-
Навье-Стокс теңдеулерінің шешімдері

Студент: Әлібек.Б

Жоспар

- - Навье-Стокс теңдеулерінің шешілуін, сонымен қатар оларды іске асырудың айырым сызбаларының жинақтылығы мен тұрақтылығын орнату;
- - Навье-Стокс теңдеулерінің көпсатылы каналда орнықтылығын сандық әдістермен шешу;
- - Навье-Стокс екі өлшемді теңдеулерінің Гельмгольц айнымалылары арқылы саптамалы элементтері бар тікбұрышты каналдарда шешілуі;
- - Навье-Стокс екі өлшемді теңдеулері шешімдерінің айырым сызбаларының жинақтылығы мен тұрақтылығы;

- Навье – Стокс теңдеуі.
- Теңдеулері гравитациялық массалық күш әсерінде орналасқан кез келген сұйықтар үшін орынды. Ньютондық сұйықтар қозғалыс теңдеуін алу үшін мына теңдеулерді қолдану керек

$$\sigma_x = -p + 2\eta\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\eta(\nabla \cdot v);$$

$$\sigma_y = -p + 2\eta\frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \frac{2}{3}\eta(\nabla \cdot v);$$

$$\sigma_z = -p + 2\eta\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\eta(\nabla \cdot v).$$

Сығылатын сұйықта белгісіздер тек қысым мен жылдамдық емес, сонымен қатар тығыздық, тұтқырлық сияқты физикалық қасиеттері. Ал тұйық теңдеулер жүйесі үшін тағы да екі қатынасты: термодинамикалық күй теңдеуін және тұтқырлықтың температурамен байланысын енгізу керек. Егер ағын температурасының өзгерісі көп болмаса, онда сұйықтың орташа температурасын анықтайтын тұрақты тұтқырлық жорамалы орындалады. Бұл жағдайда сығылатын сұйық үшін жүйенің бірінші теңдеуінен аламыз

$$\rho\frac{du}{dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2\eta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\eta(\nabla\cdot v) + \eta\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x\partial y} + \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} + \eta\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) - \frac{2}{3}\eta\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot v).$$

$$\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) = \eta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \eta\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot v),$$

- Осылайша жазып, тұрақты тұтқырлықты сығылатын сұйық үшін декарттық координатада жазылған Навье-Стокс теңдеуін алуға болады.

$$\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \nu) = \rho\frac{du}{dt};$$

$$\rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial y}(\nabla \cdot \nu) = \rho\frac{d\vartheta}{dt};$$

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \eta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot \nu) = \rho\frac{dw}{dt}.$$

- Лаплас - дифференциалдық операторын енгізіп және өрнегімен сәйкес үдеуді есептеп, теңдеуі векторлық формада мына түрге ие екендігін табамыз.

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+(v\cdot\nabla)v\right]=\rho g-\nabla p+\eta\nabla^2 v+\frac{1}{3}\eta\nabla(\nabla\cdot v).$$

Сығылмайтын сұйық үшін $\nabla \cdot v = 0,$ жеңілденеді

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \boldsymbol{\nabla})v\right] = \rho g - \boldsymbol{\nabla} p + \eta \boldsymbol{\nabla}^2 v.$$

Бұл теңдеу Стокс теңдеуі деп аталады

Тұтқыр емес сұйық үшін $(\eta = 0)$ теңдеуді ρ –қа бөліп Эйлер қозғалыс теңдеуін аламыз

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + (\nu \cdot \nabla)\nu = g - \frac{\nabla p}{\rho}$$

h – Вертикаль бағытта саналатын нүкте биіктігін десек, ауырлық күші үдеуі компоненттерін төмендегідей

$$g_x = -g\frac{\partial h}{\partial x}; \quad g_y = -g\frac{\partial h}{\partial y}; \quad g_z = -g\frac{\partial h}{\partial z},$$

немесе $g = -g\nabla h.$

Егер декарттық координаталар жүйесі осьтері пен y сәйкес z болатындай орналасса, онда

$g_x = g_y = 0;\ \ g_z = -g$ болады. «-» болатын себебі ауырлық күші h кері мәндері жағына бағытталған.

Теңдеуімен сәйкесінше үдеу компоненттерін қойып, декарттық координатада сығылмайтын сұйық үшін Навье-Стокс теңдеуін жазамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-g\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right);$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t}+u\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y}+w\frac{\partial \vartheta}{\partial z}=-g\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right);$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-g\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).$$

Қортынды

Көрсетілген теңдеулер жүйесіне кіретін белгісіз шамалар кинематикалық және физикалық шекаралық шарттарды қанағаттандыруы керек. Кинематикалық шарттар – жылдамдықтар кез келген қатты бетте немесе қабырғада осы қабырғаның жылдамдығына тең болады деген сөз (нольге тең немесе қабырға қозғалыссыз). Физикалық шарттар – кез келген нақты сұйықтың қасиеті салдарынан қатты бетке «жабысуы». Осының нәтижесінде қабырғада жылдамдықтың жанама компоненты үшін жабысу шарты болады.

Дербес туындылы екінші текті сызықсыз дифференциалдық теңдеулер болатын Навье-Стокс теңдеуінің жалпы шешімі әлі кезге дейін табылмаған. Алайда әртүрлі жеңілдетулермен дербес шешімдерін алуға болады.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Мухин К.А. Экспериментальная ядерная физика. М.: Энергоатомиздат, 1993.

Гл.ред. Боголюбов Н.Н. Физика элементарных частиц и атомного ядра. М.:

2. Энергоатомиздат, 1986

Капитонов И.М.Введение в физику ядра и частиц, УРСС.2002

ОКУНЬ Л. Б. Элементарное введение в физику элементарных частиц. М.НАУКА 1985

3. Широков Ю.М., Юдин Н.П. Ядерная физика. Наука.1980

Қадыров Н.Б. Ядролық физика негіздері. Оқу құралы, «Қазақ университеті», 2008

- Назарларыңызға рахмет