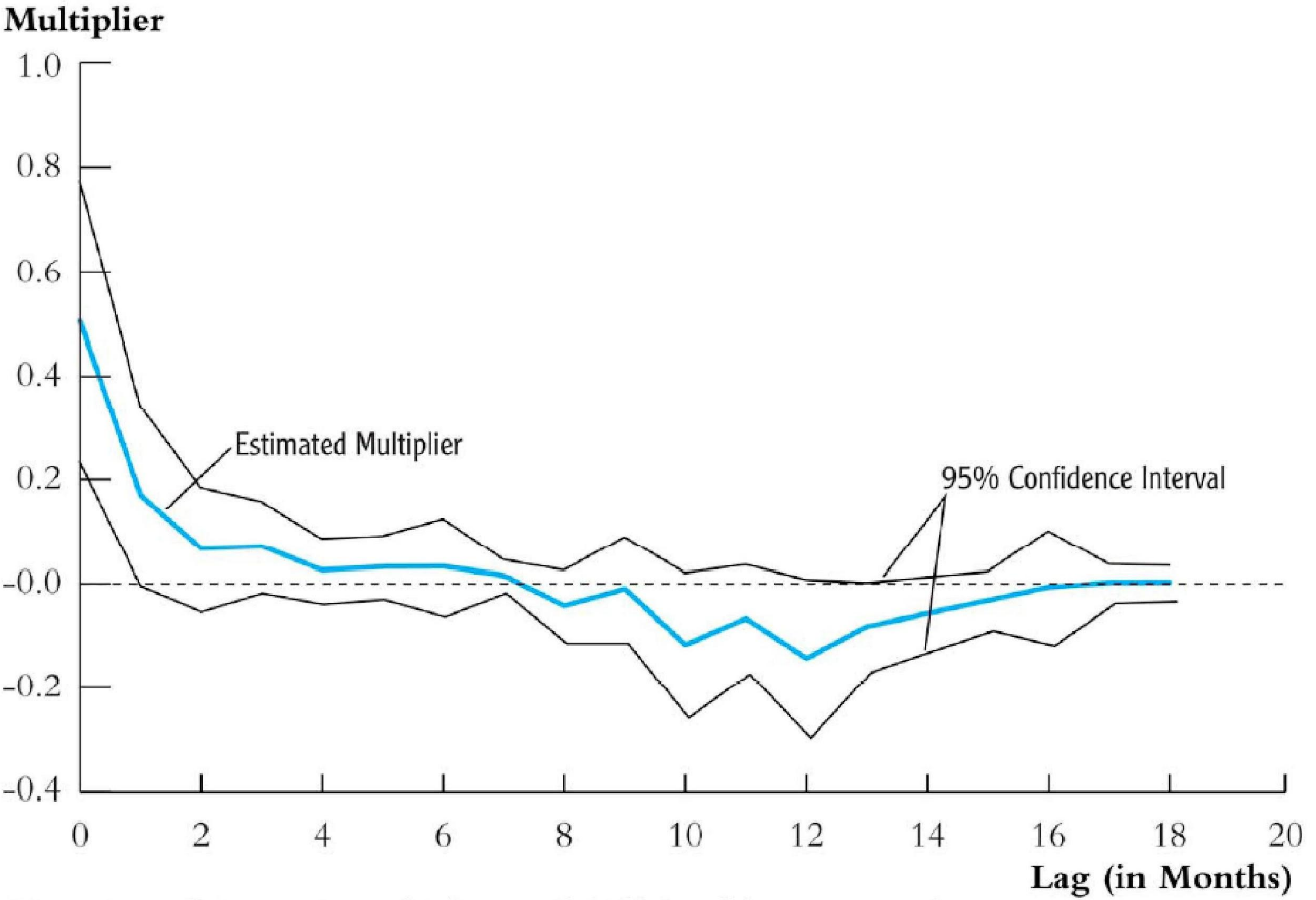
Во Флориде производится значительная часть апельсинов, потребляемых в США.

Заморозки во Флориде влияют на урожайность апельсинов, на их предложение и, следовательно, на их равновесную цену.

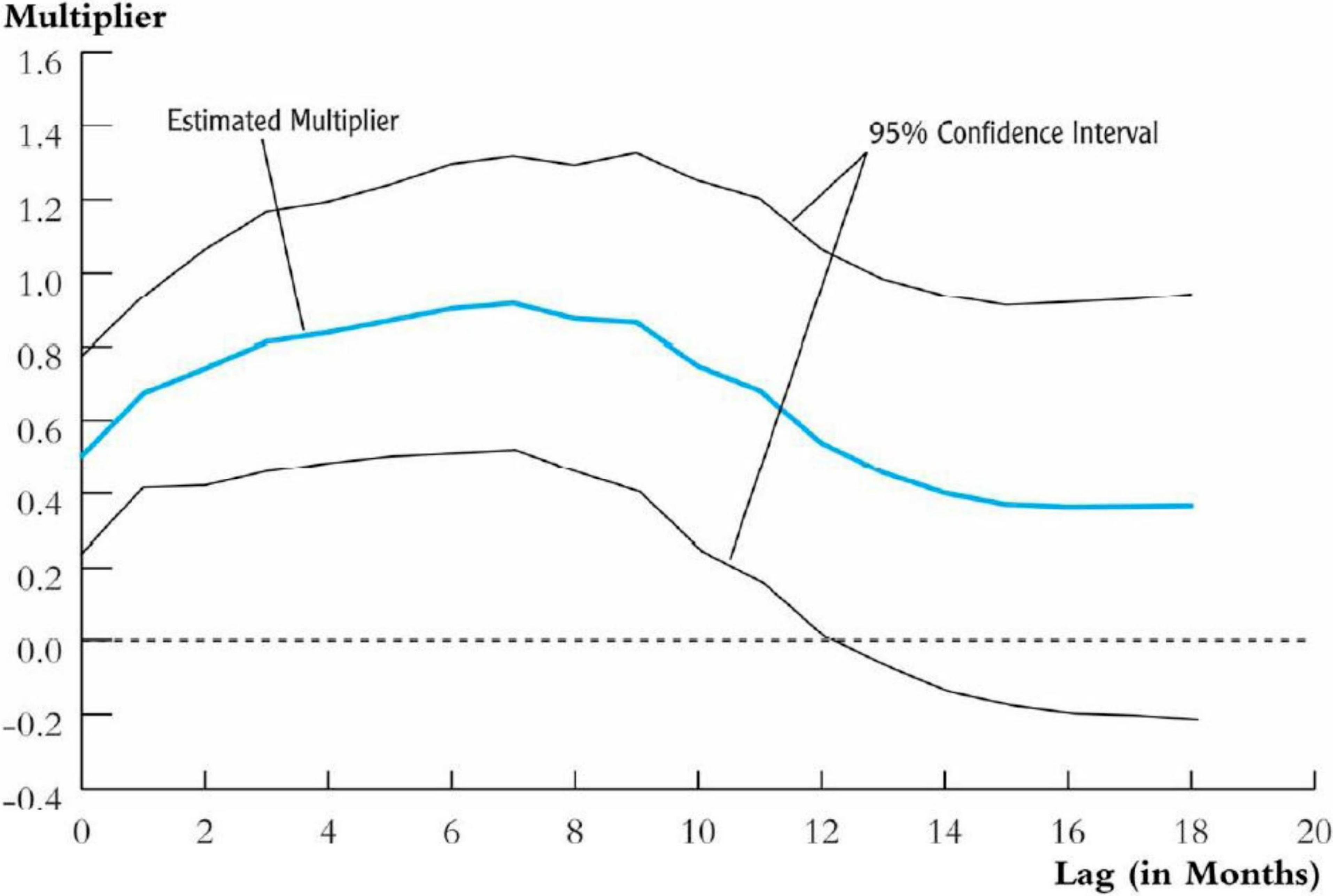
y_t - равновесная цена апельсинов в месяце t

x_t - количество дней заморозков во Флориде в месяце t

Источник данных: *Stock, Watson*



(a) Estimated Dynamic Multipliers and 95% Confidence Interval



(b) Estimated Cumulative Dynamic Multipliers and 95% Confidence Interval

Авторегрессионная модель распределенных лагов

Естественное обобщение предыдущей модели – **ADL(p,q)**

The Autoregressive Distributed-Lag Model

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \cdots + \beta_p y_{t-p} +$$

$$+\delta_1 x_{t-1} + \cdots + \delta_q x_{t-q} + u_t$$

Эмпирическая кривая Филлипса (с адаптивными ожиданиями)

Пример модели ADL(4,4) на основе данных о безработице и инфляции в США (1962 – 2004)

$$\widehat{\Delta Inf_t} = \underset{(0{,}44)}{1{,}30} - \underset{(0{,}08)}{0{,}42}\Delta Inf_{t-1} - \underset{(0{,}09)}{0{,}37}\Delta Inf_{t-2} + \underset{(0{,}08)}{0{,}06}\Delta Inf_{t-3} - \underset{(0{,}08)}{0{,}04}\Delta Inf_{t-4}$$

$$- \underset{(0{,}46)}{2{,}64} Unem_{t-1} + \underset{(0{,}86)}{3{,}04} Unem_{t-2} - \underset{(0{,}89)}{0{,}38} Unem_{t-3} + \underset{(0{,}45)}{0{,}25} Unem_{t-4}$$

Авторегрессионная модель распределенных лагов

ADL(p,q)

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \cdots + \beta_p y_{t-p} +$$

$$+\delta_1 x_{t-1} + \cdots + \delta_q x_{t-q} + u_t$$

- В качестве предпосылок по-прежнему требуется стационарность рядов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и экзогенность регрессоров

Авторегрессионная модель распределенных лагов

ADL(p,q)

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \cdots + \beta_p y_{t-p} +$$

$$+\delta_1 x_{t-1} + \cdots + \delta_q x_{t-q} + u_t$$

- Аналогично можно рассматривать случай большего числа объясняющих переменных $x_t^{(1)}, x_t^{(2)}$ … Но мы для краткости ограничимся одной.

Авторегрессионная модель распределенных лагов

ADL(p,q)

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \cdots + \beta_p y_{t-p} +$$

$$+\delta_1 x_{t-1} + \cdots + \delta_q x_{t-q} + u_t$$

- Порядок лагов снова можно определять, используя критерии Акаике и Шварца.

Динамические мультипликаторы в ADL модели

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \delta_0 x_t + \delta_1 x_{t-1} + u_t$$

Мгновенный эффект δ_0

Накопленные динамические мультипликаторы:

- Для одного периода $\delta_0 + (\beta_1 \delta_0 + \delta_1)$
- Для двух периодов $\delta_0 + (\beta_1 \delta_0 + \delta_1) + \beta_1(\beta_1 \delta_0 + \delta_1)$

Долгосрочный динамический мультипликатор: $(\delta_0 + \delta_1)/(1 - \beta_1)$

Тест Грейнджера
на причинно-следственную связь

Granger Causality Test

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \cdots + \beta_q y_{t-q} +$$

$$+\delta_1 x_{t-1} + \cdots + \delta_q x_{t-q} + u_t$$

Гипотеза «$\boldsymbol{x}$ не влияет на $\boldsymbol{y}$»: H_0: $\delta_1 = \cdots = \delta_q = 0$

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \cdots + \alpha_q y_{t-q} +$$

$$+\theta_1 x_{t-1} + \cdots + \theta_q x_{t-q} + u_t$$

Гипотеза «$\boldsymbol{y}$ не влияет на $\boldsymbol{x}$»: H_0: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$

Тест Грейнджера на причинно-следственную связь

- Если гипотеза **«x не влияет на y» отклоняется** и гипотеза **«y не влияет на x» принимается**, то говорят, что переменная x является причиной по Грейнджеру для переменной y.
- Исторически сложившееся название теста не очень удачное: тест **не может гарантировать** наличия причинно-следственной связи.
- Тест может указывать на потенциальную **возможность** ее наличия и на то, что одна переменная полезна при прогнозировании другой.

Значимость коэффициентов и доверительные интервалы

$$y_t = \beta_0 + \delta_0 x_t + \delta_1 x_{t-1} + \cdots + \delta_q x_{t-q} + u_t$$

Если u_t - белый шум, то можно использовать обычный подход к тестированию, который мы обсуждали для пространственных выборок.

Но на практике u_t обычно коррелированы друг с другом, то есть описываются процессом авторегрессии:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \cdots + \rho_k u_{t-k} + \varepsilon_t$$

$\Longrightarrow$Автокорреляция случайных ошибок.

Автокорреляция

План рассказа об автокорреляции:

1. Что такое автокорреляция?
2. Чем она плоха?
3. Что можно сделать в случае автокорреляции?
4. Как понять, есть ли эта проблема в модели или нет?

Автокорреляция

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \cdots + \rho_k u_{t-k} + \varepsilon_t$$

- Автокорреляция случайных ошибок – такое же типичное явление для временных рядов, как гетероскедастичность для пространственных выборок.
- Ее последствия во многом аналогичны последствиям гетероскедастичности.

Последствия автокорреляции

1. МНК-оценки коэффициентов остаются несмещенными, но…
2. МНК-оценки коэффициентов становятся неэффективными.
3. Стандартные ошибки коэффициентов смещены и несостоятельны $\Longrightarrow$ t-статистики вычисляются некорректно

Что делать в условиях автокорреляции?

1. Робастные стандартные ошибки
2. Обобщенный МНК

Робастные стандартные ошибки

Как было сказано выше, оценки коэффициентов не смещены (хоть и неэффективны).

Смещены и несостоятельны стандартные ошибки.

Один из подходов к решению проблемы – вычисление состоятельных (в условиях автокорреляции) стандартных ошибок

– HAC (heteroskedasticity and autocorrelation-consistent) standard errors

Робастные стандартные ошибки

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + u_t$$

Робастная к автокорреляции и гетероскедастичности стандартная ошибка коэффициента при переменной (HAC standard error):

$$\widetilde{se}(\widehat{\beta_2}) = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\widehat{\beta_2}} \cdot \hat{f}_T}$$

$\hat{\beta}^2_{\widehat{\beta_2}}$ - робастная к гетероскедастичности оценка дисперсии $\widehat{\beta_2}$

(в форме Уайта), см. лекцию по гетероскедас

$$\hat{f}_T = 1 + 2\sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{m-j}{m}\tilde{\rho}_j\right)$$

Робастные стандартные ошибки

$$\hat{f}_T = 1 + 2\sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{m-j}{m}\tilde{\rho}_j\right)$$

$$\tilde{\rho}_j = \frac{\sum_{t=j+1}^{T}\hat{v}_t \cdot \hat{v}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T}\hat{v}_t^2}$$

$$\hat{v}_t = (x_t - \bar{x})e_t$$

Детали –
[Stock, Watson] Ch. 15

m – truncation parameter, определяется размером выборки: $m = 0{,}75T^{\frac{1}{3}}$ (с округлением до целого)

Обобщенный МНК

Проиллюстрируем применение обобщенного МНК на примере автокорреляции первого порядка

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Обобщенный МНК

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Случай 1. Значение ρ известно

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$y_{t-1} = \beta + \delta x_{t-1} + u_{t-1}$$

Обобщенный МНК

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Случай 1. Значение ρ известно

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$\rho y_{t-1} = \rho\beta + \rho\delta x_{t-1} + \rho u_{t-1}$$

Домножим второе уравнение на ρ

Обобщенный МНК

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Случай 1. Значение ρ известно

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$y_{t-1} = \beta + \delta x_{t-1} + u_{t-1}$$

Обобщенный МНК

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Случай 1. Значение ρ известно

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$\rho y_{t-1} = \rho\beta + \rho\delta x_{t-1} + \rho u_{t-1}$$

Домножим второе уравнение на ρ

Обобщенный МНК

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Случай 1. Значение ρ известно

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$\rho y_{t-1} = \rho\beta + \rho\delta x_{t-1} + \rho u_{t-1}$$

Вычтем из первого уравнения второе

$$y_t - \boldsymbol{\rho} y_{t-1} = (1 - \boldsymbol{\rho})\beta + \delta(x_t - \boldsymbol{\rho} x_{t-1}) +$$

$$+(u_t - \boldsymbol{\rho} u_{t-1})$$

Обобщенный МНК

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Случай 1. Значение ρ известно

$$y_t - \boldsymbol{\rho} y_{t-1} = (1 - \boldsymbol{\rho})\beta + \delta(x_t - \boldsymbol{\rho} x_{t-1}) +$$

$$+(u_t - \boldsymbol{\rho} u_{t-1})$$

Обобщенный МНК

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Случай 1. Значение ρ известно

$$y_t - \boldsymbol{\rho} y_{t-1} = (1 - \boldsymbol{\rho})\beta + \delta(x_t - \boldsymbol{\rho} x_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Обобщенный МНК

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Случай 1. Значение ρ известно

$$y_t - \boldsymbol{\rho} y_{t-1} = (1 - \boldsymbol{\rho})\beta + \delta(x_t - \boldsymbol{\rho} x_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Сделаем замену переменных:

$$y_t^* = y_t - \boldsymbol{\rho} y_{t-1}$$
$$x_t^* = x_t - \boldsymbol{\rho} x_{t-1}$$

Обобщенный МНК

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Случай 1. Значение ρ известно

$$y_t^* = (1 - \boldsymbol{\rho})\beta + \delta x_t^* + \varepsilon_t$$

В новой модели нет автокорреляции

Обобщенный МНК

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Случай 2. Значение ρ неизвестно

Обобщенный МНК

$$y_t = \beta + \delta x_t + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Случай 2. Значение ρ неизвестно

1. Оцениваем исходную регрессию обычным МНК. Получаем ряд остатков.
2. Оцениваем регрессию для остатков:

$$\hat{e}_t = \hat{\rho} e_{t-1} \quad \Longrightarrow \quad \hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T} e_t \cdot e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} e_{t-1}^2}$$

3. Далее действуем в соответствии со случаем 1, используя $\hat{\rho}$.

Обобщенный МНК

Два важных замечания:

Замечание 1. Описанный выше алгоритм можно последовательно применить несколько раз: заново оценить остатки, заново оценить $\hat{\rho}$, заново сделать замену переменных и так далее.

Итерации повторяются до тех пор, пока не достигается сходимость (оценки коэффициентов при переменных и оценка $\hat{\rho}$ перестают изменяться).

Такая процедура называется процедурой Кохрейна-Оркатта.

Обобщенный МНК

Два важных замечания:

Замечание 2. Вернемся к уравнению

$$y_t - \boldsymbol{\rho} y_{t-1} = (1 - \boldsymbol{\rho})\beta + \delta(x_t - \boldsymbol{\rho} x_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Перепишем его следующим образом:

$$y_t = (1 - \boldsymbol{\rho})\beta + \boldsymbol{\rho} y_{t-1} + \delta x_t + (-\boldsymbol{\rho}\delta) x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \delta_0 x_t + \delta_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$$

Мы получили модель ADL. Вместо описанной выше процедуры можно оценивать непосредственно ее. И в ней также нет проблемы автокорреляции остатков. $\Longrightarrow$ Еще один способ устранить автокорреляцию – использовать ADL модели.

Тестирование автокорреляции

Как выяснить, есть ли в модели автокорреляция?

1. Анализ графиков остатков.
2. Коррелограмма остатков и тест Льюинга-Бокса для ряда остатков.
   - Если в модели нет автокорреляции, то остатки должны вести себя как белый шум.
3. Тест Дарбина-Уотсона.

Тест Дарбина-Уотсона

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \qquad\qquad H_0\colon\ \rho = 0$$

Расчетное значение тестовой статистики:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{T}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2}$$

$$DW \approx 2(1-\hat{\rho}) \qquad\qquad \hat{\rho} \approx 1 - \frac{1}{2}DW$$

Два критических значения: $d_L < d_U$

Тест Дарбина-Уотсона

$$DW \approx 2(1-\hat{\rho}) \qquad \hat{\rho} \approx 1 - \frac{1}{2}DW$$

$$DW < d_L \implies \rho > 0$$

$$d_U < DW < 4 - d_U \implies \rho = 0$$

$$DW > 4 - d_L \implies \rho < 0$$

В остальных случаях нельзя сделать вывод.

Тест Дарбина-Уотсона

Ограничения теста:

1. Применим только если в модели есть константа.
2. Нельзя применять, если в правой части уравнения есть лагированное значение зависимой переменной y_{t-1}).
3. Корректен только в случае, если в модели автокорреляция не выше первого порядка.