

ДИНАМИКА ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 5:
СИЛОВОЕ ПОЛЕ, ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ
ЭНЕРГИЯ, ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ

1. СИЛОВЫЕ ПОЛЯ

Будем называть **силовым полем** область (часть пространства), в каждой точке которой на помещенную в ней материальную точку действует сила, однозначно определенная по величине и направлению в любой момент времени.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$$

Силовое поле называется **нестационарным**, если сила \mathbf{F} зависит явно от времени t , и **стационарным**, если сила не зависит от времени t явно. Далее рассматриваем только стационарные силовые поля

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

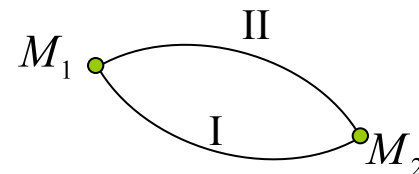
2. СВОЙСТВА СТАЦИОНАРНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ

1. **Работа сил** стационарного поля зависит в общем случае от начального M_1 и конечного M_2 положений и траектории, но **не зависит от закона движения материальной точки по траектории.**

$$A_{1,2} = \int_{M_1 M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1 M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$A_{1,2} = \int_{q_1}^{q_2} \left(F_x \frac{dx}{dq} + F_y \frac{dy}{dq} + F_z \frac{dz}{dq} \right) dq$$

$$\left. \begin{array}{l} x = x(q) \\ y = y(q) \\ z = z(q) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{уравнение} \\ \text{траектории} \end{array}$$



2. При изменении направления движения по траектории работа меняет знак

$$A_{2,1} = -A_{1,2}$$

3. В общем случае работа зависит от траектории. Поэтому чтобы воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии нужно знать траекторию.

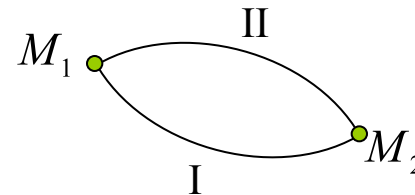
$$A_{1,2}^I \neq A_{1,2}^{II}$$

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{1,2}$$

3. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

Поля, работа сил которых **не зависит от траектории** движения материальной точки и определяется только положением начальной и конечной точек пути называются **потенциальными (консервативными)**.

$$A_{1,2}^I = A_{1,2}^{II} = A_{1,2}$$

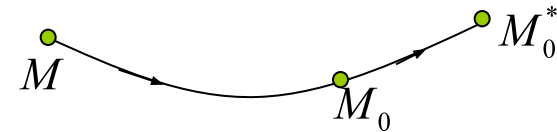


Для потенциальных сил можно ввести понятие **потенциальной энергии** $\Pi(x,y,z)$ как работы сил при движении точки из положения $M(x,y,z)$ в фиксированное положение M_0 :

$$\Pi(x, y, z) = A_{MM_0}$$

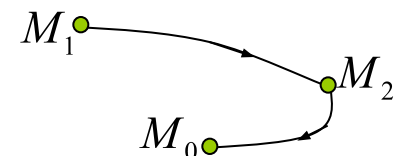
ПЭ определена с точностью до константы. При изменении начальной точки $M_0 \rightarrow M_0^*$ потенциальная энергия изменяется как

$$\Pi^* \rightarrow \Pi + A_{M_0M_0^*} \text{ const}$$



Чтобы пользоваться ТИКЭ не нужно знать траекторию!

$$A_{1,2} = A_{1,0} + A_{0,1} = A_{1,0} - A_{2,0} = \Pi_1 - \Pi_2$$



4. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

Для того чтобы силовое поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая непрерывная однозначная функция координат $\Pi(x, y, z)$, что

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

Необходимость:

Пусть поле потенциально. Определим Π как $\Pi(x, y, z) = A_{MM_0}$

$$M(x, y, z) \quad M_0(x_0, y_0, z_0) \quad M_1(x + \Delta x, y, z)$$

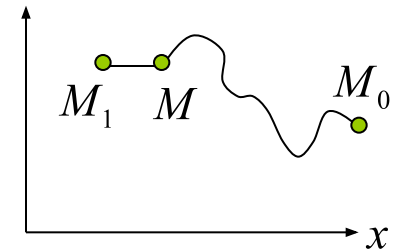
$$\Pi(x, y, z) - \Pi(x + \Delta x, y, z) = A_{MM_0} - A_{M_1M_0} = A_{MM_1} = \int_x^{x+\Delta x} F_x dx = F_x(x, y, z) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad | \quad \div \Delta x$$

$$F_x(x, y, z) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$$

Достаточность:

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \right) = -d\Pi$$

$$A_{1,2} = \int_{M_1 M_2} d'A = -\int_{\Pi_1}^{\Pi_2} d\Pi = \Pi_1 - \Pi_2$$



5. ГРАДИЕНТ И РОТОР

Если задана скалярная функция $U(x,y,z)$, то вектор, образуемый по формуле

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$$

называется **градиентом** функции U

Иная форма записи $\text{grad}U = \nabla U$

Здесь ∇ (набла) – дифференциальный оператор Гамильтона $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$

В потенциальном силовом поле сила с точностью до знака равна градиенту потенциала

$$\mathbf{F} = -\text{grad} \Pi$$

Ротор вектора \mathbf{F} по определению есть

$$\text{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

6. Как проверить является ли данное поле потенциальным

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \Leftrightarrow \text{rot } \mathbf{F} = 0$$

Пример 1: Является ли силовое поле $F_x = -py, F_y = px, F_z = 0$, потенциальным?

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -p, \frac{\partial F_y}{\partial x} = p \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \text{не является}$$

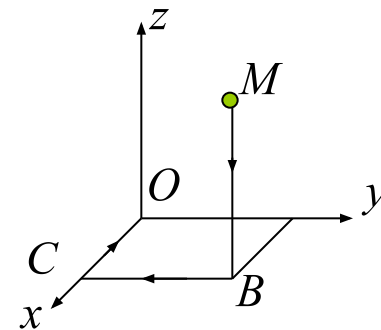
Пример 2: Является ли силовое поле $F_x = xy^2, F_y = x^2y, F_z = z^2$, потенциальным?

Если да, то найти потенциал.

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \quad \text{поле потенциально}$$

$$\Pi = A_{MO} = A_{MB} + A_{BC} + A_{CO} = \int_{MB} + \int_{BC} + \int_{CO}$$

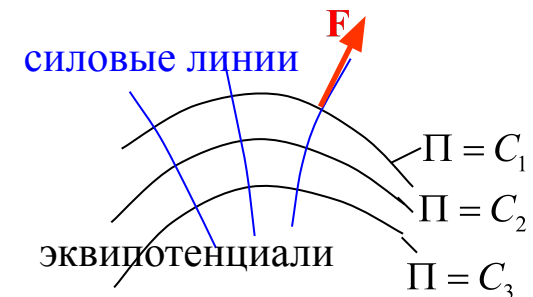
$$\Pi = \int_z^0 F_z(x, y, z) dz + \int_y^0 F_y(x, y, 0) dy + \int_x^0 F_x(x, 0, 0) dx = \int_z^0 z^2 dz + \int_y^0 x^2 y dy = -\frac{z^3}{3} - \frac{x^2 y^2}{2}$$



7. ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И СИЛОВЫЕ ЛИНИИ

Поверхность $\Pi(x, y, z) = C$, на которой потенциальная функция Π имеет постоянное значение, называется **эквипотенциальной поверхностью** или **поверхностью уровня**. Для данного поля эти поверхности образуют семейство с параметром C ; давая постоянному C разные значения, мы будем получать разные поверхности уровня, которые в случае, когда функция Π однозначна, не могут пересекаться и будут разделять силовое поле на слои

Работа сил поля при перемещении точки из начального положения в конечное, когда оба эти положения находятся на одной и той же эквипотенциальной поверхности, равна нулю



Силовые линии – линии у которых касательная в каждой точке совпадает с направлением силы, действующей в этой точке

$$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{F} \Rightarrow \frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$

Уравнение силовых линий

Силовые линии ортогональны к эквипотенциальным поверхностям

8. Свойства эквипотенциальных поверхностей

Силые линии ортогональны к эквипотенциальным поверхностям =

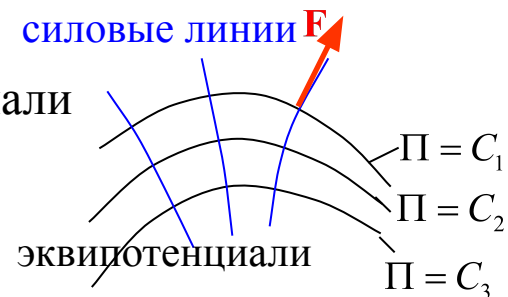
Сила нормальна к эквипотенциальной поверхности =

Градиент функции ортогонален ее линиям уровня

Рассмотрим мат. точку, движущуюся по эквипотенциали

$x = x(t)$ $z = z(t)$ $y = y(t)$ - закон движения точки по эквипотенциали

$$\Pi(x(t), y(t), z(t)) = C \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$$



$\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$ } Сила нормальна к эквипотенциальной поверхности
 $\mathbf{v} \in$ касательной плоскости к эквипотенциали

Рассмотрим мат. точку, движущуюся по нормали \mathbf{n} к эквипотенциальной поверхности в сторону действия силы

$$0 < d'A = -d\Pi$$

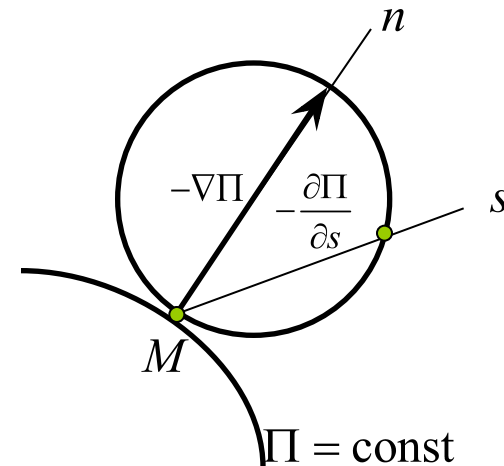
Вектор силы F (или $\text{grad } \Pi$) направлен в любой точке поля по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку, в сторону убывания потенциала Π .

9. Свойства эквипотенциальных поверхностей

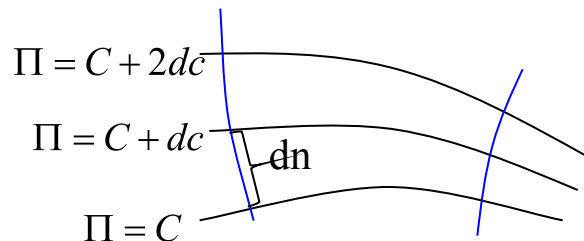
1) Найдем проекцию силы, действующей в точке M поля, на какое-нибудь направление s , проходящее через эту точку и характеризуемое единичным вектором \mathbf{s}^0

$$F_s = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}^0 = -\nabla\Pi \cdot \mathbf{s}^0 = -\frac{\partial\Pi}{\partial x} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial\Pi}{\partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial\Pi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = -\frac{\partial\Pi}{\partial s}$$

$$F = |\nabla\Pi| = -\frac{\partial\Pi}{\partial n}$$



2) Сила (градиент) будет больше в тех точках поля, где расстояние между соседними эквипотенциалами меньше, т. е. где поверхности уровня проходят гуще (теорема Кельвина).



$$F = \left| \frac{dc}{dn} \right|$$

$$F_b > F_a$$

10. ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d'A \xrightarrow{\text{потенциальность}} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -d\Pi \xrightarrow{\text{интегрирование}} \frac{mv^2}{2} + \Pi = \text{const}$$

ТИКЭ

интеграл энергии

При движении точки под действием потенциальных сил сумма кинетической и потенциальной энергии точки, т. е. ее **полная механическая энергия**, остается величиной **постоянной**.

11. ДИССИПАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ

Какое влияние оказывают силы сопротивления на полную механическую энергию?

Относительно силы сопротивления будем предполагать лишь что она всегда направлена противоположно скорости движения точки

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -d\Pi + \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + \Pi\right) = \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v} < 0$$

Полная механическая энергия под действием сил сопротивления убывает (рассеивается, диссипирует)

Силы сопротивления называют еще **диссипативными**.

dissipate

- 1) рассеивать,
- 2) транжирить, проматывать

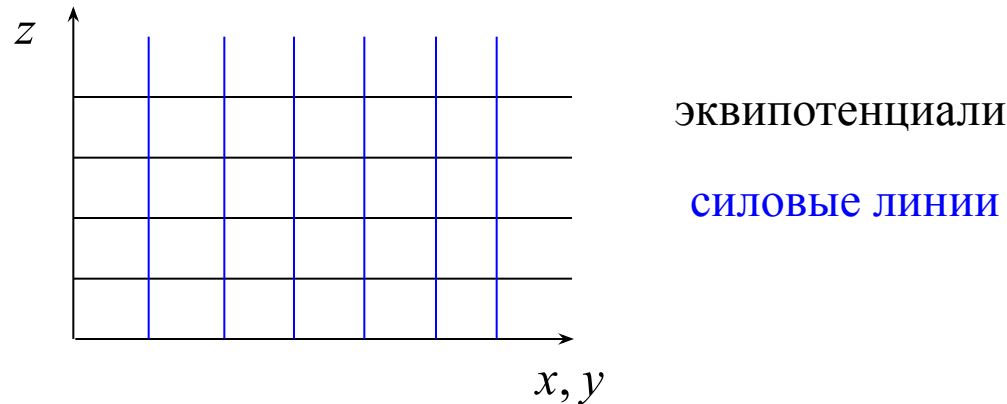
Величину D , численно равную половине механической энергии, убывающей в единицу времени, называют диссипативной функцией.

$$\mathbf{F}_c = -b\mathbf{v} \Rightarrow D = D(v) = \frac{bv^2}{2}$$

12. Примеры потенциальных силовых полей

1) Поле силы тяжести: $F_x = F_y = 0, F_z = -mg$

$$-d\Pi = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -mg dz = -d(mgz) \Rightarrow \Pi = mgz$$



2) Поле центральных сил: $\mathbf{F} = F_r(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$

$$\Pi(r) = \int_r^{r_0} F_r(r) dr$$

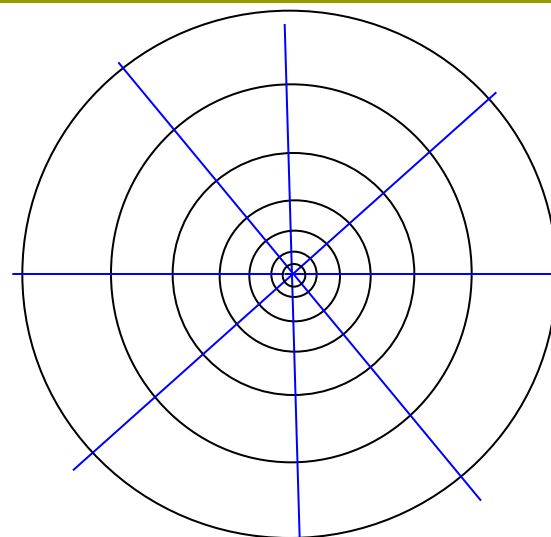
$$-\nabla \Pi = -\frac{d\Pi}{dr} \nabla r = F_r \nabla r = F_r \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

13. Примеры потенциаль-ных СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ

2а) Гравитационная сила:

$$F_r(r) = -f \frac{mM}{r^2} \quad \xrightarrow{r_0 = \infty}$$

$$\Pi(r) = -f \frac{mM}{r}$$



2б) Квазиупругая сила:

$$F_r(r) = -c(r - a) \quad \xrightarrow{r_0 = a}$$

$$\Pi(r) = c \frac{(r - a)^2}{2}$$

