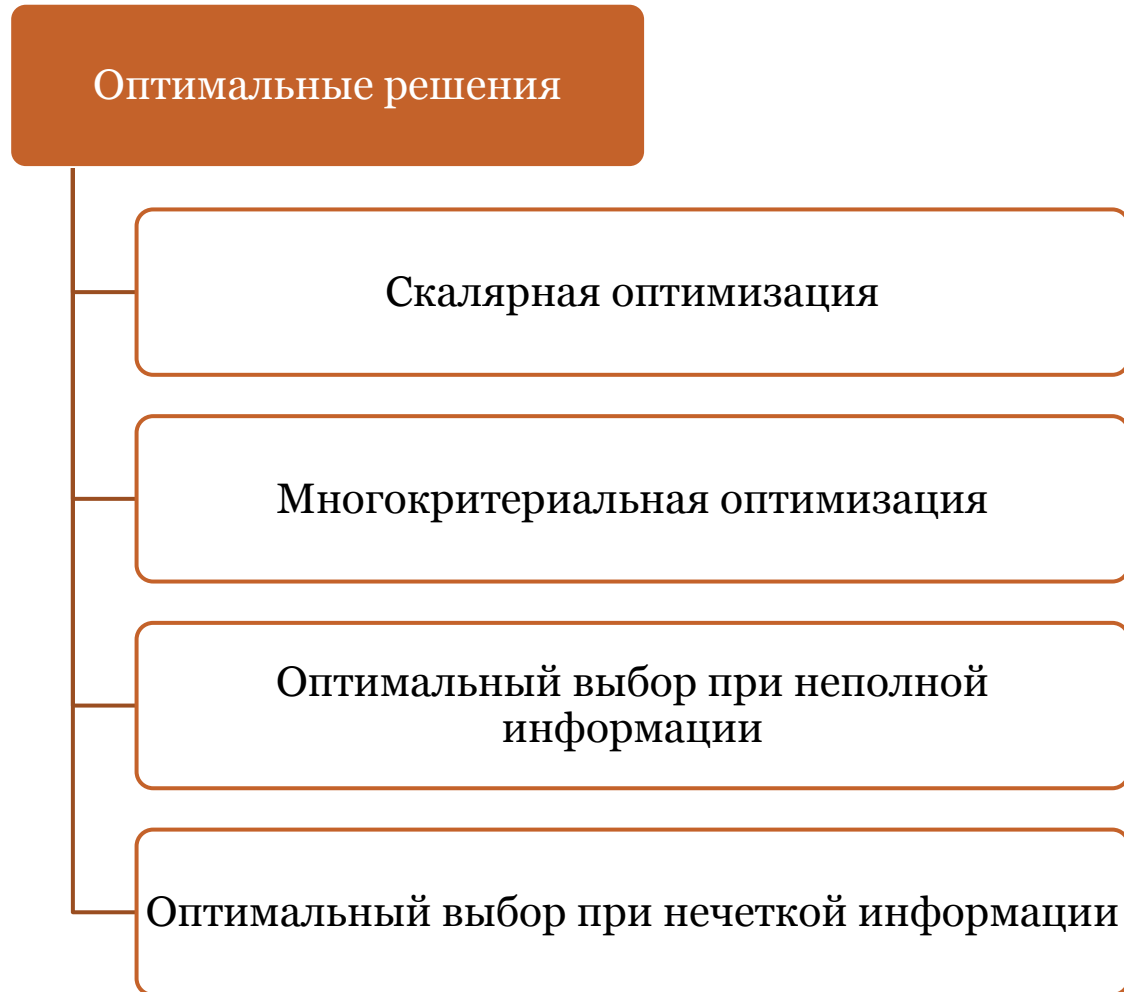


Принятие решений при неполной информации

Д.т.н. профессор
Николайчук Ольга Анатольевна

Классификация методов теории принятия решений



Задача принятия решений при неполной информации

$$y_k = f_k(x, \delta, \xi, \zeta) \rightarrow \max_{x \in X^a}, k = 1, \dots, h$$

$$g_q(x, \delta, \xi, \zeta) \leq b_q, q = 1, \dots, p$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

y_k

δ

(ξ, ζ)

ξ

ζ

- n -мерный вектор признаков варианта;
- целевые функции, или критерии оптимальности;
- детерминированные факторы;
- неопределенные факторы, отражающие степень информированности ЛПР;
- случайные факторы, для которых известны функции распределения вероятности;
- неопределенные факторы, определены нечетко или неизвестны.

Задача принятия решений при неполной информации

- В рассмотренных ранее задачах принятия решения в условиях риска известны оценки вероятностей, с которыми можно ожидать тот или иной исход при их случайном выборе.
- Однако, во многих практических задачах очень часто совершенно неизвестно, с какой вероятностью можно ожидать возможные сценарий развития ситуации.
- Математическую модель принятия решений при таких условиях назовем *методом принятия решений в условиях неопределенности*.

Постановка задачи

Пусть ЛПР способен перечислить все возможные состояния внешней среды («состояния природы»), однако в каком конкретном состоянии находится среда ЛПР доподлинно не известно. Пусть существует d таких состояний среды E_1, \dots, E_d , а из имеющихся альтернатив A_1, \dots, A_m требуется выделить наиболее предпочтительный вариант. Считается, что ЛПР самостоятельно или, привлекая экспертов, может каким-либо способом численно оценить так называемую частную эффективность или полезность $y_{ij} = f_j(A_i)$ варианта A_i для каждого j -состояния среды E_j , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, d}$.

Постановка задачи

Модель принятия решения в условиях полной неопределенности представляется матрицей полезности $Y = (y_{ij})_{m \times d}$, где $y_{ij} = f_j(A_i)$, а i -строка матрицы соответствует вектору $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{id})$, составленному из значений функций полезности y_{ij} варианта A_i (табл.).

Y	E_1	E_2	...	E_d
A_1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1d}
A_2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2d}
...
A_m	y_{m1}	y_{m2}	...	y_{md}

Функция полезности (или частной эффективности) $f_j(A_i)$ варианта A_i в j -состоянии среды E_j характеризует возможность достижения цели, возможный доход или выигрыш, получаемый при выборе варианта A_i .

Постановка задачи

Y	E_1	E_2	...	E_d
A_1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1d}
A_2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2d}
...
A_m	y_{m1}	y_{m2}	...	y_{md}

Нередко полезность нормируют, переводя ее значение в пределы $0 \leq y'_{ij} \leq 1$, путем замены переменных, например

$$y'_{ij} = (y_{ij} - y_j^{\min}) / (y_j^{\max} - y_j^{\min}), \text{ или } y'_{ij} = y_{ij} / \sum_{k=1}^m y_{kj}.$$

Иногда, исходя из существа задачи, вместо функции эффективности удобнее ввести противоположную ей по смыслу функцию потерь $z_j(A_i)$, которая отражает возможные расходы, проигрыш или ущерб, возникающие реализации варианта A_i .

Критерий Лапласа

В условиях полной неопределенности наиболее предпочтительный для ЛПР вариант A^* определяется экстремальным значением обобщенного критерия качества решения, в роли которого выступает один из следующих критериев:

1) Критерий равнозначности Лапласа

$$A^* \in \arg \max_i \left[(1/d) \sum_{j=1}^d f_i(A_i) \right].$$

Данный критерий применяется, если состояния внешней среды неизвестны, но их можно считать равновероятными. Он может быть применен, когда руководитель или любое другое лицо, принимающее решение, не может предпочесть ни одной гипотезы.

Пример

Директор торговой фирмы, продающей телевизоры марки «Zarya» решил открыть представительство в областном центре. У него имеются альтернативы либо создавать собственный магазин в отдельном помещении, либо организовывать сотрудничество с местными торговыми центрами. Всего можно выделить 5 альтернатив решения: A_1, \dots, A_5 . Успех торговой фирмы зависит от того, как сложится ситуация на рынке предоставляемых услуг. Эксперты выделяют 4 возможных варианта развития ситуации E_1, \dots, E_4 .

Прибыль фирмы для каждой альтернативы при каждой ситуации представлена матрицей выигрышей $Y = (y_{ij})_{5 \times 4}$ (млн. р./год).

Y	E_1	E_2	E_3	E_4
A_1	8	12	14	5
A_2	9	10	11	10
A_3	2	4	9	22
A_4	12	14	10	1
A_5	15	6	7	14

Решение. Критерий Лапласа

Он основан на предположении, что каждый вариант развития ситуации (состояния «природы») равновероятен. Поэтому, для принятия решения, необходимо рассчитать функцию полезности $f_j(A_i)$ для каждой альтернативы, равную среднеарифметическому показателей привлекательности по каждому «состоянию природы»:

Выбирается та альтернатива, для которой функция полезности максимальна. Видно, что функция полезности максимальна для альтернативы A_5 , следовательно, ее рациональнее всего принять.

Критерий оптимизма

Критерий оптимизма (*максимакса*). Предполагает возможность получения максимального уровня желательности результата.

$$A^* \in \operatorname{argmax}_i \max_j f_j(A_i).$$

Решение. Критерий оптимизма

Y	E_1	E_2	E_3	E_4
A_1	8	12	14	5
A_2	9	10	11	10
A_3	2	4	9	22
A_4	12	14	10	1
A_5	15	6	7	14

Наиболее простой критерий, основывающийся на идее, что ЛПР, имея возможность в некоторой степени управлять ситуацией, рассчитывает, что произойдет такое развитие ситуации, которое для него является наиболее выгодным. В соответствии с критерием принимается альтернатива, соответствующая максимальному элементу матрицы выигрышей. Для приведенного примера эта величина $y_{34} = 22$, поэтому выбираем альтернативу A_3 .

Критерий пессимизма Вальда

Критерий пессимизма Вальда, критерий *максимина* (принцип гарантированного результата). Он заключается в выборе в качестве оптимальной той альтернативы, которая имеет наибольшее среди наименее благоприятных состояний внешней среды значение функции полезности. Критерий Вальда лучше всего использовать тогда, когда организация желает свести риск от принятого решения к минимуму.

$$A^* \in \operatorname{argmax}_i \min_j f_j(A_i).$$

Решение. Критерий пессимизма Вальда

Y	E_1	E_2	E_3	E_4
A_1	8	12	14	5
A_2	9	10	11	10
A_3	2	4	9	22
A_4	12	14	10	1
A_5	15	6	7	14

Данный критерий основывается на принципе максимального пессимизма, то есть на предположении, что скорее всего произойдет наиболее худший вариант развития ситуации и риск наихудшего варианта нужно свести к минимуму. Для применения критерия нужно для каждой альтернативы выбрать наихудший показатель привлекательности y_i (наименьшее число в каждой строке матрицы выигрышей) и выбрать ту альтернативу, для которой этот показатель максимальный. Для нашего примера: $y_1 = 5, y_2 = 9, y_3 = 2, y_4 = 1, y_5 = 6$. Видно, что наилучшим из наихудших показателей обладает альтернатива A_2 , для нее $y_2 = 9$ наибольшее.

Критерий Сэвиджа

Критерий Сэвиджа (*минимаксного сожаления*). Стратегия выбора по принципу Сэвиджа характеризует те потенциальные потери, которые организация будет иметь, если выберет неоптимальное решение.

$$A^* \in \arg \min_i \max_j r_j(A_i), \quad r_j(A_i) = \max_k f_j(A_k) - f_j(A_i).$$

Решение. Критерий Сэвиджа

Он основан на принципе минимизации потерь, связанных с тем, что ЛПР принял не оптимальное решение. Для решения задачи составляется матрица потерь, которая называется **матрицей рисков** r_{ij} , которая получается из матрицы выигрышей y_{ij} путем вычитания из максимального элемента каждого столбца $r_j(A_i) = \max_k f_j(A_k) - f_j(A_i)$ всех остальных элементов. В рассматриваемом примере эта матрица есть:

R	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	2	0	17
A_2	6	4	3	12
A_3	13	10	5	0
A_4	3	0	4	21
A_5	0	0	7	8

Далее, для каждой альтернативы определяем величины $i b$, равные максимальному риску (наибольшее число в каждой строке матрицы рисков) и выбирают ту альтернативу, для которой максимальный риск минимален. В нашем примере:

$b_1 = 17, b_2 = 12, b_3 = 13, b_4 = 21, b_5 = 8$ минимально $b_5 = 8$. Принимаем альтернативу A_5 .

Критерий Гурвица

Критерий взвешенного оптимизма-пессимизма Гурвица. Данный критерий представляет собой комбинацию принципа гарантированного результата и принципа оптимизма. Коэффициент в критерии Гурвица выбирается из субъективных соображений: чем опаснее ситуация, тем больше руководитель или любое другое лицо, принимающее решение, желает подстраховаться.

$$A^* \in \arg \max_i \left[\gamma \max_j f_j(A_i) + (1 - \gamma) \min_j f_j(A_i) \right],$$

где величина параметра γ задается ЛПР в пределах $0 \leq \gamma \leq 1$.

Пример

Y	E_1	E_2	E_3	E_4
A_1	8	12	14	5
A_2	9	10	11	10
A_3	2	4	9	22
A_4	12	14	10	1
A_5	15	6	7	14

Решение. Критерий Гурвица

Это самый универсальный критерий, который позволяет управлять степенью «оптимизма - пессимизма» ЛПР. Введем некоторый коэффициент γ , который назовем **коэффициентом доверия** или коэффициентом оптимизма. Этот коэффициент можно интерпретировать как вероятность, с которой произойдет наилучший для ЛПР исход. Исходя из этого, наихудший вариант можно ожидать с вероятностью $(1-\gamma)$. Коэффициент доверия γ показывает, насколько ЛПР может управлять ситуацией и в той или иной степени рассчитывает на благоприятный для него исход. Если вероятности благоприятной и неблагоприятной ситуации для ЛПР равны, то следует принять $\gamma = 0,5$.

Выбирается та альтернатива, для которой функция полезности максимальна.

Предположим, что для нашего примера ЛПР достаточно уверен в положительном результате и оценивает вероятность максимального успеха в $\gamma = 0,7$. Тогда:

В соответствии с расчетами ЛПР следует выбрать альтернативу А3.

Решение. Критерий Гурвица

Если же, например, ЛПР не очень уверен в положительном исходе и расценивает его вероятность порядка $\gamma = 0,2$, то функции полезности равны:

Видно, что в этом случае следует принять A_2 , для которого функция полезности максимальна.

Следует отметить, что при $\gamma = 0$, критерий Гурвица переходит в пессимистический критерий Вальда, а при $\gamma = 1$ – в критерий максимального оптимизма.