Линейная алгебра
1. Матрицы и операции над ними

Литература

- Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* – М.: Наука, любое издание.
- Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры* – М.: Наука, любое издание.
- Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре –Спб.: Лань, 2010. - 480 с.

Определение. ***Матрицей*** размера m на n называется прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

состоящая из элементов a_{ij} и содержащая *m* строк и *n* столбцов. Если *m* = *n*, то матрица называется *квадратной* порядка *n*.

Числа a_{ij} называются *элементами матрицы*; первый индекс в обозначении элемента указывает номер строки, а второй – номер столбца, в которой находится этот элемент. Для сокращения записи матриц используются заглавные буквы: *A*,*B*,…

Набор элементов $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ квадратной матрицы называется *главной диагональю,* а сумма диагональных элементов – *следом матрицы* и обозначается *tr A (*от английского слова *trace)*

Используется также краткое обозначение матрицы: $A = (a_{ij})$.

Две матрицы считаются *равными,* если они одного размера и равны их элементы, расположенные на одинаковых местах.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей и обозначается 0.

Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, т.е матрица вида:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называется *диагональной*. Частным случаем диагональной матрицы является *единичная* матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

на главной диагонали которой стоят числа 1, а вне диагонали записаны 0.

Квадратная матрица, для которой все элементы, стоящие под (над) главной диагональю, равны 0, называется *верхней треугольник* (*нижний треугольник*).

Операции над матрицами

- Над матицами можно выполнять ряд операций. Прежде всего матрицы одинакового размера можно складывать.

Определение. Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одних и т ех же порядков m на n называется матрица С тех же порядков m на n, элементы c_{ij} которой равны $\underset{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}{c_{ij} = a_{ij}} + b_{ij}$.

Для обозначения суммы используется запись $С = A + B$

- Таким образом, сложить две матрицы означает сложить их элементы, стоящие на одинаковых местах. Например,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 5 & 11 & 8 \end{pmatrix}.$$

Матрицы можно умножать на числа.

Определение. ***Произведением матрицы*** $A = (a_{ij})$ размерности m на n **на число** λ *называется матрица* $C = (c_{ij})$ размерности m на n, элементы которой

c_{ij} равны $c_{ij} = \lambda a_{ij} \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$

$$C = \lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

.

Операция сложения матриц обладает следующими свойствами:

1. $A + B = B + A$ (*коммутативности*);
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (*ассоциативности*).

Эти свойства позволяют не заботиться о порядке следования слагаемых матриц при сложении двух или большего числа матриц.

- Умножение матрицы на число обладает следующими свойствами:

1. $(\lambda \cdot \mu)A = \lambda(\mu \cdot A)$ (ассоциативность относительно числового множителя);
2. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (дистрибутивность относительно суммы матриц);
3. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (дистрибутивность относительно суммы чисел).

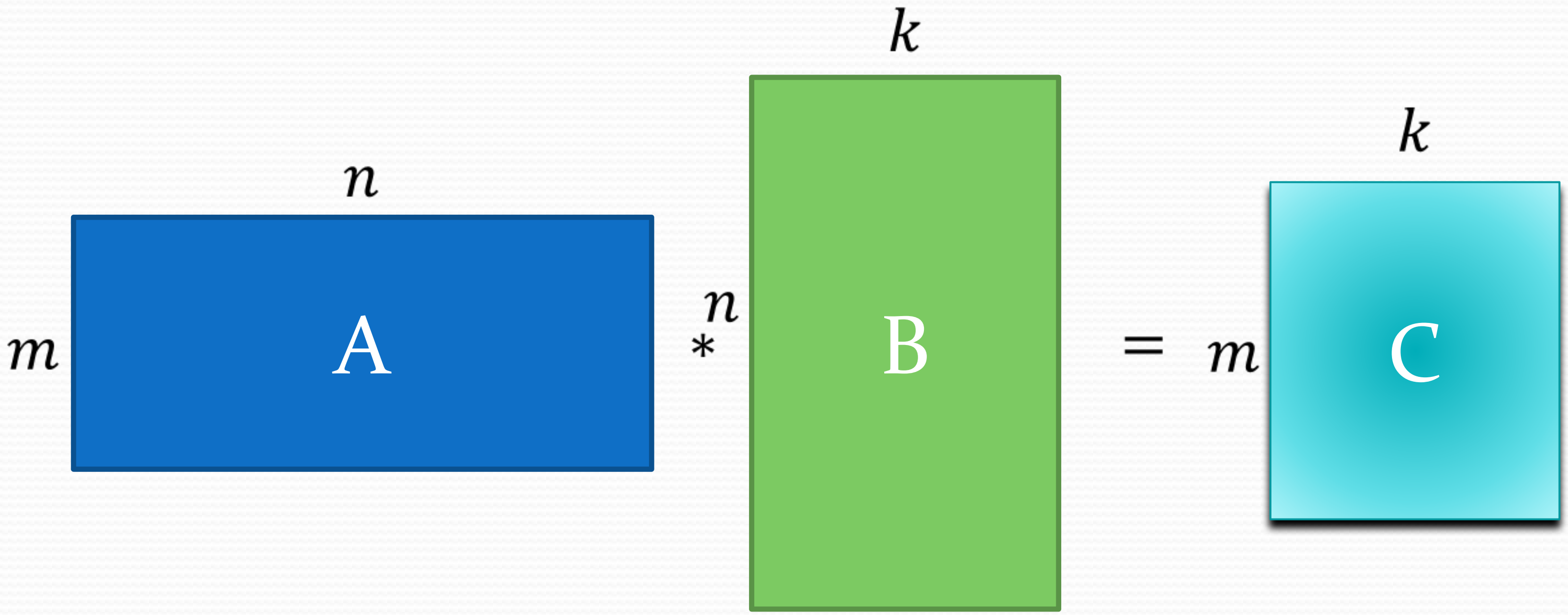
Обозначение:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=1}^{m} a_k .$$

- **Определение.** Произведение матрицы $A = (a_{ij})$ размерности m на n на матрицу $\mathrm{B} = (b_{ij})$ размерности n на k называется матрица $\mathrm{C} = (c_{ij})$ размерности m на k такая, что

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad (2)$$

Обозначаем $\mathrm{C} = A \cdot B$.



При умножении матриц необходимо согласование их размерности: число столбцов матрицы *A* должно равняться числу строк матрицы *B*.

- Формулу (2) можно сформулировать словесно элемент c_{ij} стоящий на пересечении i – строки и j – го столбца матрицы $C = A \cdot B$, равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i – ой стоки матрицы A и j – го столбца матрицы B.

Свойства произведения матриц:

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (ассоциативность);
2. $(A + B) \cdot C = AC + BC$ или

$A(B + C) = AB + AC$ (дистрибутивность).

- **Лемма 1.** Если a_{ij} - числа, то

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)$$

Для умножения матриц не выполняется свойство коммутативности, т.е. в общем случае

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Квадратная матрица E порядка n вида:

$$E = \begin{pmatrix} 1\,0 & & \cdots 0 \\ 0\,1\,0 & & \cdots 0 \\ 0 & \cdots & \cdots 1 \end{pmatrix}$$

называется единичной матрицей. Эта матрица выполняет роль единицы при умножении матриц. Для любой матрицы A порядка n

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

- **Лемма 2.** При умножении произвольной квадратной матрицы A порядка n на диагональную матрицу $D = (d_1, \dots, d_n)$ справа (слева) i-ый столбец (i-ая строка) матрицы A умножается на d_i.

Определение. Квадратная матрица порядка n вида

$$\begin{array}{cc} & \qquad j \\ i & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & d & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

называется трансвекцией и обозначается $T_{ij}(d)$.

- **Лемма 3**. При умножении произвольной квадратной матрицы A порядка n справа на трансвекцию $T_{ij}(d)$ к ее j-у столбцу добавляется i-столбец умноженный на d.

Лемма 4. При умножении произвольной квадратной матрицы A порядка n слева на трансвекцию $T_{ij}(d)$ к ее i-ой строке добавляется j-ая строка, умноженная на d.

Пример: $T_{23}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

- **Определение.** Квадратная матрица размерности n называется обратимой, если существует матрица X такая, что $AX = X \cdot A = E$. Такая матрица X – называется обратной для матрицы A и обозначается $X = A^{-1}$.

Пример матрицы, которая не имеет обратной. Пусть X – произвольная матрица квадратная 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq E$$

- **Лемма 5**. Для любых трансвекций одного порядка $T_{ij}(\alpha)$ и $T_{ij}(\beta)$ выполнятся

$$T_{ij}(\alpha) \cdot T_{ij}(\beta) = T_{ij}(\alpha + \beta)$$

Следствие. Любая трансвекция $T_{ij}(\beta)$ является обратимой матрицей, причем

$$T^{-1}{}_{ij}(\beta) = T_{ij}(-\beta).$$

Определители

- **Определение.** Определителем второго порядка соответствующим квадратной матрицей второго порядка $A = (a_{ij})$ называется число D, равное

$$D = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Определитель любого порядка $n \geq 2$ введем индуктивно, считая что мы уже имеем понятие определителя порядка $n - 1$.

- **Определение.** Минором элемента a_{ij} квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n называется определитель порядка $n-1$, соответствующий матрице, которая получается из матрицы A вычеркиванием i – строки и j – столбца (той строки и того столбца на пересечении которых стоит элемент a_{ij}).

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы $A = (a_{ij})$ называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} минор элемента a_{ij}.

- **Определение.** Определителем порядка n, соответствующим квадратной матрице $A = \left(a_{ij}\right)$ порядка n, называется число n равное

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i}\,.$$

- ***Теорема 1 (Основная для определителя).***

Для любой квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n, определитель этой матрицы:

$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$ (разложению по любой строке $i = 1,2, \dots, n$).

$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$ (разложению по любому столбцу j $= 1,2, \dots, n$).