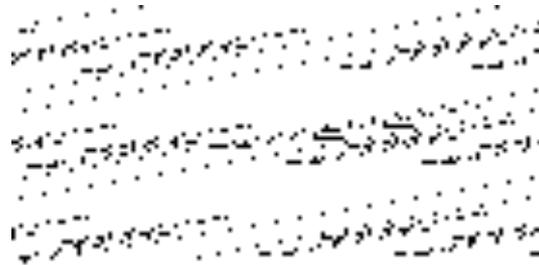


Собственные числа и собственные вектора матриц

Пусть задана квадратная матрица



Определение: Число λ называется **собственным числом** матрицы A , если существует ненулевой вектор X такой, что

При этом вектор X называется **собственным вектором** матрицы A , соответствующим собственному числу λ .

Найдём собственный вектор матрицы A .

Т.к. $E \cdot X = X$, то матричное уравнение можно переписать в виде :

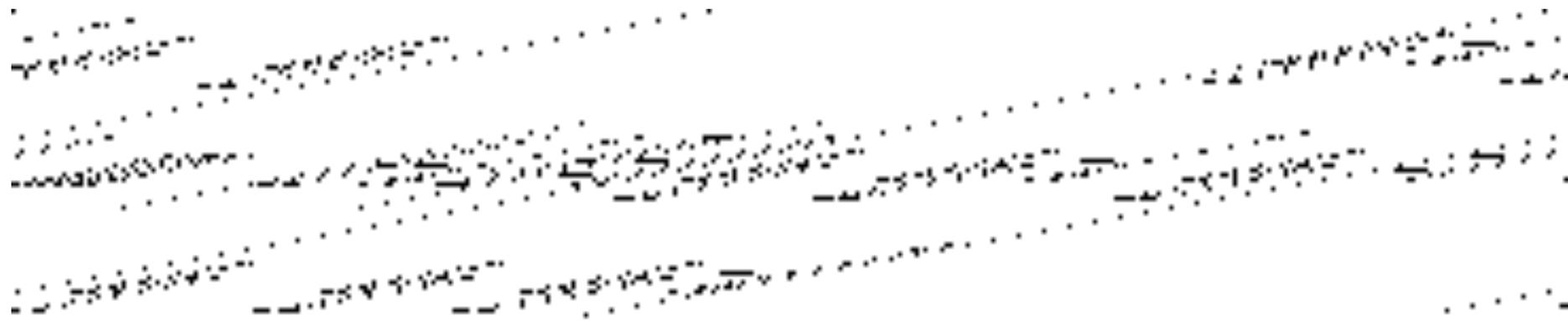
$$E \cdot X - X = 0$$

ИЛИ

$$(E - A) \cdot X = 0$$

В развёрнутом виде это уравнение можно переписать в виде системы линейных уравнений.

Итак, получили систему однородных линейных уравнений для определения координат x_1, x_2, x_3 вектора X . Чтобы система имела ненулевые решения необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.



Корни этого уравнения являются собственными числами матрицы A .

Полученное уравнение 3-ей степени относительно λ называется ***характеристическим уравнением*** матрицы A и служит для определения собственных значений λ .

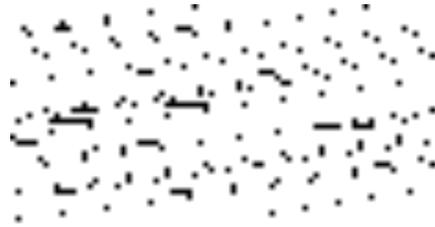
Каждому собственному значению λ соответствует собственный вектор X , координаты которого определяются из системы при соответствующем значении λ .

Теорема

Собственными числами матрицы A
являются корни уравнения
и только они.

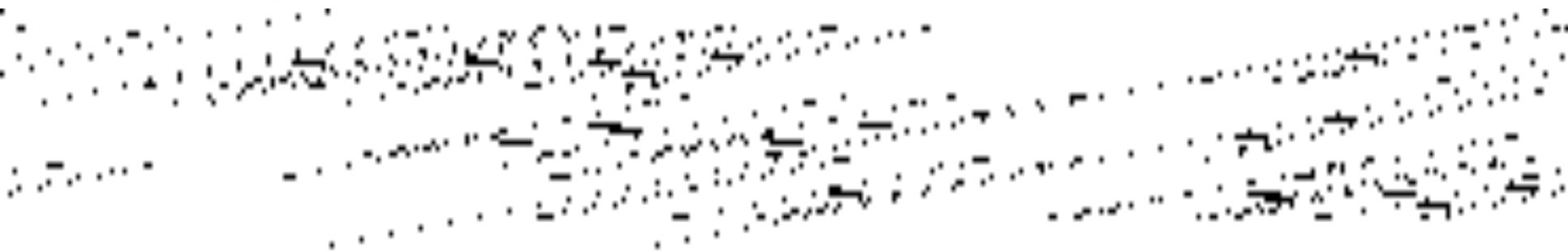
Пример:

Найти собственные векторы и соответствующие им собственные числа матрицы



Решение:

Составим характеристическое уравнение и найдём собственные числа.



1. При $\lambda_1 = -1$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Если $x_1 = t$, то $\begin{cases} x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases}$ где $t \in R$.

2. Если $\lambda_2 = 5$, то

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Найдем собственные вектора.

Запишем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задачи:

Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы:

1.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Д-3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

ОТВЕТЫ:

1.



2.



Д-3.

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 3 \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$