ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

- ТЕМА ЛЕКЦИЙ 3
- А.А. ЩЕРБИНА
- Радиотехнический факультет
- Кафедра основ радиотехники

Векторы электромагнитного поля в вакууме

Источниками электромагнитного поля являются *заряды*. Неподвижные заряды создают только электрическое поле. Движущиеся заряды создают как электрическое, так и магнитные поля. Оба поля могут проявляться в виде механических сил.

Силовое (пондеромоторное) воздействие электромагнитного поля на электрические заряды *q* принято характеризовать силой

$$\vec{F}_{ЭМП} = q\vec{E} + q(\vec{V} \times \vec{B}) = \vec{F}_{Э} + \vec{F}_{M}$$

Электрическая и магнитная силы равны:

$$F_{э} = q\,\vec{E}, \qquad \vec{F}_{M} = q\,(\vec{V} \times \vec{B})$$

Сила $\vec{F}_Э$ определяет векторную величину, называемую *напряженностью электрического поля* $\vec{E}$. Величину $\vec{E}$ определяют как силу, с которой электрическое поле действует на положительный единичный заряд.

Сила $\vec{F}_M$ пропорциональна заряду и векторному произведению скорости движения заряда $\vec{V}$ на величину, называемую *индукцией магнитного поля* $\vec{B}$.

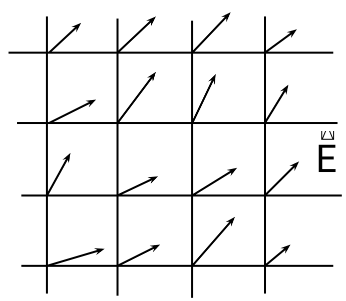
Величина $\vec{B}$ численно равна силе, с которой магнитное поле в вакууме действует на положительный единичный точечный заряд, движущийся с единичной скоростью перпендикулярно линиям вектора $\vec{B}$.

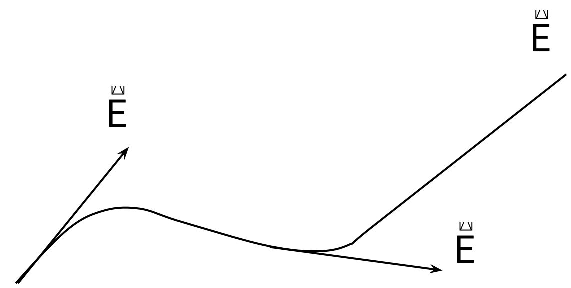
Направление силы $\vec{F}_M$ перпендикулярно к плоскости, в которой расположены векторы скорости и индукции магнитного поля.

Векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ полностью определяют ЭМП поле в вакууме.

Понятие векторного поля и силовой линии

Векторное поле определяется как часть пространства, в каждой точке которого заданы значения и направления вектора. Например, на рисунке графически представлено векторное поле напряженности электрического поля.





Силовой линией, например, вектора $\vec{E}$, называется линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке пространства совпадает с направлением вектора   в этой точке

(см. рисунок).

Материальные уравнения

Для описания электромагнитных волн в материальных средах дополнительно к векторам напряженности электрического поля и индукции магнитного поля, описывающим поле в вакууме, вводятся вектор электрического смещения $\vec{D}$ и $\vec{H}$ вектор напряженности магнитного поля . Связь между векторами $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$ определяется материальными уравнениями.

Первое материальное уравнение $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$

$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ Ф/м – универсальная электрическая постоянная

Физически вектор электрического смещения $\vec{D}$ определяет связь электрического заряда с собственным электрическим полем. Вокруг электрического заряда q существует электрическое поле, линии которого от него исходят.

Количественное определение вектора электрического смещения

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\vec{e}$$

Преимущества от введения вектора $\vec{D}$ выясняются при рассмотрении поля в неоднородных средах. При переходе из среды, имеющей одну диэлектрическую проницаемость, в среду с другой проницаемостью число силовых линий вектора $\vec{E}$ будет меняться.

Второе материальное уравнение определяет связь между векторами магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_a} = \frac{\vec{B}}{\mu_a \cdot \mu}$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – универсальная магнитная постоянная

Вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ характеризует связь электрического тока с собственным магнитным полем. Вокруг провода с током создается магнитное поле, замкнутые линии которого окружают этот провод. Количественное определение вектора напряженности магнитного поля $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$

$\vec{e}_\varphi$ - орт в правой цилиндрической системе координат, у которой ось z совпадает с направлением тока.

Третье материальное уравнение определяет связь между вектором плотности тока проводимости и вектором напряженности электрического поля

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

σ - удельная проводимость среды [Сим/м].

При постоянной проводимости среды это уравнение выражает закон Ома в дифференциальной форме.

Удельная электрическая проводимость металлов имеет весьма высокое численное значение (порядка 10^7 Сим/м) и практически не меняется с частотой. В то же время во всех проводниках отмечается сильная зависимость проводимости от температуры.

Рассмотренные величины ЭМП поля сведены в таблицу.

Тема 3. Основы теории ЭМП

Название величины	Обозначение	Единица измерения
Заряд	q	Кулон [Кл]
Магнитная индукция	B	Вебер на квадратный метр [Вб/м2] или Тесла [Т]
Напряженность магнитного поля	H	Ампер на метр [А/м]
Напряженность электрического поля	E	Вольт на метр [В/м]
Плотность заряда	ρ	Кулон на кубический метр [Кл/м^3]
Плотность тока	j	Ампер на квадратный метр [А/м^2]
Ток	I	Ампер [А]
Электрическое смещение	D	Кулон на квадратный метр [Кл/м^2]
Удельная проводимость среды	σ	Сименс на метр [Сим/м]

Тангенс угла диэлектрических потерь

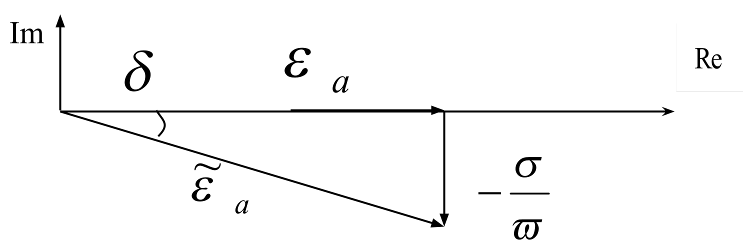
Свойства неметаллических сред определяет комплексная диэлектрическая проницаемость среды $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - i\sigma/\omega$. Ее мнимая часть характеризует потери в среде. Это выражение можно переписать так:

$$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a \left(1 - i \cdot tg\delta\right)$$

где $tg\delta = \sigma / (\omega \cdot \varepsilon_a)$ - *тангенс угла диэлектрических потерь*.

Потери энергии на тепло пропорциональны величине $tg\delta$ среды.

Графическое представление комплексной диэлектрической проницаемости среды и угла диэлектрических потерь (рисунок).



Среда: проводник, диэлектрик или полупроводник?

Это зависит от соотношения значений вещественной ε_a и мнимой части $\frac{\sigma}{\omega}$ комплексной диэлектрической проницаемости среды.

Среда – *проводник*, если $\sigma >> \varepsilon_a \cdot \omega$ или – диэлектрик, если $\sigma << \varepsilon_a \cdot \omega$.

Частота, при которой амплитуды токов проводимости и смещения равны, есть граничная частота

$$\omega_{гр} = \frac{\sigma}{\varepsilon_a}$$

На высоких частотах $\omega >> \omega_{гр}$ в среде преобладающую роль играют токи смещения. Такую среду можно рассматривать как *диэлектрик*.

Для низких частот $\omega << \omega_{гр}$ в среде преобладающую роль играют токи проводимости, т.е. среду можно рассматривать как *проводник*.

Электромагнитная классификация сред

Свойства среды характеризуются параметрами ε_a , μ_a , σ . В зависимости от свойств этих параметров различают следующие среды:

1) однородные и неоднородные;

2) линейные и нелинейные;

3) изотропные и анизотропные.

В изотропных средах параметры сред – скалярные величины. Для описания анизотропных сред параметры сред - тензоры. Тензоры записываются в виде матрицы. Например, в кристаллическом диэлектрике тензором является диэлектрическая проницаемость

$$\|\varepsilon_a\| = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{xx}\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx}\varepsilon_{zy}\varepsilon_{zz} \end{Vmatrix}$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Уравнения Максвелла – это математическая формулировка макроскопической теории электромагнитного поля на фундаментальных законах природы – законах электромагнетизма. Уравнения Максвелла - это обобщение законов электромагнетизма.

Закон Ампера - связывает плотность тока проводимости и напряженность магнитного поля. Получен экспериментально Ампером для постоянного тока и не пригоден для переменного тока. В современной математической форме он имеет такой вид:

$$rot\vec{H} = \vec{j}$$

Это *1-е уравнение Максвелла* в дифференциальной форме для постоянного тока.

Закон электромагнитной индукции Фарадея связывает индукцию переменного магнитного поля и напряженность электрического поля:

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Это 2-*е уравнение Максвелла* в дифференциальной форме, определяет закон электромагнитной индукции Фарадея. Согласно второму уравнению Максвелла, электрическое поле, созданное меняющимся во времени магнитным полем, имеет вихревой характер. Вихрем электрического поля является скорость изменения во времени вектора магнитной индукции, взятая с обратным знаком.

2-е уравнение Максвелла в декартовой системе координат имеет вид

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z\right)$$

Данная запись эквивалентна следующим трем скалярным уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = +\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

2-е уравнение Максвелла устанавливает зависимость между изменением напряженности магнитного поля во времени и изменением электрического поля в пространстве.

3-е уравнение Максвелла определяет: источниками электрического поля являются заряды

$$div\vec{D} = \rho$$

где ρ - объемная плотность заряда [Кл/м^3];
div - дивергенция, операция векторного анализа.
Уравнение в декартовой системе координат запишется в виде

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

Физическое содержание 3-го уравнения Максвелла: электрическое поле может иметь истоки. Истоками электрического поля являются электрические заряды.
4-е уравнение Максвелла. Тот факт, что силовые линии магнитного поля всегда замкнуты, аналитически записывается так

$$div\vec{B} = 0$$

Суть 4-го уравнения Максвелла заключается в том, что магнитное поле не имеет истоков, т.е. в природе свободные магнитные заряды отсутствуют.

Уравнение непрерывности. Это уравнение дополняет уравнения Максвелла. Это математическое выражение фундаментального закона природы - закона сохранения заряда (количества электричества).

Максвелл обратил внимание, что записанное выше 1-е уравнение «не работает» для переменных полей. Он предложил дополнить правую часть этого уравнения вторым слагаемым, которое определяет *плотность тока смещения*. В результате 1-е уравнение Максвелла запишется в виде

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

$$div\, rot\vec{H} = div\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + div\,\vec{j} \qquad div\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\right) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial t} div\vec{D} = -div\vec{j} \qquad div\vec{D} = \rho \qquad div\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Ток смещения (второе слагаемое) дополняет ток проводимости до замкнутости в цепи переменного тока, т.е. *ток непрерывен*.

Из уравнения непрерывности видно, что, во-первых, если ток отсутствует, то заряд постоянен, а во-вторых, если не происходит изменения заряда, то ток проводимости равен нулю.

Физический смысл предложения Максвелла сводится к тому, что *ток смещения образует магнитное поле наравне с током проводимости.*

Теперь система уравнений Максвелла распространяется *на переменные поля* и имеет следующий вид:

$$rot\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

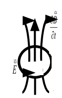
$$div\vec{D} = \rho$$

$$div\vec{B} = 0$$

Это *уравнения Максвелла в дифференциальной форме* для переменных во времени полей. Физический смысл уравнений следующий.

***1-е уравнение*.** Переменное в пространстве магнитное поле создается как током проводимости, так и током смещения. Замкнутые силовые линии охватывают собой ток, который может быть либо током проводимости, либо током смещения, либо их суммой. Замкнутые магнитные силовые линии образуют с вектором тока правовинтовую систему (рисунок).

2-е *уравнение.* *П*еременное в пространстве ЭП создается переменным во времени магнитным полем. Линии вектора $\vec{E}$ и вектора $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ образуют левовинтовую систему (рисунок).



3-е уравнение. *И*сточником электрического поля являются электрические заряды.

4-е уравнение. *С*иловые линии магнитного поля всегда замкнуты сами на себя. Непрерывность магнитных силовых линий соответствует отсутствию в природе магнитных зарядов.

Тема 3. Основы теории ЭМП. Слайд 18

Уравнения Максвелла в интегральной форме

1-е уравнение Максвелла. К интегральной форме первого уравнения можно перейти путем интегрирования по поверхности S обеих частей 1-го уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

Теорема Стокса (векторный анализ): для произвольной поверхности *S* с контуром *l* (рисунок).

$$\int_S rot\vec{A}\,d\vec{S} = \oint_l \vec{A}\,d\vec{l}.$$

Исходное 1-е уравнение $rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Проинтегрируем обе его части по площади S и

применим теорему Стокса к левой части уравнения. Имеем 1-е уравнение Максвелла в

интегральной форме:

$$\oint_l \vec{H}d\vec{l} = \int_S \vec{j}\,d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,d\vec{S}$$

Магнитные силовые линии всегда сцеплены с полным током (охватывают ток).

2-е уравнение. Исходное уравнение $rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Выделим поверхность *S* с контуром и найдем путем интегрирования поток вектора через нее:

$$\int_S rot\,\vec{E}d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

К левой части равенства применим теорему Стокса. В результате получим:
.

$$\oint_l \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}d\vec{S}.$$

Это 2-е *уравнение Максвелла в интегральной форме* (закон электромагнитной индукции Фарадея). Уравнение связывает циркуляцию вектора напряженности электрического поля по произвольной замкнутой поверхности *S*, охватываемой контуром *l*, с магнитным потоком, пронизывающим этот контур, т.е. с интегралом от вектора $\vec{B}$, взятым по поверхности *S*.

Всякое изменение магнитного поля во времени непременно вызывает (независимо от параметров среды) появление электрического поля.

3-е уравнение. Это уравнение получим из соответствующего уравнения в дифференциальной форме $div\,\vec{D} = \rho,$ где ρ - объемная плотность заряда.

Проинтегрируем обе части этого уравнения по объему V:

.

$$\int_V div\,\vec{D}\,dV = \int_V \rho\, dV$$

Формула Остроградского-Гаусса справедлива для любого вектора $\vec{A}$

$$\int_V div\,\vec{A}\,dV = \oint_S \vec{A}\,d\vec{S}$$

Применим формулу Остроградского – Гаусса, получим 3-е уравнение:

$$\oint_S \vec{D}\,d\vec{s} = Q$$

Здесь $Q = \int_V \rho\, dV$ - заряд в объеме *V*.

Поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность , ограничивающую объем V, равен сумме зарядов, имеющихся в объеме , заключенном внутри указанной поверхности.

4-е уравнение. В качестве исходного уравнения используется 4-е уравнение Максвелла в дифференциальной форме

$$div\vec{B} = 0$$

.

После интегрирования обеих частей равенства и применения формулы Остроградского - Гаусса, имеем

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Это интегральная форма 4-го уравнения Максвелла, это закон неразрывности магнитных силовых линий. Число силовых линий $\vec{B}$, входящих в объем через замкнутую поверхность , всегда равно числу выходящих силовых линий. Таким образом, это свидетельствует об отсутствии в природе магнитных зарядов.

Уравнения Максвелла для монохроматического поля. Принцип перестановочной двойственности

Пусть все величины, входящие в уравнения Максвелла, изменяются во времени по гармоническому закону и описываются с помощью комплексных векторов. Например,

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \dot{\vec{E}}(x,y,z)\cdot e^{i\omega t}$$

$$\vec{E}(t) = \dot{\vec{E}}\cdot e^{i\omega t}$$

, где $\dot{\vec{E}}$ – комплексная амплитуда поля.

$$rot\left(\dot{\vec{H}}\cdot e^{i\omega t}\right) = \dot{\vec{j}}\cdot e^{i\omega t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\vec{D}}\cdot e^{i\omega t}\right)$$

Продифференцируем комплексную величину по времени (т.е. умножим на $i\omega$) и сократим обе части равенства на $e^{i\omega t}$. Тогда имеем равенство

$$rot\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{j}} + i\omega\dot{\vec{D}} \qquad \dot{\vec{j}} = \sigma\dot{\vec{E}} \qquad \dot{\vec{D}} = \varepsilon_a\dot{\vec{E}}$$

1-е уравнение Максвелла для монохроматического поля:

$$rot\dot{\vec{H}} = \sigma\dot{\vec{E}} + i\omega\varepsilon_a\dot{\vec{E}} = i\omega\left(\varepsilon_a - i\,\sigma/\omega\right)\dot{\vec{E}} = i\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\vec{E}}$$

Полная *система уравнений Максвелла для монохроматического поля* запишется следующим образом:

$$\begin{cases} rot\vec{H} = i\omega\tilde{\varepsilon}_a\vec{E} \\ rot\vec{E} = -i\omega\tilde{\mu}_a\vec{H} \\ div\left(\tilde{\varepsilon}_a\vec{E}\right) = 0 \\ div\left(\tilde{\mu}_a\vec{H}\right) = 0 \end{cases}$$

Сравнивая системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме (МДФ) и для систему уравнений Максвелла для монохромата (ММ), отметим следующее:

1) система уравнений МДФ пригодна для полей с произвольной зависимостью от времени, а система ММ - только для гармонических полей;

2) в системе уравнений ММ зависимость от времени отсутствует;

3) система ММ переходит сама в себя при взаимной перестановке величин:

$$\vec{H} \leftrightarrow \vec{E}; \qquad \tilde{\varepsilon}_a \to -\tilde{\mu}_a; \qquad \tilde{\mu}_a \to -\tilde{\varepsilon}_a$$

Таким образом, система уравнений Максвелла для монохроматического поля удовлетворяет *принципу перестановочной двойственности,* который позволяет обеспечить решение многих практических задач электродинамики.

Волновые уравнения. Это такие дифференциальные уравнения второго порядка,

которые описывают распространение электромагнитных колебаний в среде.

Первые два уравнения Максвелла для монохроматического поля без источников:

$$\begin{cases} rot\dot{H} = i\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{E} \\ rot\dot{E} = -i\omega\tilde{\mu}_a\dot{H} \end{cases}$$

Возьмем операцию *rot* от обеих частей этих уравнений и воспользуемся тождествами

векторного анализа. После ряда преобразований получим систему уравнений для

монохроматического поля: $\begin{cases} \nabla^2\dot{H} + k^2\dot{H} = 0 \\ \nabla^2\dot{E} + k^2\dot{E} = 0 \end{cases}$ где $k = \omega \cdot \sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \cdot \tilde{\mu}_a}$ - комплексное

волновое число;

∇^2 - оператор Лапласа («лапласиан»), равный $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Записанные уравнения известны, как *однородные уравнения Гельмгольца или однородные волновые уравнения.* Уравнения Гельмгольца описывают

распространение электромагнитных волн в пространстве.

$\vec{H}$

В декартовой системе координат волновые уравнения для составляющих ЭМ поля по осям x, y, z имеют одинаковую форму. Например, однородные уравнения для случая распространения поля вдоль оси z:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{H}_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{H}_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{H}_z}{\partial z^2} + k^2 \vec{H}_z = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \vec{E}_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{E}_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{E}_z}{\partial z^2} + k^2 \vec{E}_z = 0 \end{cases}$$

При наличии сторонних электрических зарядов или сторонних магнитных токов используются *неоднородные* волновые уравнения, в которых правая часть не равна нулю.

Замечания:

- волновые уравнения эквивалентны уравнениям Максвелла;
- уравнения для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ идентичны по форме. Поэтому общее решение для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ будут также одинаковыми. Достаточно решить одно из них;
- применение волновых уравнений вместо уравнений Максвелла позволяет значительно сократить процесс нахождения составляющих поля.

Тема 3. Основы теории ЭМП. Слайд 26

Классификация электромагнитных полей.

ЭМ поля можно классифицировать следующим образом.

По характеру их зависимости от времени:

1.1) статическое поле - это неизменное во времени поле и поле без токов. Для данного случая система уравнений Максвелла распадается на две независимые системы:

а) электростатическое поле,

б) магнитостатическое поле

1.2) квазистационарное поле (процессы происходят достаточно медленно);

1.3) нестационарное поле, т.е. поле быстро изменяется во времени (описывается всей системой уравнений Максвелла).

2. *По характеру распределения силовых линий поля в пространстве:*

2.1) соленоидальное поле (силовые линии замкнуты сами на себя, т.е. не имеют начала и конца. Математически замкнутость силовых линий выражается тем, что дивергенция от вектора равна нулю);

2.2) потенциальное поле (силовые линии этого поля не замкнуты сами на себя. его ротор равен нулю). Примером такого поля является электростатическое поле.