Признаки параллелограмма

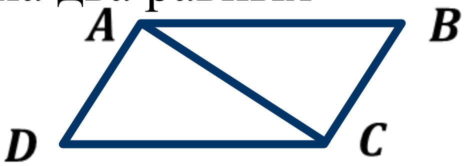
Параллелограмм – это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Свойство 1. Сумма углов при соседних вершинах параллелограмма равна 180°.

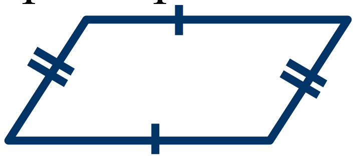
$$\angle 1 + \angle 2 = 180°$$

Свойство 2. Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.

$$\Delta ABC = \Delta CDA$$

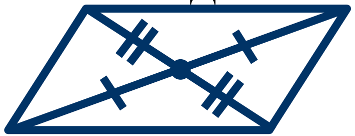


Свойство 3. У параллелограмма противоположные стороны равны.



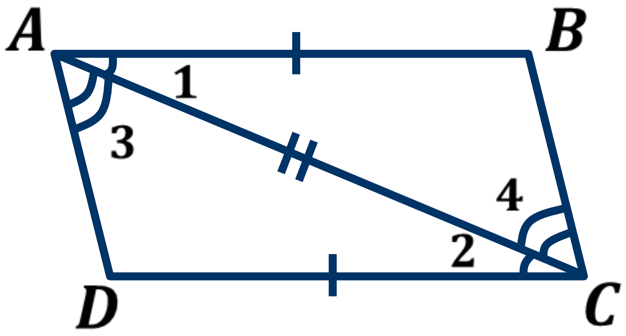
Свойство 4. У параллелограмма противоположные углы равны.

Свойство 5. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.



Теорема. 1-й признак параллелограмма. Если у четырёхугольника две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

Доказательство.



$AB = CD,\ AB \parallel CD.$

Рассмотрим ΔABC и ΔCDA.

Сторона AC – общая,

$AB = CD$ по условию,

$\angle 1 = \angle 2$ как накр. лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей AC.

$\Delta ABC = \Delta CDA$ по первому признаку.

Следовательно, $\angle 3 = \angle 4$.

$\angle 3, \angle 4$ – накр. лежащие при AD и BC и секущей AC.

Так как $\angle 3 = \angle 4$, то $AD \parallel BC$.

$AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, следовательно, $ABCD$ – параллелограмм.

Теорема. 2-й признак. Если в четырёхугольнике противоположные стороны равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

Доказательство.

$AB = CD$, $AD = BC$.

Рассмотрим ΔABC и ΔCDA.

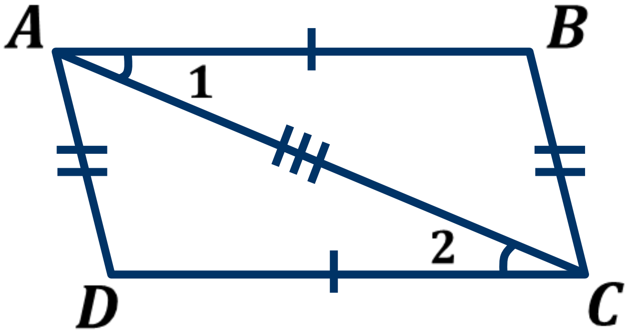
Сторона AC – общая,

$AB = CD$ по условию,

$AD = BC$ по условию.

$\Delta ABC = \Delta CDA$ по третьему признаку.

Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

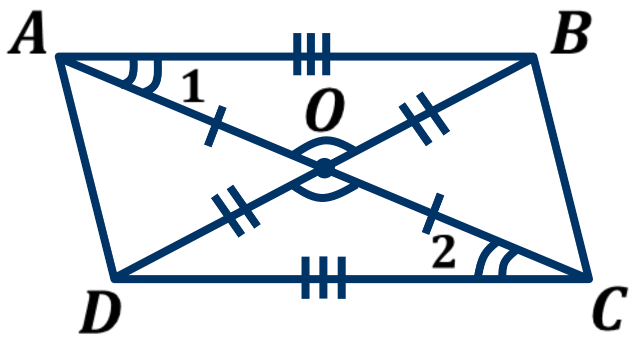


Так как $\angle 1$, $\angle 2$ – накр. лежащие при AB и CD и секущей AC, то $AB \parallel CD$.

$AB = CD$, $AB \parallel CD$, тогда по 1-му признаку $ABCD$ – параллелограмм.

Теорема. 3-й признак. Если у четырёхугольника диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

Доказательство.



Рассмотрим ΔAOB и ΔCOD.

$AO = OC$ по условию,

$BO = OD$ по условию,

$\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные.

$\Delta AOB = \Delta COD$ по первому признаку.

Следовательно, $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$.

Так как $\angle 1$, $\angle 2$ – накр. лежащие при AB и CD и секущей AC, то $AB \parallel CD$.

$AB = CD$, $AB \parallel CD$, тогда по 1-му признаку $ABCD$ – параллелограмм.

Задача. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, если AC – диагональ, а $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$.

Доказательство.

$\angle 1$, $\angle 2$ – накр. лежащие при AB и DC и секущей AC.

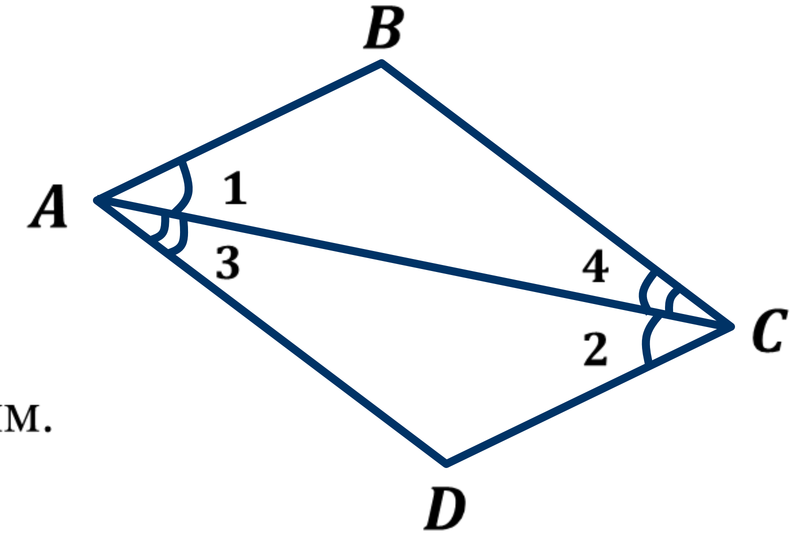
Так как $\angle 1 = \angle 2$, то $AB \parallel CD$.

$\angle 3$, $\angle 4$ – накр. лежащие при AD и BC и секущей AC.

Так как $\angle 3 = \angle 4$, то $AD \parallel BC$.

$AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$,

следовательно, $ABCD$ – параллелограмм.



Задача. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, если AC – диагональ, а $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$.

Доказательство.

Рассмотрим ΔABC и ΔCDA.

Сторона AC – общая,

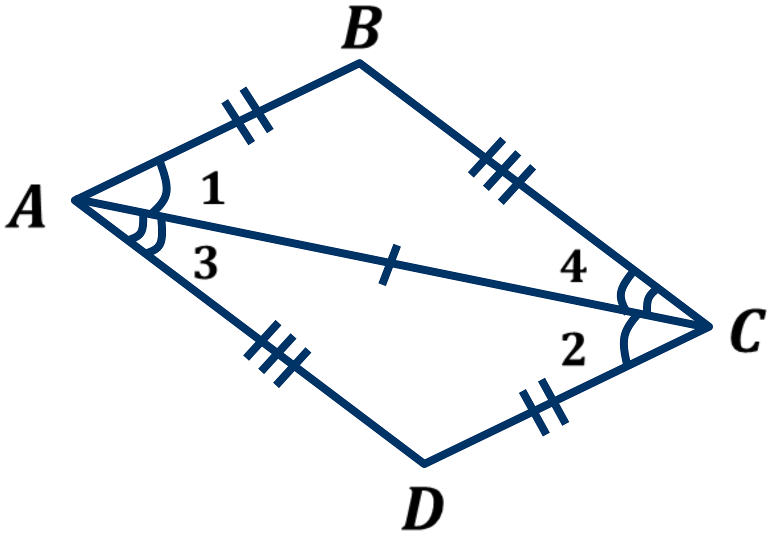
$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ по условию.

$\Delta ABC = \Delta CDA$ по второму признаку.

следовательно, $AB = CD$, $AD = BC$.

Тогда $ABCD$– параллелограмм

по 2-му признаку.



Задача. Отрезки AC и BD – диагонали четырёхугольника $ABCD$, которые пересекаются в точке O. $BO = OD$, а $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство.

Рассмотрим ΔAOB и ΔCOD.

$BO = OD$ по условию,

$\angle 1 = \angle 2$ по условию,

$\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные.

$\Delta AOB = \Delta COD$ по второму признаку.

Следовательно, $AO = OC$.

Тогда $ABCD$ – параллелограмм по 3-му признаку.