Численные методы безусловной оптимизации. Метод Ньютона

Историческая справка

- Метод Ньютона был описан Исааком Ньютоном в рукописи «Об анализе уравнениями бесконечных рядов», адресованной в 1669 году Барроу, и в работе «Метод флюксий и бесконечные ряды» или «Аналитическая геометрия» в собраниях трудов Ньютона, которая была написана в 1671 году.
- Впервые метод был опубликован в трактате «Алгебра» Джона Валлиса в 1685 году

Применение: для нахождения корней функции $f(x) = 0$

Алгоритм:

Дано уравнение $\boxed{f(x)=0}$

где $f(x)$ определено и непрерывно в некотором конечном или бесконечном интервале $a \le x \le b$.
Всякое значение ξ, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, то есть такое, что $f(\xi)=0$ называется корнем уравнения или нулем функции $f(x)$.

Число ξ называется корнем k-ой кратности, если при $x = \xi$ вместе с функцией $f(x)$ обращаются в нуль ее производные до (k-1) порядка включительно: $f(\xi)=f'(\xi)=\ldots=fk\text{-}1(\xi)= 0$.

Приближенное нахождение корней уравнения

I) Отделение корней, то есть установление интервалов [αi,βi], в которых содержится один корень уравнения.

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$, т.е. значения функции на его концах имеют противоположные знаки.

2. $f'(x)$, $f''(x)$ отличны от нуля

.

3. $f(x_0)f''(x_0) > 0$; $x_0 \in [a;b]$

II) Уточнение приближенных корней, то есть доведение их до заданной точности

Пример решения метода Ньютона

Дано:

$$F(x) = x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 1{,}5 \qquad (1)$$

Интервал: -1;1
Точность: ε < 0,001;
Количество интервалов разбиения: n=1
Найти :
корень уравнения

Решение:

$$x^3 + 0.2x^2 + 0{,}5x + 1{,}5 = 0. \qquad (2)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 0{,}4x + 0{,}5. \qquad (3)$$

$$f''(x) = 6x - 0{,}4. \qquad (4)$$

Т.к. F(-1)*F(1)<0, то корень лежит в пределах [-1;1].

Вычислим значения в a=-1
Тогда f(-1)=-0.2; f'(-1)=-6.4.

поскольку f(a)*f''(a)>0, то x_0=a=-1

Таблица 1

N	X	F(x)	dF(x)	h=f(x)/f'(x)
1	-1	-0.2	3.9	-0.05128
2	-0.9487	-0.00828	3.5797	-0.00231
3	-0.9464	-1.6E-5	3.5656	0

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_0)}, \tag{5}$$

$$x_{i+1} = -0{,}9464 - \frac{-1.6\mathrm{E}-5}{3{,}5656} = -0{,}94640472 \tag{6}$$

Ответ: x=-0,94640472, F(x)= -1.6E-5

Достоинства и недостатки

Достоинства	Недостатки
если минимизируемая функция является квадратичной, то метод позволит найти минимум за один шаг	необходимость достаточно точного начального приближения.
если минимизируемая функция относится к классу поверхностей вращения (т.е. обладает симметрией), то метод также обеспечивает сходимость за один шаг	медленная скорость сходимости, что приводит к значительным затратам машинного времени при решении сложных нелинейных уравнений
если функция несимметрична, то метод не обеспечивает сходимость за конечное число шагов	необходимость вычисления производных на каждом шаге