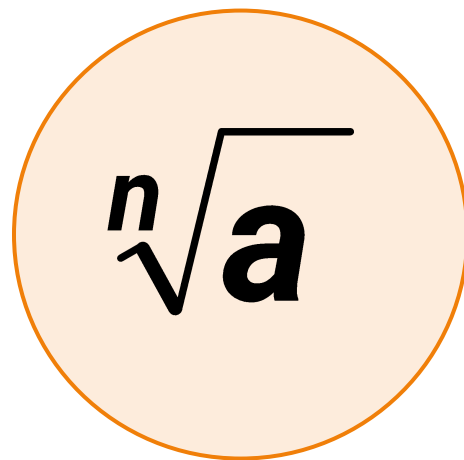


Корень n -ой степени


$$\sqrt[n]{a}$$

Понятие корня n -ой степени

Корнем n -ой степени из неотрицательного числа a ($n = 2, 3, 4, 5, \dots$) называют такое неотрицательное число, при возведении которого в степень n получается число a .

$$\sqrt[n]{a} = b, \quad b^n = a, \quad \text{где } a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1$$

Число a называют *подкоренным числом*,
а число n – *показателем корня*

Примеры

$$1) \quad \sqrt[3]{27} = 3;$$

$$3^3 = 27$$

$$2) \quad \sqrt[4]{256} = 4;$$

$$4^4 = 256$$

$$3) \quad \sqrt[5]{0,00243} = 0,3;$$

$$0,3^5 = 0,00243$$

$$4) \quad \sqrt[3]{1000000} = 100; \quad 100^3 = 1000000$$

$$5) \quad \sqrt[3]{64000} = 40; \quad 40^3 = 64000$$

$$6) \quad \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

Свойства корня n -ой степени

(для $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$)

$$1^\circ \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad \text{где } a \geq 0, b \geq 0$$

$$1) \quad \sqrt[4]{16 \cdot 625} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{625} = 2 \cdot 5 = 10;$$

$$2) \quad \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4 \cdot 16} = \sqrt[3]{64} = 4;$$

$$2^\circ \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \text{где } a \geq 0, b > 0$$

$$3) \quad \sqrt[5]{7 \frac{19}{32}} = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{3}{2} = 1,5;$$

$$4) \quad \frac{\sqrt[6]{256}}{\sqrt[6]{4}} = \sqrt[6]{\frac{256}{4}} = \sqrt[6]{64} = 2;$$

Свойства корня n -ой степени

(для $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$)

$$3^\circ \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}, \quad \text{где } a \geq 0$$

$$5) \quad \left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16};$$

$$6) \quad \sqrt[5]{81} = \sqrt[5]{3^4} = \left(\sqrt[5]{3}\right)^4;$$

$$4^\circ \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, \quad \text{где } a \geq 0$$

$$7) \quad \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[6]{729} = 3;$$

$$8) \quad \sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{15}}} = \sqrt[15]{a^{15}} = a;$$

Свойства корня n -ой степени

(для $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$)

$$5^\circ \quad \sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}, \quad \text{где } a \geq 0$$

$$9) \quad \sqrt[12]{a^9} = \sqrt[4]{a^3};$$

$$10) \quad \sqrt{c} \cdot \sqrt[3]{c} = \sqrt[6]{c^3} \cdot \sqrt[6]{c^2} = \sqrt[6]{c^3 \cdot c^2} = \sqrt[6]{c^5};$$

$$6^\circ \quad \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & n - \text{четно} \\ a, & n - \text{нечетно} \end{cases}$$

$$11) \quad \sqrt[8]{(-3,25)^8} = |-3,25| = 3,25;$$

$$12) \quad \sqrt[11]{T^{11}} = T;$$

Свойства корня n -ой степени

(для $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$)

$$7^\circ \quad \sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}, \quad n \text{ — нечетно}$$

$$13) \quad \sqrt[7]{-128} = -\sqrt[7]{128} = -2;$$

$$14) \quad \sqrt[3]{-0,000125} = -\sqrt[3]{0,000125} = -0,05;$$

$$8^\circ \quad a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}, \quad \text{где } a \geq 0$$

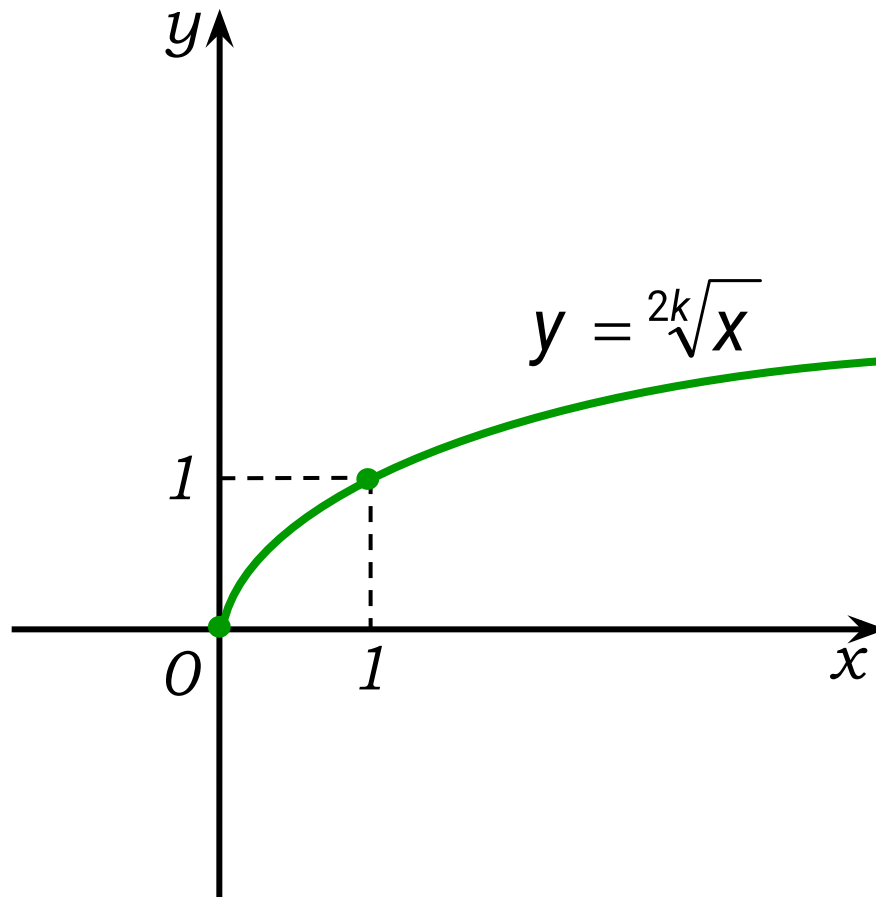
см. далее

Функции вида $y = \sqrt[n]{x}$

Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, n – чётное число

1. $D(y) = [0; +\infty)$.
2. $E(y) = [0; +\infty)$.
3. Функция ни чётная, ни нечётная.
4. а) Нули функции: $(0; 0)$.
б) Точка пересечения с Oy : $(0; 0)$.
5. $[0; +\infty)$ – промежуток возрастания функции;
6. Ограничена снизу, не ограничена сверху.
7. а) $y_{\text{наим.}} = 0$;
б) $y_{\text{наиб.}}$ – не существует.
8. Непрерывна на множестве $[0; +\infty)$.
9. Выпукла вверх.

Функции вида $y = \sqrt[n]{x}$,
 $n = 2k$ – чётное число

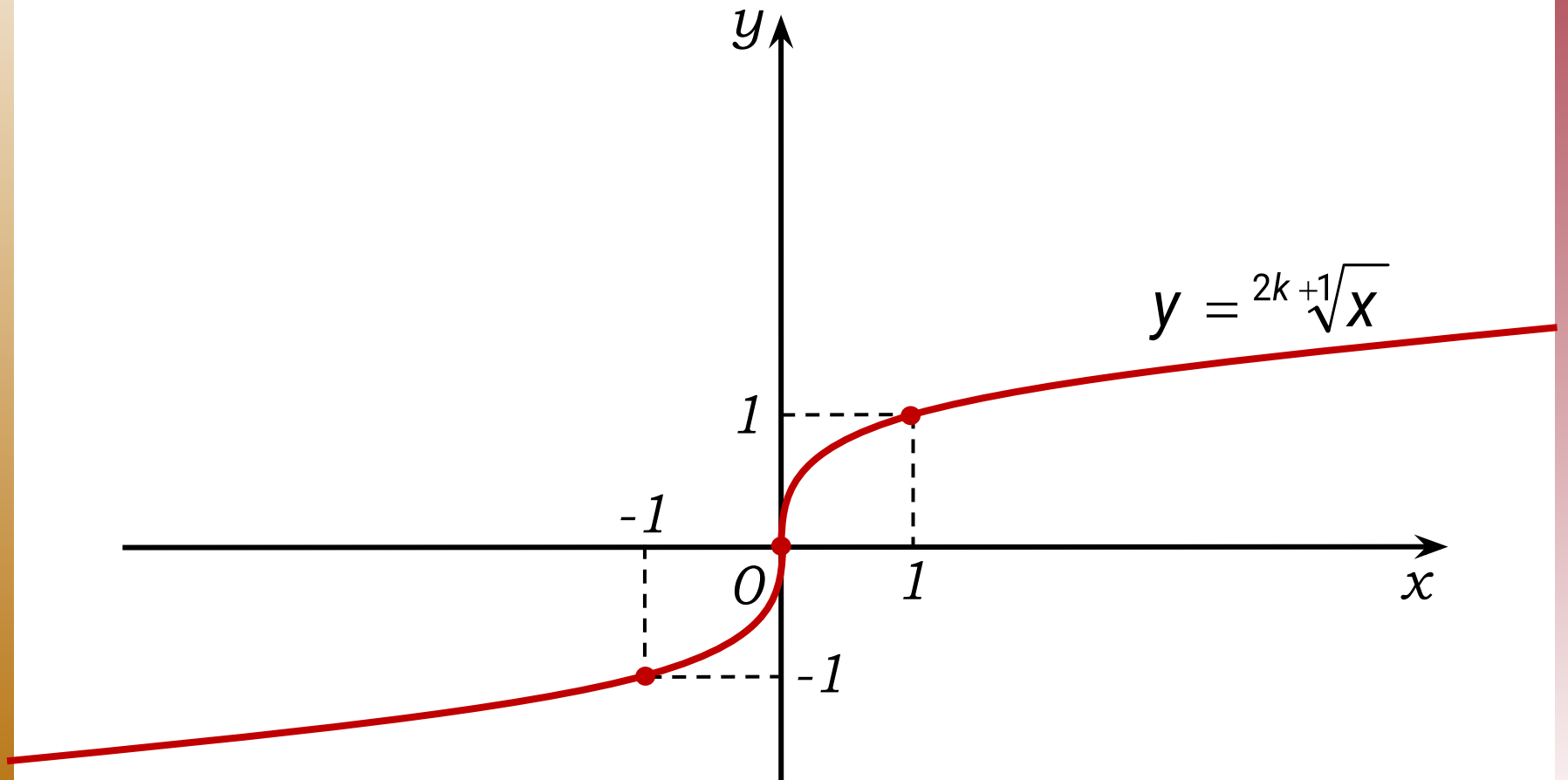


Функции вида $y = \sqrt[n]{x}$

Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, n – нечётное число

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
3. Функция нечётная.
4. а) Нули функции: $(0; 0)$.
б) Точка пересечения с Oy : $(0; 0)$.
5. $(-\infty; +\infty)$ – промежуток возрастания функции;
6. Не ограничена снизу, не ограничена сверху.
7. а) $y_{\text{наим.}}$ – не существует;
б) $y_{\text{наиб.}}$ – не существует.
8. Непрерывна на множестве $(-\infty; +\infty)$.

Функции вида $y = \sqrt[n]{x}$,
 $n = 2k + 1$ – нечётное число



Вычисление производной

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$\left(\sqrt[n]{x^k}\right)' = \left(x^{\frac{k}{n}}\right)' = \frac{k}{n}x^{\frac{k}{n}-1} = \frac{k}{n}x^{\frac{k-n}{n}} = \frac{k}{n}\sqrt[n]{x^{k-n}} = \frac{k}{n\sqrt[n]{x^{n-k}}}$$

$$\left(\sqrt[n]{kx+b}\right)' = \left((kx+b)^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{k}{n}\sqrt[n]{(kx+b)^{1-n}} = \frac{k}{n\sqrt[n]{(kx+b)^{n-1}}}$$

Вычисление производной

Примеры

$$1) \left(\sqrt[3]{x} \right)' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{x^{-2}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}$$

$$2) \left(\sqrt[7]{x^2} \right)' = \frac{2}{7} \sqrt[7]{x^{-5}} = \frac{2}{7 \sqrt[7]{x^5}}$$

$$3) \left(\sqrt[4]{5x-7} \right)' = \frac{5}{4} \sqrt[4]{(5x-7)^{-3}} = \frac{5}{4 \sqrt[4]{(5x-7)^3}}$$

$$4) \left(\sqrt[6]{(7x+4)^5} \right)' = \frac{35}{6} \sqrt[6]{(7x+4)^{-1}} = \frac{35}{6 \sqrt[6]{7x+4}}$$

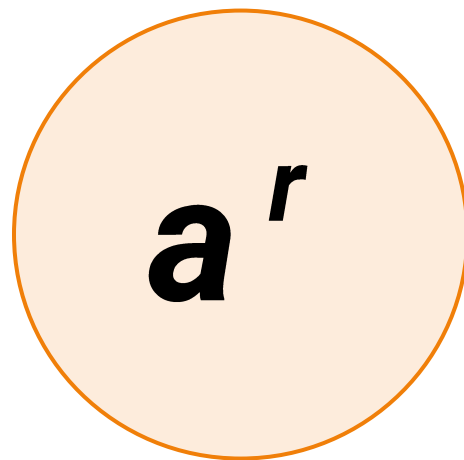
Формула сложного радикала

$$\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} = \sqrt{a + \sqrt{b}}$$

Примеры

МБОУ СОШ №5 – «Школа здоровья и развития» г. Радужный

Степень с рациональным показателем


$$a^r$$

Учитель математики Е.Ю. Семёнова

Понятие степени с рациональным показателем

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \quad \text{где } a \geq 0, q \in \mathbb{N}, q \neq 1, p \in \mathbb{Z}$$

Примеры

$$1) \quad 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

$$2) \quad 12^{1,4} = 12^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{12^7}$$

$$3) \quad \left(\frac{4}{9}\right)^{-2\frac{2}{5}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)^{-12}} = \sqrt[5]{\left(\frac{9}{4}\right)^{12}}$$

Свойства степени с рациональным показателем (для $n \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{Q}$)

$$1^\circ a^0 = 1, \text{ где } a \neq 0$$

$$2^\circ a^1 = a$$

$$3^\circ a^{-1} = \frac{1}{a}, \text{ где } a \neq 0$$

$$4^\circ a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ где } a \neq 0$$

$$5^\circ a^n \cdot a^k = a^{n+k}$$

$$6^\circ \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}, \text{ где } a \neq 0$$

$$7^\circ (a^n)^k = a^{nk}$$

$$8^\circ a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$9^\circ \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \text{ где } b \neq 0$$

$$10^\circ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \text{ где } a \neq 0, b \neq 0$$

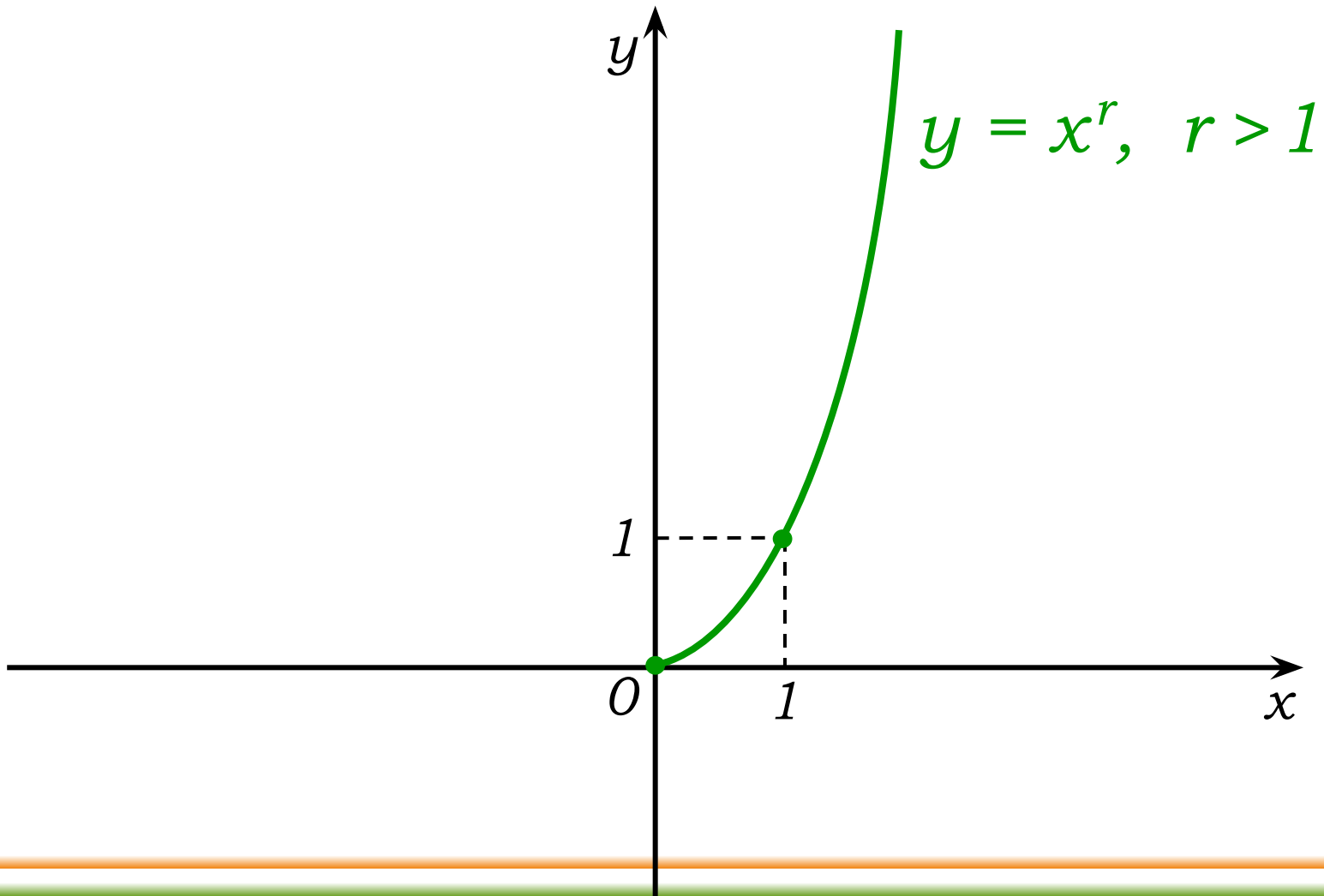
Степенные функции $y = x^r$

Свойства функции $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, $r > 1$

1. $D(y) = [0; +\infty)$.
2. $E(y) = [0; +\infty)$.
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4. а) Нули функции: $(0; 0)$.
б) Точка пересечения с Oy : $(0; 0)$.
5. $[0; +\infty)$ – промежуток возрастания функции;
6. Ограничена снизу, не ограничена сверху.
7. а) $y_{\text{наим.}} = 0$;
б) $y_{\text{наиб.}}$ – не существует.
8. Непрерывна на множестве $[0; +\infty)$.
9. Выпукла вниз.

Степенные функции $y = x^r$

График функции $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, $r > 1$



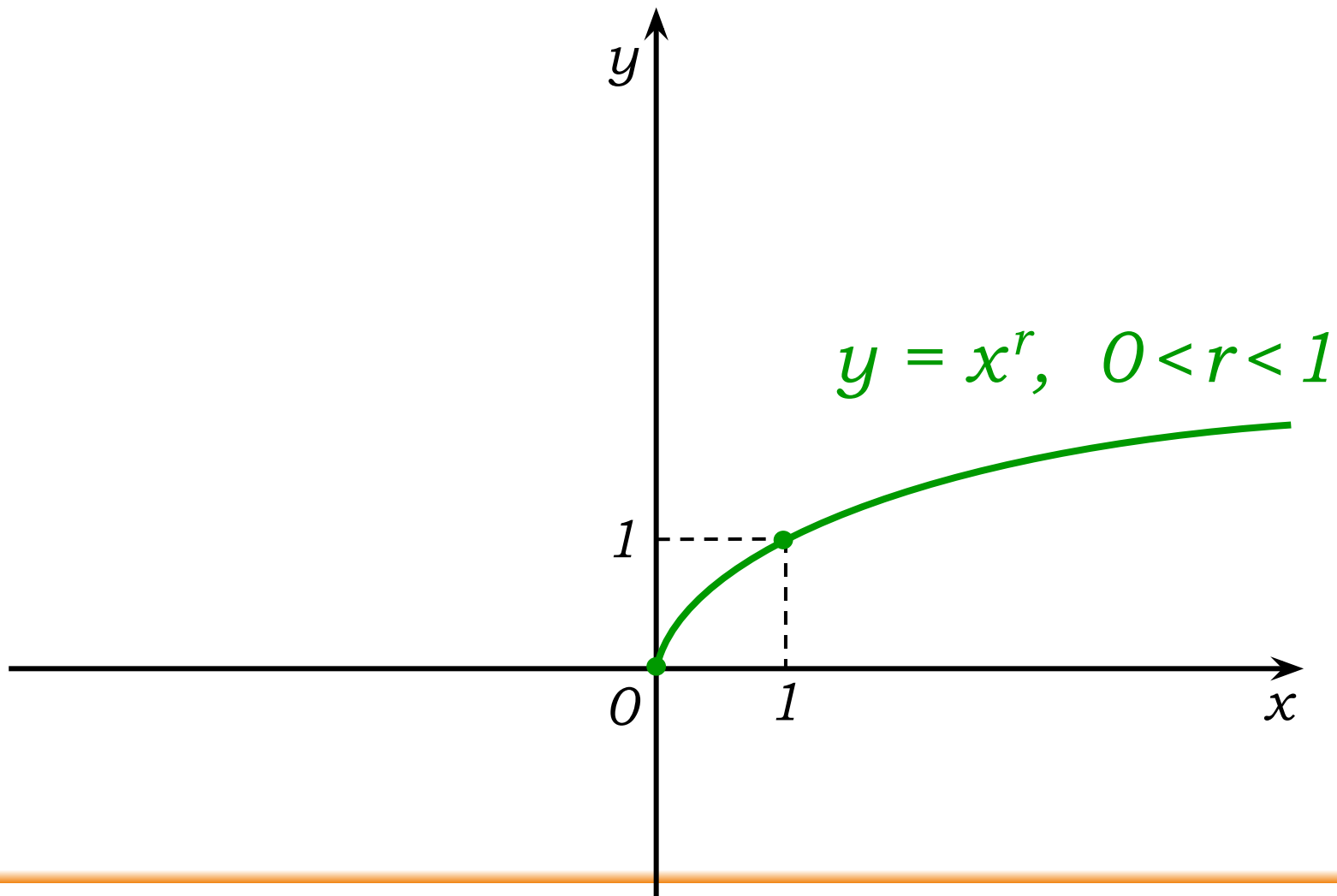
Степенные функции $y = x^r$

Свойства функции $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < 1$

1. $D(y) = [0; +\infty)$.
2. $E(y) = [0; +\infty)$.
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4. а) Нули функции: $(0; 0)$.
б) Точка пересечения с Oy : $(0; 0)$.
5. $[0; +\infty)$ – промежуток возрастания функции;
6. Ограничена снизу, не ограничена сверху.
7. а) $\text{унаим.} = 0$;
б) унаиб. – не существует.
8. Непрерывна на множестве $[0; +\infty)$.
9. Выпукла вверх.

Степенные функции $y = x^r$

График функции $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < 1$



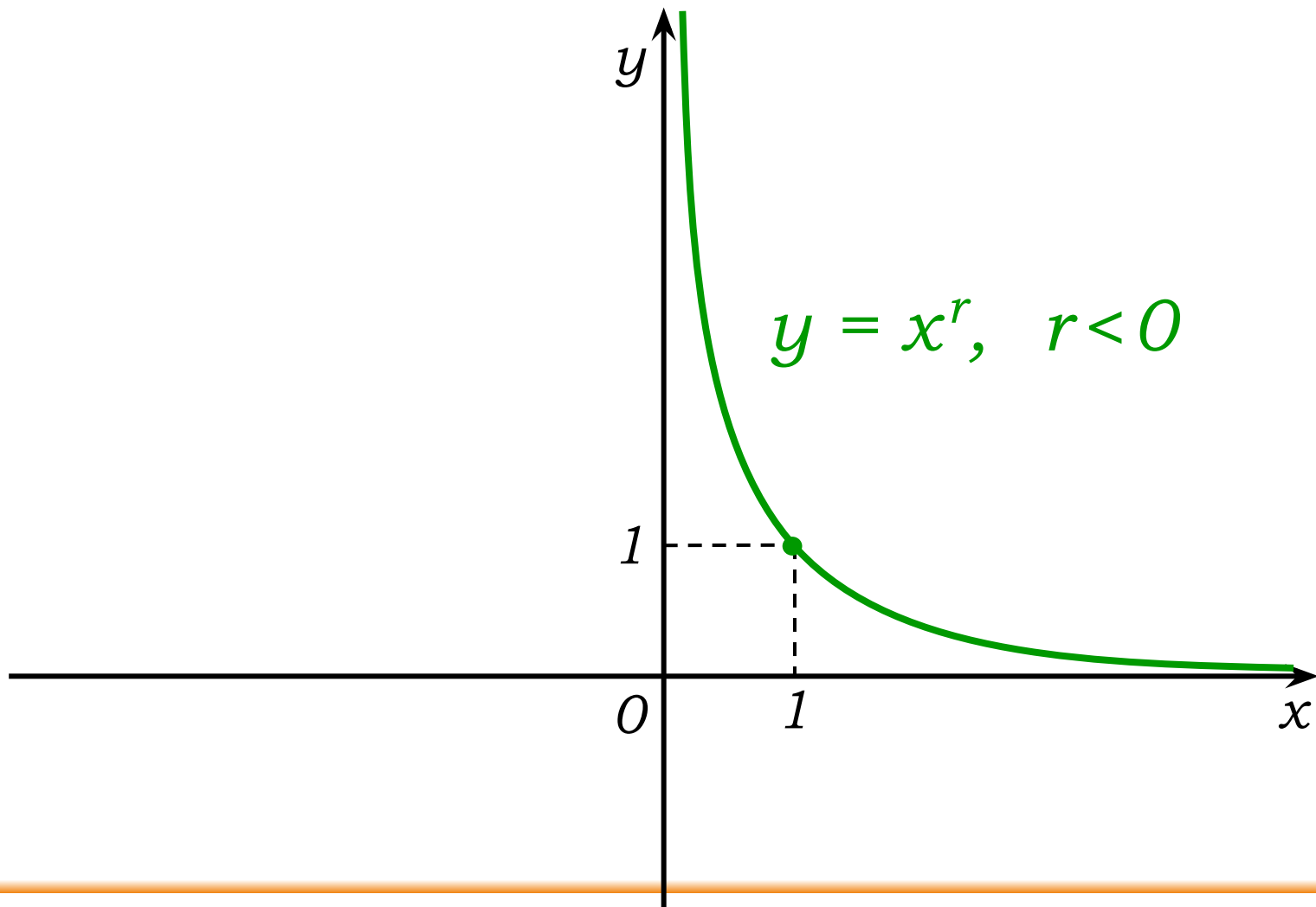
Степенные функции $y = x^r$

Свойства функции $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, $r < 0$

1. $D(y) = (0; +\infty)$.
2. $E(y) = (0; +\infty)$.
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4. а) Нули функции: нет.
б) Точка пересечения с Oy : нет.
5. $(0; +\infty)$ – промежуток убывания функции;
6. Ограничена снизу, не ограничена сверху.
7. а) $y_{\text{наим.}}$ – не существует;
б) $y_{\text{наиб.}}$ – не существует.
8. Непрерывна на множестве $[0; +\infty)$.
9. Выпукла вниз.

Степенные функции $y = x^r$

График функции $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, $r < 0$



Задания открытого банка задач

1. Найдите значение выражения $\sqrt{65^2 - 56^2}$.

Решение.

$$\sqrt{65^2 - 56^2} = \sqrt{(65 - 56)(65 + 56)} = \sqrt{9 \cdot 121} = 3 \cdot 11 = 33.$$

2. Найдите значение выражения $\frac{(2\sqrt{7})^2}{14}$.

Решение.

$$\frac{(2\sqrt{7})^2}{14} = \frac{4 \cdot 7}{14} = \frac{28}{14} = 2.$$

3. Найдите значение выражения $(\sqrt{13} - \sqrt{7})(\sqrt{13} + \sqrt{7})$.

Решение.

$$(\sqrt{13} - \sqrt{7})(\sqrt{13} + \sqrt{7}) = \sqrt{13}^2 - \sqrt{7}^2 = 13 - 7 = 6.$$

Задания открытого банка задач

4. Найдите значение выражения $5^{0,36} \cdot 25^{0,32}$.

Решение.

$$5^{0,36} \cdot 25^{0,32} = 5^{0,36} \cdot (5^2)^{0,32} = 5^{0,36} \cdot 5^{0,64} = 5^{0,36+0,64} = 5^1 = 5.$$

5. Найдите значение выражения $\frac{3^{6,5}}{9^{2,25}}$.

Решение.

$$\frac{3^{6,5}}{9^{2,25}} = \frac{3^{6,5}}{(3^2)^{2,25}} = \frac{3^{6,5}}{3^{4,5}} = 3^{6,5-4,5} = 3^2 = 9.$$

6. Найдите значение выражения $7^{\frac{4}{9}} \cdot 49^{\frac{5}{18}}$.

Решение.

$$7^{\frac{4}{9}} \cdot 49^{\frac{5}{18}} = 7^{\frac{4}{9}} \cdot (7^2)^{\frac{5}{18}} = 7^{\frac{4}{9}} \cdot 7^{\frac{5}{9}} = 7^{\frac{4}{9} + \frac{5}{9}} = 7^{\frac{9}{9}} = 7^1 = 7.$$

Задания открытого банка задач

7. Найдите значение выражения $\frac{2^{3,5} \cdot 3^{5,5}}{6^{4,5}}$.

Решение.

$$\frac{2^{3,5} \cdot 3^{5,5}}{6^{4,5}} = \frac{2^{3,5} \cdot 3^{5,5}}{(2 \cdot 3)^{4,5}} = \frac{2^{3,5} \cdot 3^{5,5}}{2^{4,5} \cdot 3^{4,5}} = 2^{3,5-4,5} \cdot 3^{5,5-4,5} = 2^{-1} \cdot 3^1 = \frac{3}{2} = 1,5.$$

8. Найдите значение выражения $35^{-4,7} \cdot 7^{5,7} : 5^{-3,7}$.

Решение.

$$\begin{aligned} 35^{-4,7} \cdot 7^{5,7} : 5^{-3,7} &= (5 \cdot 7)^{-4,7} \cdot 7^{5,7} \cdot 5^{3,7} = 5^{-4,7} \cdot 7^{-4,7} \cdot 7^{5,7} \cdot 5^{3,7} = \\ &= 5^{-4,7+3,7} \cdot 7^{-4,7+5,7} = 5^{-1} \cdot 7^1 = \frac{7}{5} = 1,4. \end{aligned}$$

9. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{2,8} \cdot \sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{2,8} \cdot \sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}} = \sqrt{\frac{2,8 \cdot 4,2}{0,24}} = \sqrt{\frac{28 \cdot 42}{24}} = \sqrt{49} = 7.$$

Задания открытого банка задач

10. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}} - \sqrt{1\frac{5}{7}}\right) : \sqrt{\frac{3}{28}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{3\frac{6}{7}} - \sqrt{1\frac{5}{7}}\right) : \sqrt{\frac{3}{28}} = \left(\sqrt{\frac{27}{7}} - \sqrt{\frac{12}{7}}\right) : \sqrt{\frac{3}{28}} = \left(\sqrt{\frac{27}{7}} - \sqrt{\frac{12}{7}}\right) \cdot \sqrt{\frac{28}{3}} = \\ & = \sqrt{\frac{27}{7}} \cdot \sqrt{\frac{28}{3}} - \sqrt{\frac{12}{7}} \cdot \sqrt{\frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{27 \cdot 28}{7 \cdot 3}} - \sqrt{\frac{12 \cdot 28}{7 \cdot 3}} = \sqrt{9 \cdot 4} - \sqrt{4 \cdot 4} = 6 - 4 = 2. \end{aligned}$$

11. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[9]{7} \cdot \sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt[9]{7} \cdot \sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}} = \frac{\sqrt[18]{7^2} \cdot \sqrt[18]{7}}{\sqrt[18]{7^3}} = \sqrt[18]{\frac{7^2 \cdot 7}{7^3}} = \sqrt[18]{\frac{7^3}{7^3}} = \sqrt[18]{1} = 1.$$

Задания открытого банка задач

12. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[5]{10} \cdot \sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt[5]{10} \cdot \sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}} = \sqrt[5]{\frac{10 \cdot 16}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

13. Найдите значение выражения $\left(\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{2}}\right)^2$.

Решение.

$$\left(\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{2}}\right)^2 = \left(\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{12}}}\right)^2 = \left(2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}}\right)^2 = \left(2^{\frac{4+3-1}{12}}\right)^2 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2.$$

Использованы ресурсы

- *Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2008.*
- <http://mathege.ru/or/ege/Main.html> - открытый банк заданий ЕГЭ по математике (профильный уровень)