

Векторная алгебра

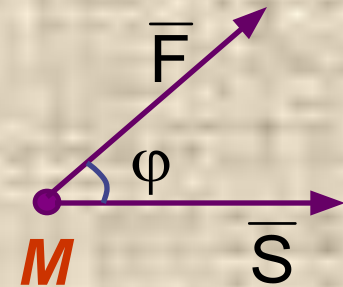
- Скалярное произведение векторов
- Векторное произведение векторов
- Смешанное произведение векторов

Скалярное произведение векторов

Пусть постоянная сила \vec{F} действует на прямолинейно перемещающуюся точку M под углом φ к направлению движения

Как известно из физики, работа силы \vec{F} по перемещению точки M определяется по формуле:

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \varphi$$



Таким образом, двум векторам: силе и перемещению оказался сопоставлен скаляр – работа.

Этот скаляр A и называется скалярным произведением силы \vec{F} на перемещение \vec{S}

Скалярным произведением двух векторов называется произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов \vec{a} и \vec{b} обозначается:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

Если векторы \vec{a} и \vec{b} не нулевые:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

\Leftrightarrow

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{ПР}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{ПР}_{\vec{b}} \vec{a} = \text{ПР}_{\vec{b}} \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ \Rightarrow \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

Законы скалярного произведения

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- 3) $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$

Скалярное произведение векторов

Для координатных ортов декартовой системы координат справедливо:

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1 \quad \bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0$$

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат заданы векторы:

$$\bar{a} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k} \quad \bar{b} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}$$

Найдем скалярное произведение:

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= (x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}) \cdot (x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}) \\ &= x_1 x_2 \cdot \mathbf{1} + y_1 x_2 \cdot \mathbf{0} + z_1 x_2 \cdot \mathbf{0} + x_1 y_2 \cdot \mathbf{0} + y_1 y_2 \cdot \mathbf{1} + \\ & z_1 y_2 \cdot \mathbf{0} + x_1 z_2 \cdot \mathbf{0} + y_1 z_2 \cdot \mathbf{0} + z_1 z_2 \cdot \mathbf{1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Скалярное произведение векторов

Из формулы скалярного произведения векторов следует формула для нахождения угла между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Найти косинус угла между векторами: $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$
 $\bar{b} = 6\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 8$$

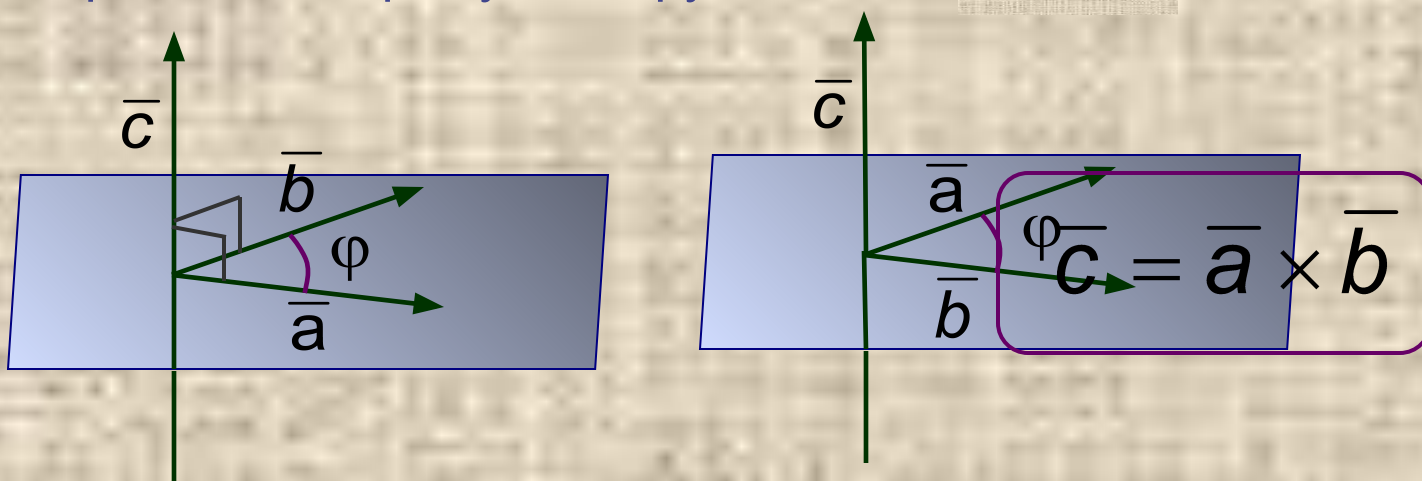
$$|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{6^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$$\cos \varphi = \frac{8}{\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{14}} = \frac{2}{7}$$

Векторное произведение векторов

Тройка некопланарных векторов $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ называется **левой** если наименьший поворот с конца третьего вектора \vec{c} от первого вектора \vec{a} ко второму вектору \vec{b} виден **по** часовой стрелки

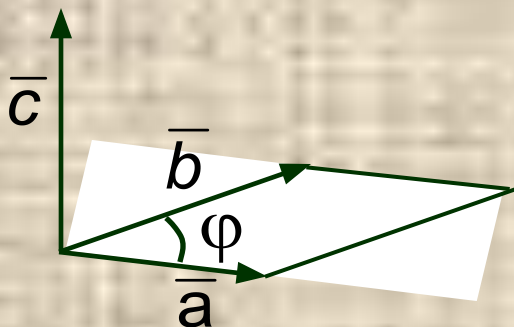


Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор \vec{c} , определяемый следующим образом:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}; \vec{b})$.
- $\vec{c} \perp \vec{a}; \vec{c} \perp \vec{b}$
- Вектор \vec{c} направлен так, что тройка векторов $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ - правая.

Векторное произведение векторов

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах



$$S = |\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin \varphi$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = 0$$



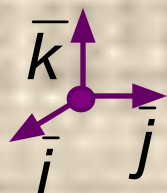
$$\bar{a} \parallel \bar{b}$$

Законы векторного произведения

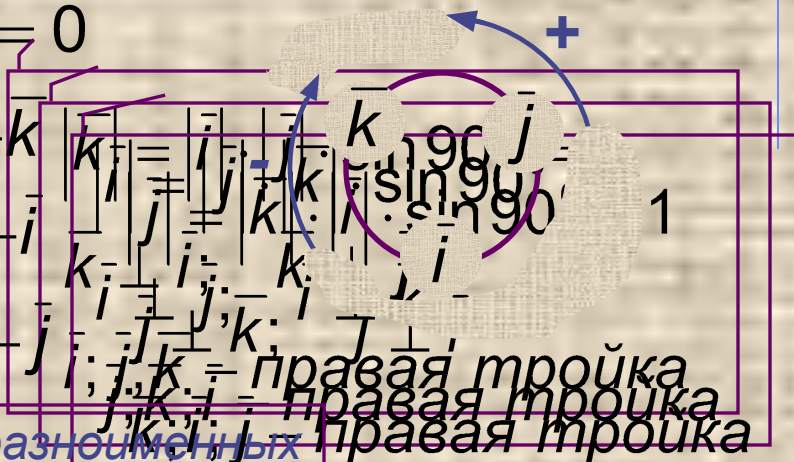
- 1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$
- 2) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$
- 3) $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$
- 4) $\bar{a} \times \bar{a} = 0$ - векторный квадрат равен нулю для любого вектора

Векторное произведение векторов

Для координатных ортов декартовой системы координат справедливо: $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0$



$$\begin{aligned} \bar{i} \times \bar{j} &= \bar{k} & \bar{j} \times \bar{i} &= -\bar{k} \\ \bar{j} \times \bar{k} &= \bar{i} & \bar{k} \times \bar{j} &= -\bar{i} \\ \bar{k} \times \bar{i} &= \bar{j} & \bar{i} \times \bar{k} &= -\bar{j} \end{aligned}$$



Векторное произведение двух различных ортов, следующих друг за другом в направлении положительного обхода окружности, равно третьему орту со знаком плюс, в противном же случае - знаком минус.

$$\bar{a} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k} \quad \bar{b} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}$$

Найдем векторное произведение:

Векторное произведение векторов

$$\bar{a} \times \bar{b} = (x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}) \times (x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k})$$

$$= x_1 x_2 \cdot \mathbf{0} + y_1 x_2 \cdot (-\bar{k}) + z_1 x_2 \cdot \bar{j} + x_1 y_2 \cdot \bar{k} +$$

$$y_1 y_2 \cdot \mathbf{0} + z_1 y_2 \cdot (-\bar{i}) + x_1 z_2 \cdot (-\bar{j}) +$$

$$+ y_1 z_2 \cdot \bar{i} + z_1 z_2 \cdot \mathbf{0} =$$

$$= -y_1 x_2 \cdot \bar{k} + z_1 x_2 \cdot \bar{j} + x_1 y_2 \cdot \bar{k} - z_1 y_2 \cdot \bar{i} - x_1 z_2 \cdot \bar{j} + y_1 z_2 \cdot \bar{i} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} =$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Векторное произведение векторов

Найти векторное произведение векторов:

$$\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k} \quad \bar{b} = 3\bar{i} - \bar{j} - 4\bar{k}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \bar{k}$$

$$= (12 - 1) \cdot \bar{i} - (-8 + 3) \cdot \bar{j} + (-2 + 9) \cdot \bar{k} = -11\bar{i} + 5\bar{j} + 7\bar{k}$$

Векторное произведение векторов

Найти площадь треугольника с вершинами:

$$A(2; 3; 1) \quad B(5; 6; 3) \quad C(7; 1; 10)$$

Найдем координаты векторов:

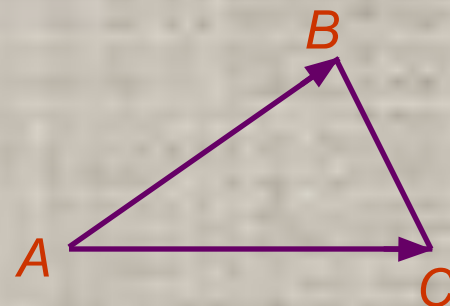
$$\overline{AB} = \{5 - 2; 6 - 3; 3 - 1\} = \{3; 3; 2\}$$

$$\overline{AC} = \{7 - 2; 1 - 3; 10 - 1\} = \{5; -2; 9\}$$

$$S = \frac{1}{2} |\overline{a} \times \overline{b}|$$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 31\bar{i} - 17\bar{j} - 21\bar{k}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{31^2 + (-17)^2 + (-21)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1691} \approx 20.6$$

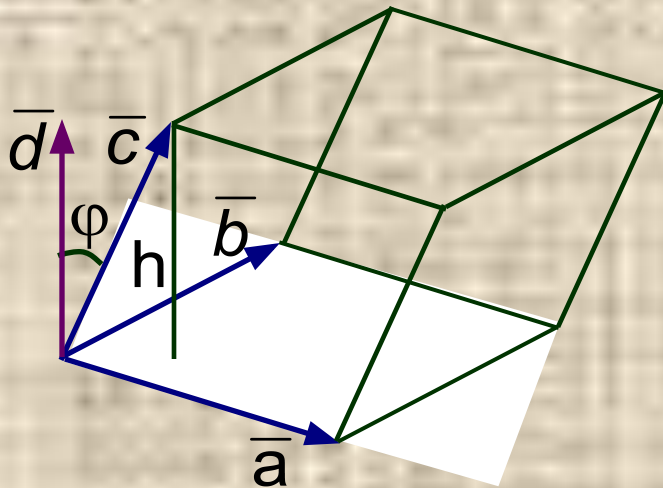


Смешанное произведение векторов

Векторно - скалярным или **смешанным произведением** трех векторов $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ называется произведение, которое получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор, т.е. произведение вида:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Смешанное произведение представляет собой скаляр. Выясним его геометрический смысл.



Объем V параллелепипеда, образованного векторами $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ обозначим через V . Обозначим через h высоту параллелепипеда, опущенную на основание, параллелепипеда, тогда $V = S_{\text{осн}} \cdot h$. Если \vec{c} — вектор, образующий с основанием параллелепипеда угол φ , то $h = |\vec{c}| \cdot \cos \varphi$. Тогда $V = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \varphi \Rightarrow$

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Смешанное произведение векторов

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах в том случае, если векторы $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ образуют **правую тройку векторов** (как в предыдущем примере).

В случае, если векторы образуют **левую тройку**, то смешанное произведение равно объему параллелепипеда, взятому со знаком «-»:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -V$$

Таким образом, объем параллелепипеда, построенного на трех векторах, всегда равен абсолютной величине их смешанного произведения:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

Смешанное произведение векторов

Законы смешанного произведения

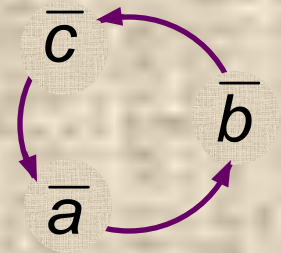
- 1) **Сочетательный закон** следует из геометрического смысла смешанного произведения:

$$\left. \begin{array}{l} V = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} \\ V = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \end{array} \right\} \Rightarrow (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$$

Учитывая сочетательный закон, смешанное произведение обозначают: $(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c})$ или $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

- 2) **Закон круговой переместительности:**

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}$$



При перестановке множителей не нарушающей их кругового порядка, смешанное произведение не меняется, при перестановке же множителей, нарушающей круговой порядок, смешанное произведение меняет свой знак

Смешанное произведение векторов

3) *Распределительный закон*

$$(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) \bar{b} \bar{c} = \bar{a}_1 \bar{b} \bar{c} + \bar{a}_2 \bar{b} \bar{c}$$

$$\bar{a} \bar{b} \bar{c} = 0$$



$\bar{a}; \bar{b}; \bar{c}$ – компланарны

В частности, смешанное произведение равно нулю, если в нем два множителя одинаковы: $\bar{a} \bar{a} \bar{c} = 0$

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат заданы векторы:

$$\bar{a} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k} \quad \bar{b} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}$$

$$\bar{c} = x_3 \cdot \bar{i} + y_3 \cdot \bar{j} + z_3 \cdot \bar{k}$$

Смешанное произведение векторов

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \bar{k}$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot x_1 - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot y_1 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot z_1$$

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Смешанное произведение векторов

Найти объем треугольной пирамиды с вершинами:

$$A(2; 2; 2) \quad B(4; 3; 3) \quad C(4; 5; 4) \quad D(5; 5; 6)$$

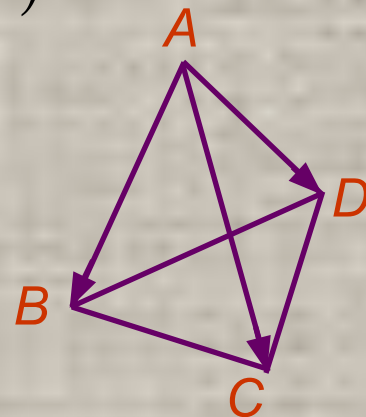
Найдем координаты векторов:

$$\overline{AB} = \{4 - 2; 3 - 2; 3 - 2\} = \{2; 1; 1\}$$

$$\overline{AC} = \{4 - 2; 5 - 2; 4 - 2\} = \{2; 3; 2\}$$

$$\overline{AD} = \{5 - 2; 5 - 2; 6 - 2\} = \{3; 3; 4\}$$

$$\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 7$$



$$V = \frac{1}{6} |\overline{a} \overline{b} \overline{c}|$$

Объем треугольной пирамиды равен $\frac{1}{6}$ части $V = \frac{7}{6}$ параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}; \overline{b}; \overline{c}$