Собственные числа и собственные вектора матриц

Пусть задана квадратная матрица

Определение: Число **λ** называется **собственным числом** матрицы А, если существует ненулевой вектор Х такой, что

При этом вектор Х называется **собственным вектором** матрицы А, соответствующим собственному числу λ.

Найдём собственный вектор матрицы *A*.

Т.к. $E \cdot X = X$, то матричное уравнение можно переписать в виде :

[illegible]

или

[illegible]

В развёрнутом виде это уравнение можно переписать в виде системы линейных уравнений.

Действительно,

И следовательно,

Итак, получили систему однородных линейных уравнений для определения координат x_1, x_2, x_3 вектора X. Чтобы система имела ненулевые решения необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.

Корни этого уравнения являются собственными числами матрицы А.

Полученное уравнение 3-ей степени относительно λ называется ***характеристическим уравнением*** матрицы *A* и служит для определения собственных значений λ.

Каждому собственному значению λ соответствует собственный вектор *X*, координаты которого определяются из системы при соответствующем значении λ.

Теорема

Собственными числами матрицы A являются корни уравнения $|A-\lambda E|=0$ и только они.

Пример:

Найти собственные векторы и соответствующие им собственные числа матрицы

Решение:

Составим характеристическое уравнение и найдём собственные числа.

1. При $\lambda_1 = -1$ получаем систему уравнений

Если $x_1 = t$, то,   где $t \in R$.

2. Если $\lambda_2 = 5$, то

Найдем собственные вектора.

Запишем матрицу

Далее,

Задачи:

Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы:

1. [illegible]

2. [illegible]

д-3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ответы:

1. [illegible] [illegible]

2. [illegible] [illegible]

Д-з.

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 3 \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$