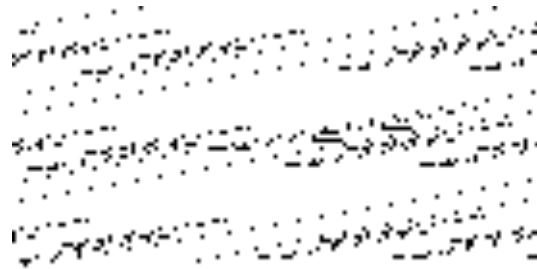


# Собственные числа и собственные вектора матриц

Пусть задана квадратная матрица



**Определение:** Число  $\lambda$  называется **собственным числом** матрицы  $A$ , если существует ненулевой вектор  $X$  такой, что

При этом вектор  $X$  называется **собственным вектором** матрицы  $A$ , соответствующим собственному числу  $\lambda$ .

Найдём собственный вектор матрицы  $A$ .

Т.к.  $E \cdot X = X$ , то матричное уравнение можно переписать в виде :

$$E \cdot X - X = 0$$

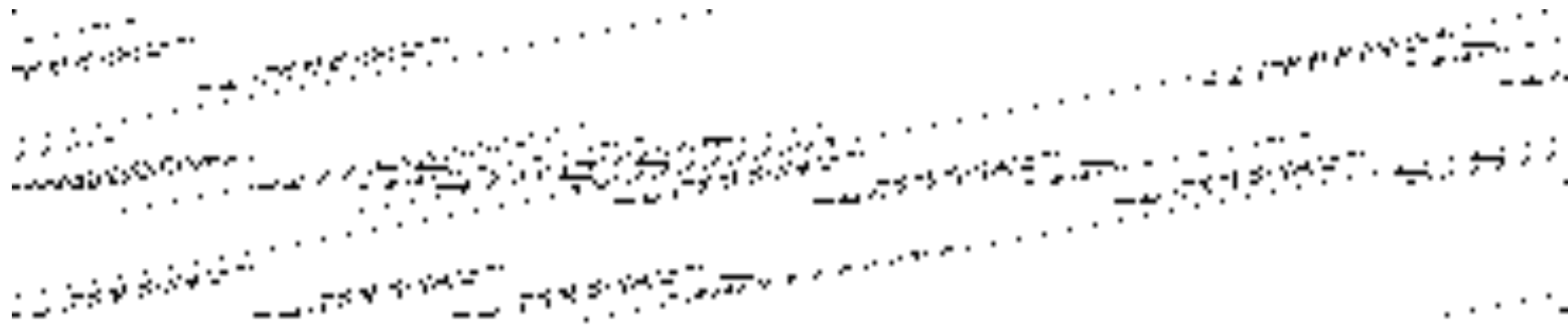
ИЛИ

$$(E - A) \cdot X = 0$$

В развёрнутом виде это уравнение можно переписать в виде системы линейных уравнений.



Итак, получили систему однородных линейных уравнений для определения координат  $x_1, x_2, x_3$  вектора  $X$ . Чтобы система имела ненулевые решения необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.



Корни этого уравнения являются собственными числами матрицы  $A$ .

Полученное уравнение 3-ей степени относительно  $\lambda$  называется ***характеристическим уравнением*** матрицы  $A$  и служит для определения собственных значений  $\lambda$ .

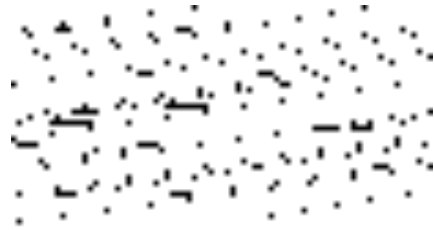
Каждому собственному значению  $\lambda$  соответствует собственный вектор  $X$ , координаты которого определяются из системы при соответствующем значении  $\lambda$ .

# Теорема

Собственными числами матрицы  $A$   
являются корни уравнения  
и только они.

## Пример:

Найти собственные векторы и соответствующие им собственные числа матрицы



**Решение:**

Составим характеристическое уравнение и найдём собственные числа.

1. При  $\lambda_1 = -1$  получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Если  $x_1 = t$ , то  $\begin{cases} x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases}$  где  $t \in R$ .

2. Если  $\lambda_2 = 5$ , то

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$



Найдем собственные вектора.

Запишем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Задачи:

Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы:

1. 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

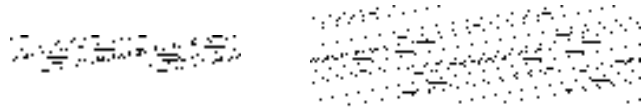
2. 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Д-3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

# ОТВЕТЫ:

1.



2.



Д-3.

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 3 \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$