

**Планирование эксперимента.
Анализ результатов.
Планирование 2-го порядка.**



Пример проведения планирования 1-го порядка.

Постановка задачи

Покупатели приходят в магазин с одним продавцом.
Время между приходом покупателей и время обслуживания подчиняются экспоненциальному закону.

Необходимо определить функциональную зависимость между временем прихода, временем обслуживания и средним временем нахождения покупателя в очереди:

$T_{\text{ср.оч.}} = f(T_{\text{прих}}, T_{\text{обсл}}) - ?$

Предполагаем линейную зависимость.

Пусть время прихода – в пределах от 5.0 до 6.0 мин.

время обслуж. – в пределах от 3.5 до 3.8 мин.

Тогда:

	-1	+1	
$T_{\text{прих}}$:	5	6	
$T_{\text{обсл}}$:	3.5	3.8	

Пример. Построение модели

Расчет
коэффициентов:

$$b_0 = 6.948$$

$$b_1 = -1.681$$

$$b_2 = 0.632$$

N	x_0	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$y_{\text{ср}}$
1	+	-	-	9.2	8.2	7.2	7.6	7.3	7.956
2	+	-	+	10	9.3	9	8.9	9.3	9.3
3	+	+	-	4.7	4.9	4.6	4.6	4.5	4.676
4	+	+	+	4.7	5.7	6	6.5	6.4	5.857

Модель:

$$y = 6.948 - 1.681 \cdot x_1 + 0.632 \cdot x_2$$

Пример. Проверка адекватности

Выборочная дисперсия: $S^2 = 0.382$

Дисперсия адекватности: $S_{\text{ад}}^2 = 0.034$

Критерий Фишера: $F = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S^2} < 1 \longrightarrow$ Модель адекватна

Пример. Проверка линейности

Опыт в центре эксперимента:

-1 +1 0

Тприх: 5 6

Тобсл: 3.5 3.8

N	x_0	x_1	x_2	$y_{\text{ср}}$
1	+	-	-	7.956
...	
4	+	+	+	5.857
5	+	0	0	

Пример. Проверка линейности

Опыт в центре эксперимента:

-1 +1 0

Тприх: 5 6 5.5

Тобсл: 3.5 3.8 3.65

Критерий Стьюдента:

N	x ₀	x ₁	x ₂	y _{ср}
1	+	-	-	7.956
...	
4	+	+	+	5.857
5	+	0	0	7.791

$$t = \frac{|b_0 - y_0| \cdot \sqrt{N}}{S^2} = 2.73 > t_{\text{табл}} = 2.131 \longrightarrow \text{Модель НЕ линейна}$$

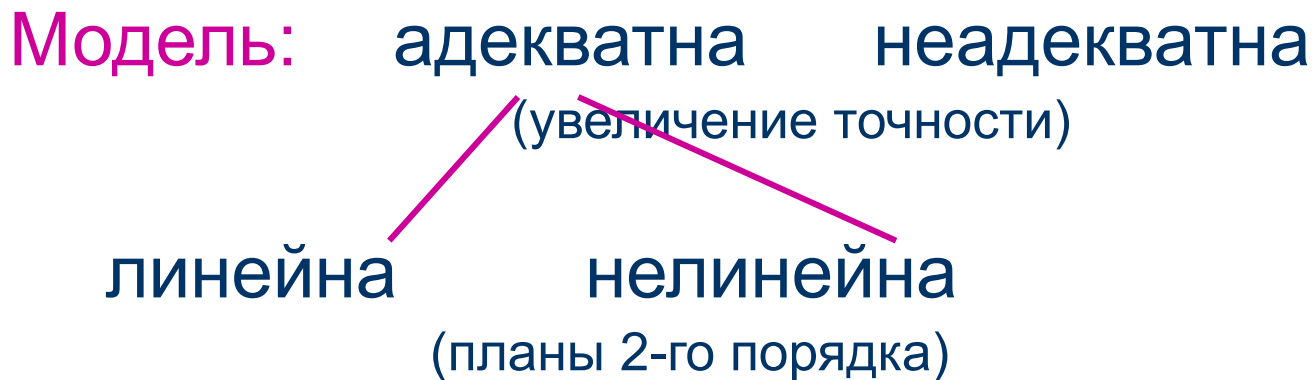
Пример. Проверка значимости коэффициентов

Модель: $y = 69.48 - 16.81 \cdot x_1 + 6.32 \cdot x_2$

Критерий Стьюдента: $t = \frac{|b_i| \cdot \sqrt{N}}{S^2} > t_{\text{табл}}$

Коэффициенты: $t_1 = 5.44 \longrightarrow$ **Значим**
 $t_2 = 2.04 \longrightarrow$ **НЕ Значим**

Принятие решений после построения линейной модели



Коэф-ты: значимы незначимы

- 1) узкие интервалы варьирования
- 2) большая ошибка эксперимента

Планы второго порядка

Уравнение второго порядка

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \cdot x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq k} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} \cdot x_i^2$$

ПФЭ

$$N = ?^k$$

Планы второго порядка

Уравнение второго порядка

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \cdot x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq k} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} \cdot x_i^2$$

ПФЭ

Центральный композиционный план

$$N = 3^k$$

$$N = N_0 + 2k + n_0$$

$$N_0 = 2^{k-1} \longrightarrow$$

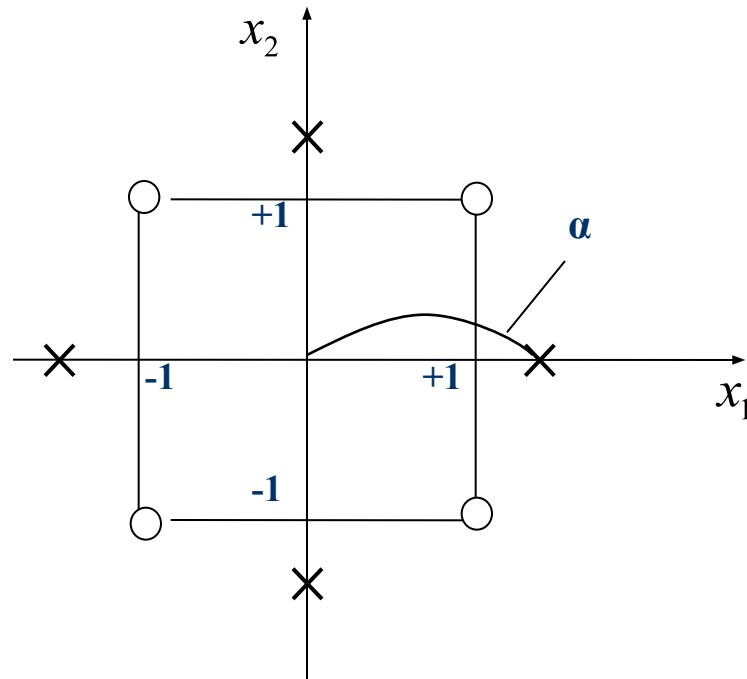
Опыты из планирования
1-го порядка

Центральный композиционный план (ЦКП) для двух факторов

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$$

5 уровней:

$-\alpha \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +\alpha$



ЦКП для двух факторов

Составная часть ЦКП	№	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2
Ядро плана	1	+	-	-	+	+	+
	2	+	+	-	-	+	+
	3	+	-	+	-	+	+
	4	+	+	+	+	+	+
«Звездный» план 2^2	5	+	$-\alpha$	0	0	α^2	0
	6	+	α	0	0	α^2	0
	7	+	0	$-\alpha$	0	0	α^2
	8	+	0	α	0	0	α^2
Центр. Точка	9	+	0	0	0	0	0

Количество опытов ЦКП

k	Ядро плана	3^k	$N=2^{k-d} + 2k+1$
2	2^2	9	9
3	2^3	27	15
4	2^4	81	25
5	2^{5-1}	243	27

Выбор «звездного» плеча (для ортогонального планирования)

$$\alpha = \sqrt{(\sqrt{N_0 \cdot N} - N_0)/2}$$

$$N = N_0 + 2k + 1$$

k	Ядро плана (N_0)	α
2	2^2	1,000
3	2^3	1,215
4	2^4	1,414
5	2^5	1,596
6	2^{6-1}	1,547

Расчет коэффициентов

Пусть b_0 b_1 b_2 b_3 $b_{12}=b_4$ $b_{13}=b_5$ $b_{23}=b_6$ $b_{11}=b_7 \dots$

$$b_i = \frac{\sum_{l=1}^N x_{il} \cdot \bar{y}_l}{\sum_{l=1}^N x_{il}^2}$$

$$b_0 = \frac{\sum_{l=1}^N \bar{y}_l}{N}$$

Дисперсии оценивания

$$S^2 \{b_i\} = \frac{S^2}{\sum_{l=1}^N x_{il}^2} \quad S^2 \{b_0\} = \frac{S^2}{N}$$

где S^2 – выборочная дисперсия

Проверка значимости коэффициентов

Критерий Стьюдента:

$$t_{\text{расч}} = \frac{b_i}{\sqrt{S^2 \{b_i\}}}$$

Коэффициент **значим**, если

$$\underline{t_{\text{расч}}} \geq t_{\text{табл}} (\alpha; f = N(n - 1))$$

Задача оценки точности

Задача 1: оценка точности и достоверности при заданном методе реализации модели, при заданном объеме выборки;

Задача 2: оценка необходимого числа реализаций при заданных точности и достоверности результатов.

Желаемую степень точности можно задавать:

- а) в виде доли стандартного отклонения;
- б) в процентах от величины среднего значения;
- в) в абсолютных величинах.

Оценивание среднего значения совокупности (задача 2)

Задача: необходимо построить такую оценку истинного среднего значения совокупности, что

$$P\{\mu - d \leq \bar{X} \leq \mu + d\} = 1 - \alpha$$

где \bar{X} — выборочное среднее,

$(1 - \alpha)$ — вероятность того, что интервал $\mu \pm d$ содержит \bar{X}

Необходимый для этого условия объем выборки:

$$n = (\sigma Z_{\alpha/2})^2 / d^2$$

где $Z_{\alpha/2}$ — двусторонняя стандартная нормальная статистика (допустимая величина риска);

d — допустимая разность между оценкой и истинным значением параметра;

σ — величина изменчивости совокупности,

Оценивание среднего значения совокупности (задача 1)

Задача: какой точности d мы достигнем при заданном объеме выборки n ?

$$P\{\mu - d \leq \bar{X} \leq \mu + d\} = 1 - \alpha$$

Достигаемая точность:

$$d = \frac{\sqrt{S^2} \cdot t}{\sqrt{n}}$$

где S^2 — выборочная дисперсия, полученная на выборке n ;

t — критерий Стьюдента

Пример. Оценка точности

σ - неизвестна.

Точность в долях стандартного отклонения: $d = \frac{\sigma}{4}$

Необходимый для этого условия объем выборки:

(при $\alpha = 0.05$ $Z_{\alpha/2} = 1.96$)

$$n = \frac{(\sigma \cdot Z_{\alpha/2})^2}{d^2} = \frac{\sigma^2 \cdot Z_{\alpha/2}^2 \cdot 4^2}{\sigma^2} = 16 \cdot 1.96^2 = 61.46 = 62$$

Оценивание дисперсии совокупности

Задача: построение доверительных интервалов

$$P\left\{(1-d)\sigma^2 \leq S^2 \leq (1+d)\sigma^2\right\} = 1 - \alpha$$

где $0 \leq d \leq 1$ — число, характеризующее степень близости оценки S^2 к истинной дисперсии σ^2 .

Необходимый для этого условия объем выборки:

$$n = 1 + \frac{2(Z_{\alpha/2})^2}{d^2}$$

Сравнение двух распределений

Задача: проверка близости распределения отклика модели к некоторому другому распределению. Под желаемой точностью (d) будем понимать максимальную разность сравниваемых распределений во всех точках

Необходимый для этого условия объем выборки:

$$n = \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2$$

где λ — табличное значение функции Колмогорова.

Стратегическое и тактическое планирование

Стратегическое планирование (первая составляющая планирования экспериментов с моделями систем) ставит целью решение задачи получения необходимой информации о системе с помощью модели, с учетом ограничения на ресурсы.

Тактическое планирование (вторая составляющая) — это определение способа проведения каждой серии испытаний модели, предусмотренных планом эксперимента.

Некоторые проблемы стратегического планирования

- *сложность построения плана эксперимента;*
- *наличие большого количества факторов;*
- *многокомпонентность функции отклика;*
- *ограниченность ресурсов проведения эксперимента.*

Этапы стратегического планирования

- **построение структурной модели** осуществляется исходя из того, что должно быть сделано;
- **построение функциональной модели** производится исходя из того, что может быть сделано.

Структурная модель

Структурная модель плана эксперимента характеризуется числом факторов и числом уровней для каждого фактора.

Число элементов эксперимента $N_c = q_1 q_2 \dots q_k$

где k — число факторов эксперимента;
 q_i — число уровней i -го фактора.

Число уровней зависит от предполагаемой функциональной зависимости между откликом и факторами.

Если уровни равноотстоят друг от друга и если $q_i = q_j$ для всех факторов, то получаем ПФЭ q -го порядка.

$$N_c = q^k$$

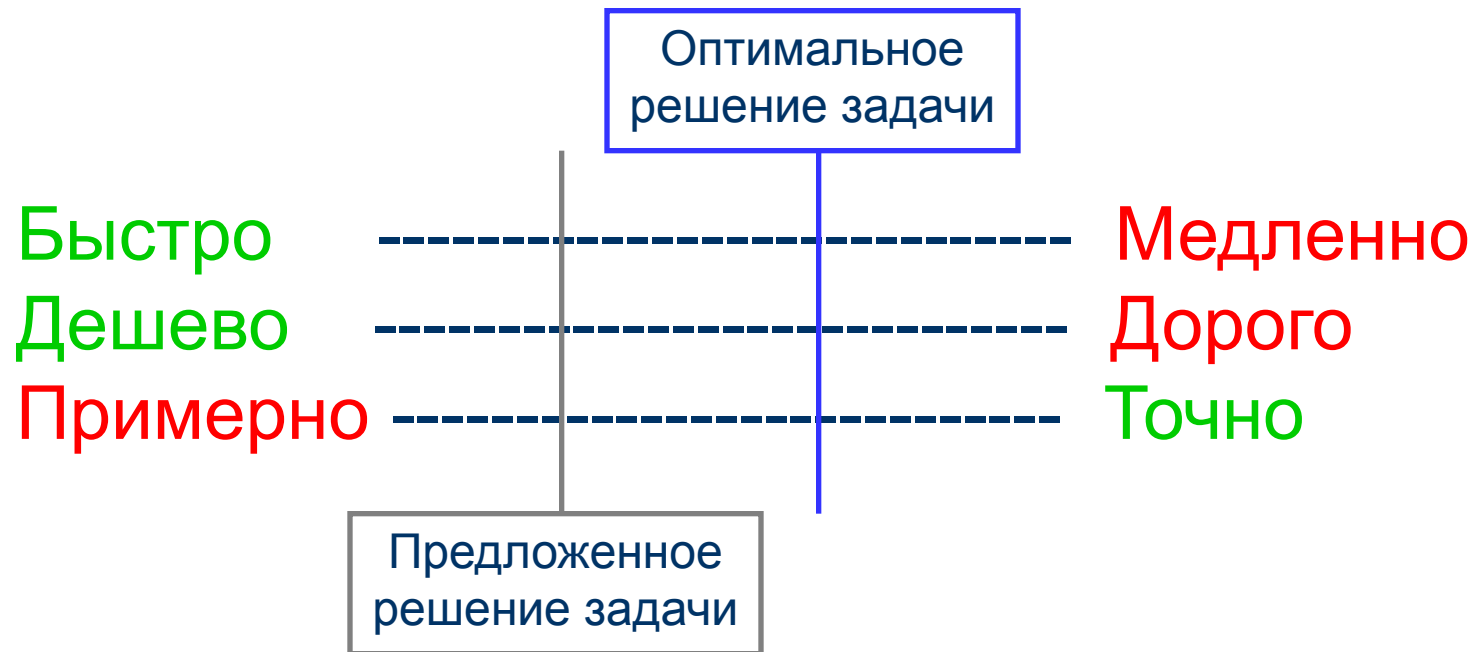
Функциональная модель

Функциональная модель определяет количество необходимых элементов структурной модели .

Модель полная, если $N_{\phi} = N_c$ (ПФЭ),

Модель неполная, если $N_{\phi} < N_c$ (ДФЭ).

Примеры критериев оптимальности



Не существует «универсального» критерия оптимальности.
Исследователь задает его в процессе планирования работы.

Выбор критерия оптимальности

- Если для каждого из экспериментов, приводящих к желаемому результату, можно оценить величину «затрат», то задача заключается в выборе такого эксперимента, при котором «затраты» минимальны.
- «Стоимостный» подход возможен только в том случае, когда все эксперименты приводят к одинаковой точности результата.

Подбор компонентов функциональной модели

Можно варьировать: количество факторов k ,
число уровней q ,
количество повторений эксперимента p .

Учитываются: затраты времени на 1 опыт τ ,
стоимость опыта c .

Полное число опытов при симметрично повторяемом эксперименте:

$$N = pq^k$$

Общее время, требуемое для проведение эксперимента:

$$T = \tau \cdot N$$

Общие затраты:

$$C = c \cdot T$$

Пример. Стратегия поездки из пункта А в пункт Б

Из пункта А в пункт Б можно попасть разными путями, за разное время, затратив разное количество денег (горючее, амортизация а/м, штрафы, заработок за счет попутных пассажиров). Каждый водитель формирует свой критерий оптимальности, например:

- Экономия денег (аккуратная езда, выбор оптимальной скорости, соблюдение правил, подбор попутчиков) за счет времени;
- Экономия времени (быстрая езда) за счет денег (штрафы, без попутчиков, повышенный износ автомашины), безопасности, душевного спокойствия и комфорта (тряска, рывки).
- Повышение безопасности за счет времени;
- Сохранение душевного спокойствия (избегание улиц с интенсивным движением, строгое выполнение правил) за счет времени и денег (более длинный путь).