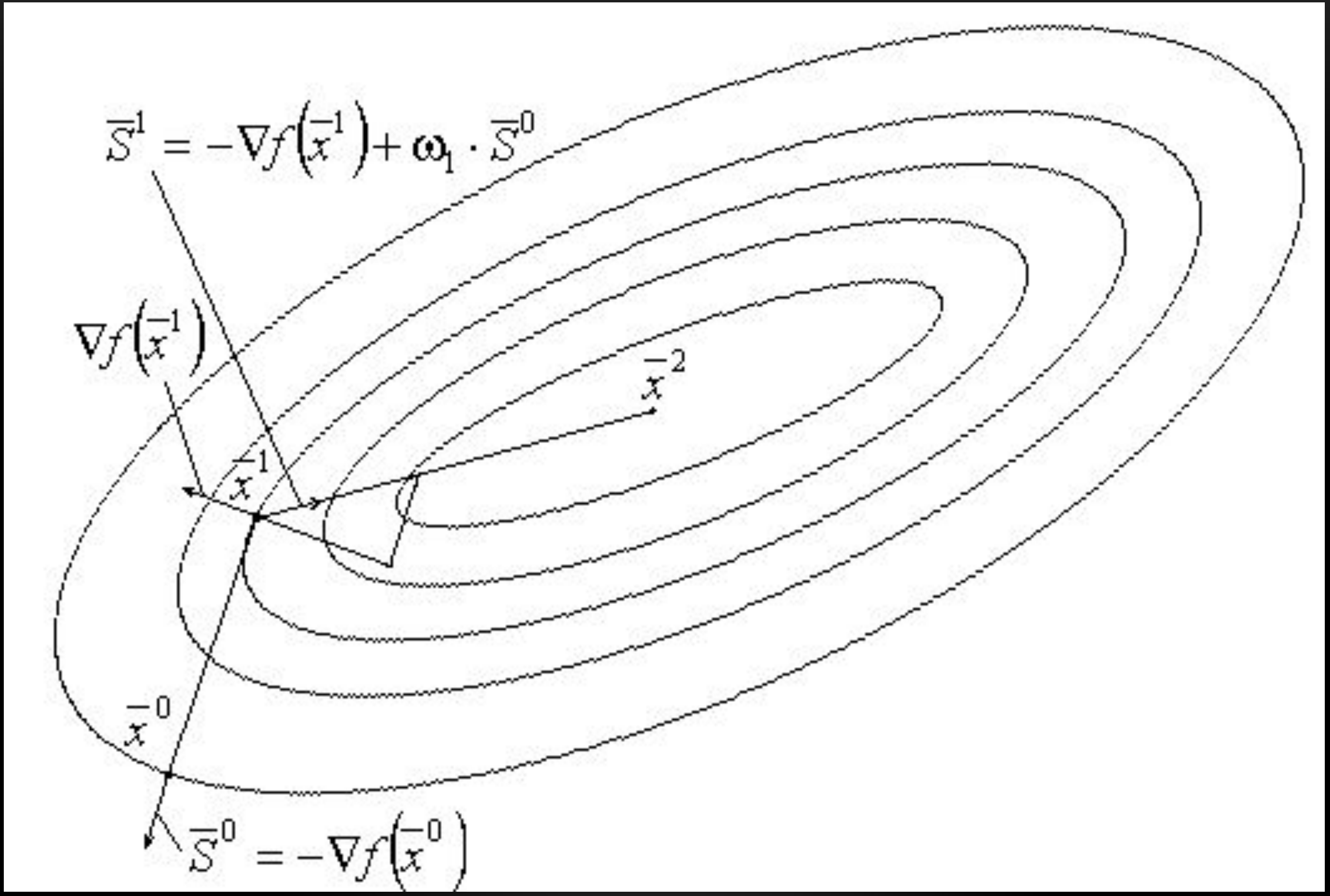
МЕТОДЫ ФЛЕТЧЕРА-РИВСА, ДЭВИДОНА-ФЛЕТЧЕРА-ПАУЭЛЛА, КУБИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

СОДЕРЖАНИЕ

- Метод Флетчера-Ривза
- Алгоритм Дэвидона - Флетчера - Пауэлла
- Метод кубической интерполяции

МЕТОД ФЛЕТЧЕРА-РИВЗА



МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Формирует направления поиска, в большей мере соответствующие геометрии минимизируемой функции.

Определение.
Два n-мерных вектора x и y называют сопряженными по отношению к матрице H (или H-сопряженными), если скалярное произведение (x, Hy) = 0. Здесь H- симметрическая положительно определенная матрица размером nxn.

СТРАТЕГИЯ МЕТОДА ФЛЕТЧЕРА-РИВСА

Состоит в построении последовательности точек $\{x^k\}$, $k=0, 1, 2, \ldots$ таких, что

$f(x^{k+1}) < f(x^k)$, $k=0, 1, 2, \ldots$

Точки последовательности {xk} вычисляются по правилу:
xk+1=xk-tkdk, k = 0, 1, 2,…
dk = ▽f(xk) + bk-1▽f(xk-1)

$$b_{k-1} = \frac{\left\|\nabla f\left(x^{k}\right)\right\|^{2}}{\left\|\nabla f\left(x^{k-1}\right)\right\|^{2}}$$

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА

Теорема 1. Если квадратичная функция f(x) = (x, Hx) + (b, x) + a с неотрицательно определенной матрицей H достигает своего минимального значения на R^n, то метод Флетчера-Ривса обеспечивает отыскание точки минимума не более чем за n шагов. Теорема 2. Пусть функция f(x) дифференцируема и ограничена снизу на R^m, а ее *градиент* удовлетворяет условию Липшица

Тогда при пр $\|\nabla f(X) - \nabla f(Y)\| \le L\|X - Y\|, \forall X, Y \in R^m \quad ,L > 0.$ Полака-Рибьера имеем

$$X^0 \in R^m$$

$$\lim_{k\to\infty}\|\nabla f(x^k)\| = 0$$

Теорема 2 гарантирует сходимость последовательности $\{x^k\}$ к стационарной точке x^*, где $\nabla f(x^*)=0$. Поэтому найденная точка x^* нуждается в дополнительном исследовании для ее классификации. Метод Полака-Рибьера гарантирует сходимость последовательности $\{x^k\}$ к точке минимума только для сильно выпуклых функций.

Оценка скорости сходимости получена только для *сильно* выпуклых функций, в этом случае последовательность $\{x^k\}$ сходится к точке минимума функции *f(x)* со скоростью: $|x^{k+n} – x^*| \leq C|x^k – x^*|$, $k = \{0, n, 2, …\}$

АЛГОРИТМ ДЭВИДОНА - ФЛЕТЧЕРА - ПАУЭЛЛА

Рассмотрим алгоритм Дэвидона - Флетчера - Пауэлла минимизации дифференцируемой функции нескольких переменных. В частности, если функция квадратичная, то, как будет показано позднее, метод вырабатывает сопряженные направления и останавливается после выполнения одной итерации, т.е. после поиска вдоль каждого из сопряженных направлений.

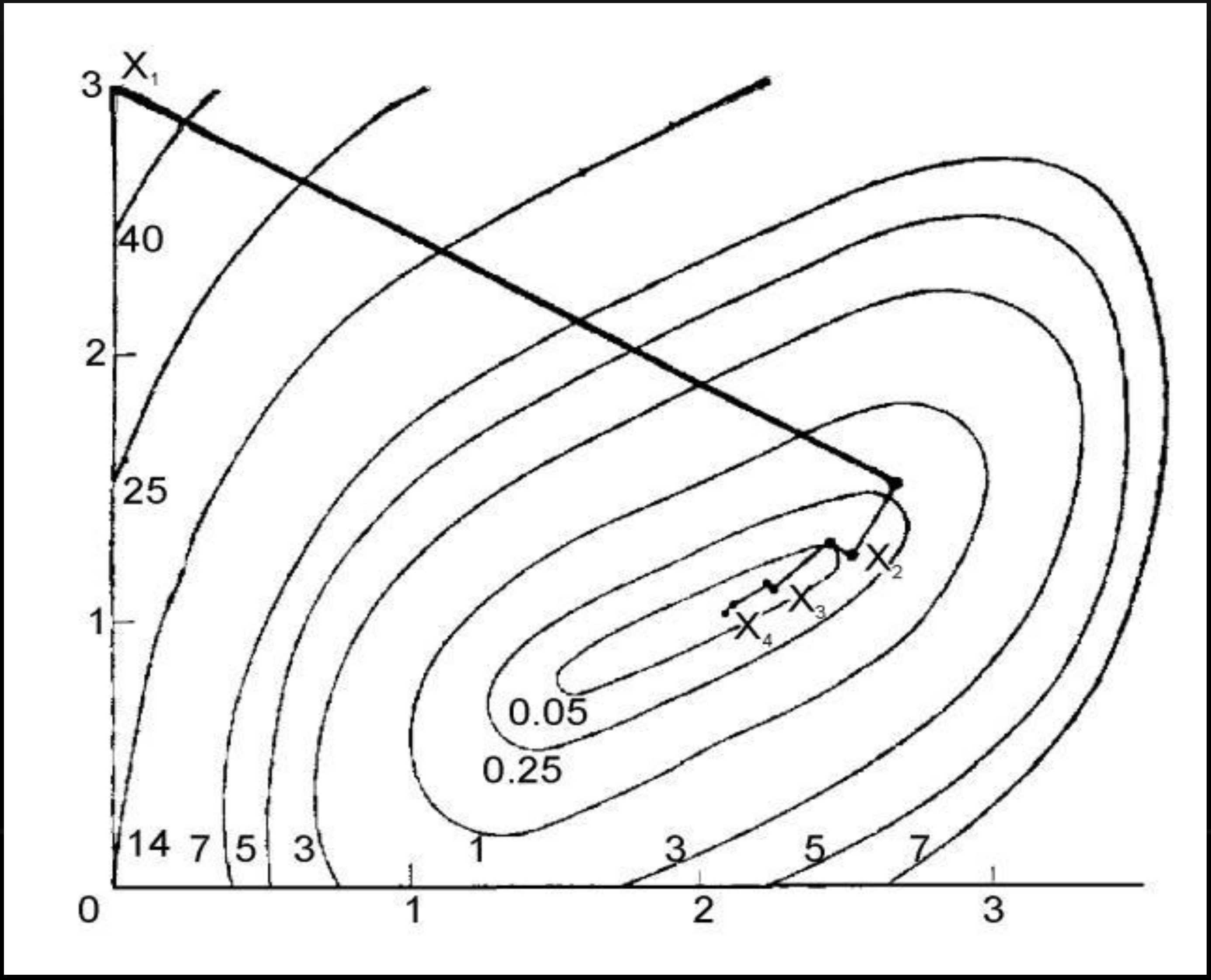
РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПО МЕТОДУ ДЭВИДОНА - ФЛЕТЧЕРА – ПАУЭЛЛА

Рассмотрим следующую задачу :

минимизировать $(x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$.

k	x_k [illegible] $f(x_k)$	j	y_j $f(y_j)$	$f(y_j)$	зк $f(y_j)$ зк	D	d_j	l_j	y_{j+1}
1	(0.00, 3.00) [illegible]	1	(0.00, 3.00) [illegible]	(-44.00, [illegible]	50.12	[illegible]	(44.00, [illegible]	0.062	(2.70, 1.51)
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	[illegible]	[illegible]	([illegible], 1.05)	(0.05, -0.08)	0.09	[illegible]	(-0.05, 0.08)	[illegible]	[illegible]
		2	(0.0005)	(0.004, 0.004)	0.006				

МЕТОД ДЭВИДОНА - ФЛЕТЧЕРА – ПАУЭЛЛА

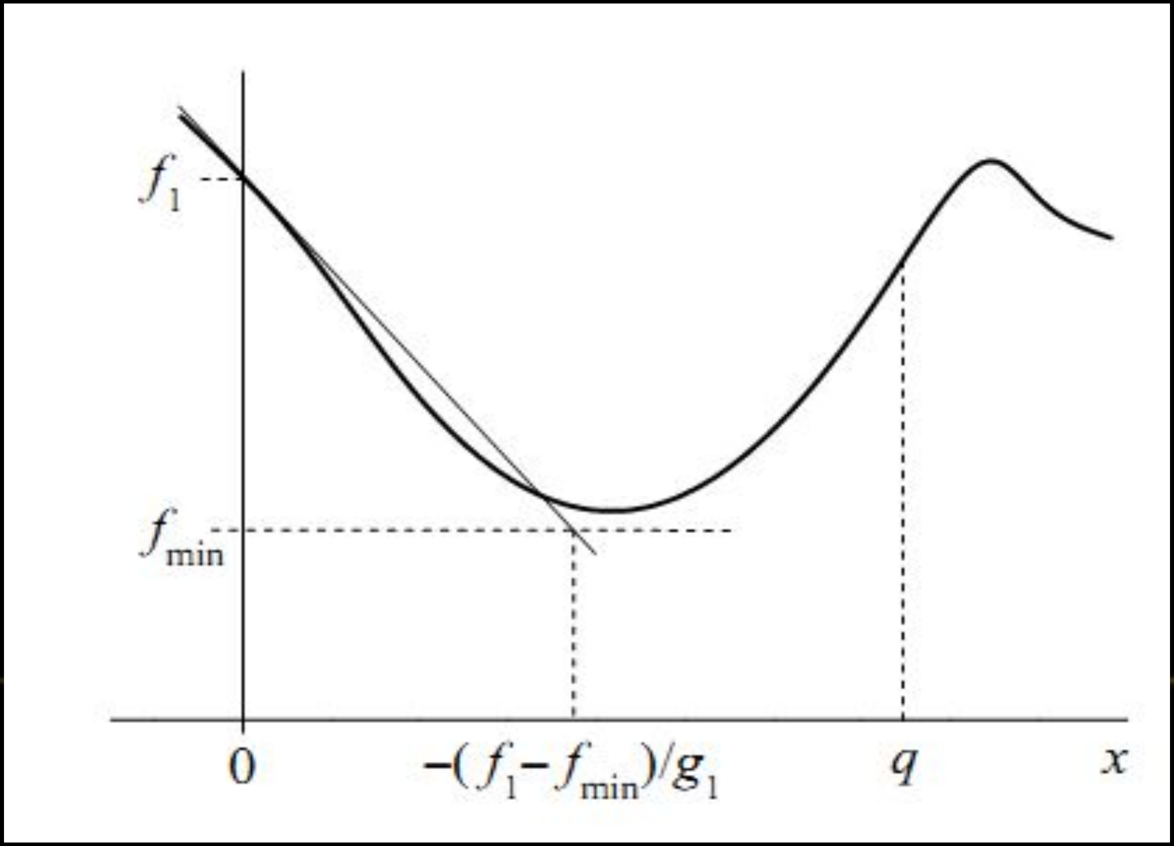


МЕТОД КУБИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

При решении реальных задач редко приходится иметь дело с функциями одной переменной. Однако методы одномерной оптимизации важны при многомерной оптимизации, которая выполняется в основном по следующему правилу: зафиксировать некоторую точку, выбрать подходящее направление, выполнить одномерную оптимизацию из выбранной точки в выбранном направлении. Поэтому методы интерполяции полезны для выполнения линейного поиска при оптимизации функций многих переменных.

КУБИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ (МЕТОД ДЭВИДОНА)

ЛОКАЛЬНАЯ ЗАМЕНА МИНИМИЗИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ МНОГОЧЛЕНОМ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ (ТРИ ЧЛЕНА В РАЗЛОЖЕНИИ ТЕЙЛОРА)
ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН СТРОИТСЯ ПО ЗНАЧЕНИЯМ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ В ДВУХ ТОЧКАХ + ТРЕБУЕТСЯ ЗАДАНИЕ ПРИБЛИЗИТЕЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ F_{MIN}



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод сопряженных градиентов формирует направления поиска, в большей мере соответствующие геометрии минимизируемой функции.

Первоначально метод был предложен Дэвидоном и затем развит Флетчером и Пауэллом. Метод Дэвидона-Флетчера-Пауэлла называют также и методом переменной метрики. Он попадает в общий класс квазиньютоновских процедур, в которых направления поиска задаются в виде -Dj*grad(f(y)). Направление градиента является, таким образом, отклоненным в результате умножения на -Dj, где Dj - положительно определенная симметрическая матрица порядка n×n, аппроксимирующая обратную матрицу Гессе. На следующем шаге матрица Dj+1 представляется в виде суммы Dj и двух симметрических матриц ранга один каждая. В связи с этим схема иногда называется схемой коррекции ранга два.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!