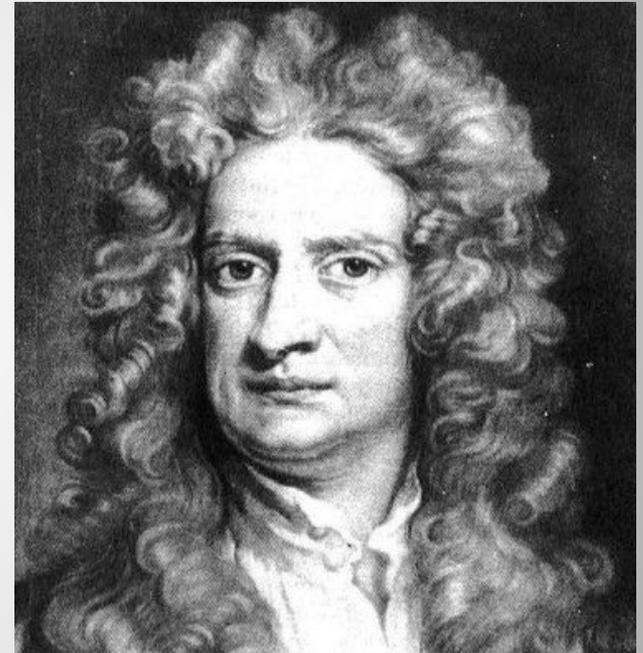


**Численные методы
безусловной
оптимизации. Метод
Ньютона**

Историческая справка

- Метод Ньютона был описан Исааком Ньютоном в рукописи «Об анализе уравнениями бесконечных рядов», адресованной в 1669 году Барроу, и в работе «Метод флюксий и бесконечные ряды» или «Аналитическая геометрия» в собраниях трудов Ньютона, которая была написана в 1671 году.
- Впервые метод был опубликован в трактате «Алгебра» Джона Валлиса в 1685 году



Применение: для нахождения корней функции $f(x) = 0$

Алгоритм:

Дано уравнение $f(x) = 0$

где $f(x)$ определено и непрерывно в некотором конечном или бесконечном интервале $a \leq x \leq b$.
Всякое значение ξ , обращающее функцию $f(x)$ в нуль, то есть такое, что $f(\xi) = 0$ называется **корнем уравнения** или **нулем функции $f(x)$** .

Число ξ называется **корнем k -ой кратности**, если при $x = \xi$ вместе с функцией $f(x)$ обращаются в нуль ее производные до $(k-1)$ порядка включительно: $f(\xi) = f'(\xi) = \dots = f^{(k-1)}(\xi) = 0$.

Приближенное нахождение корней уравнения

I) Отделение корней, то есть установление интервалов $[a_i, b_i]$, в которых содержится один корень уравнения.

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$, т.е. значения функции на его концах имеют противоположные знаки.

2. $f'(x)$, $f''(x)$ отличны от нуля

3. $f(x_0)f''(x_0) > 0$; $x_0 \in [a; b]$

II) Уточнение приближенных корней, то есть доведение их до заданной точности

Пример решения метода Ньютона

Дано:

$$F(x) = x^3 + 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 \quad (1)$$

Интервал: $-1;1$

Точность: $\varepsilon < 0,001$;

Количество интервалов разбиения: $n=1$

Найти :

корень уравнения

Решение:

$$x^3 + 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0. \quad (2)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 0,4x + 0,5. \quad (3)$$

$$f''(x) = 6x - 0,4. \quad (4)$$

Т.к. $F(-1)*F(1)<0$, то корень лежит в пределах $[-1;1]$.

Вычислим значения в $a=-1$
Тогда $f(-1)=-0.2$; $f'(-1)=-6.4$.

поскольку $f(a)*f''(a)>0$, то $x_0=a=-1$

Таблица 1

N	X	F(x)	dF(x)	h=f(x)/f'(x)
1	-1	-0.2	3.9	-0.05128
2	-0.9487	-0.00828	3.5797	-0.00231
3	-0.9464	-1.6E-5	3.5656	0

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_0)}, \quad (5)$$

$$x_{i+1} = -0,9464 - \frac{-1.6E-5}{3,5656} = -0,94640472 \quad (6)$$

Ответ: $x = -0,94640472$, $F(x) = -1.6E-5$

Достоинства и недостатки

Достоинства	Недостатки
если минимизируемая функция является квадратичной, то метод позволит найти минимум за один шаг	необходимость достаточно точного начального приближения.
если минимизируемая функция относится к классу поверхностей вращения (т.е. обладает симметрией), то метод также обеспечивает сходимость за один шаг	медленная скорость сходимости, что приводит к значительным затратам машинного времени при решении сложных нелинейных уравнений
если функция несимметрична, то метод не обеспечивает сходимость за конечное число шагов	необходимость вычисления производных на каждом шаге