Производна

Содержание

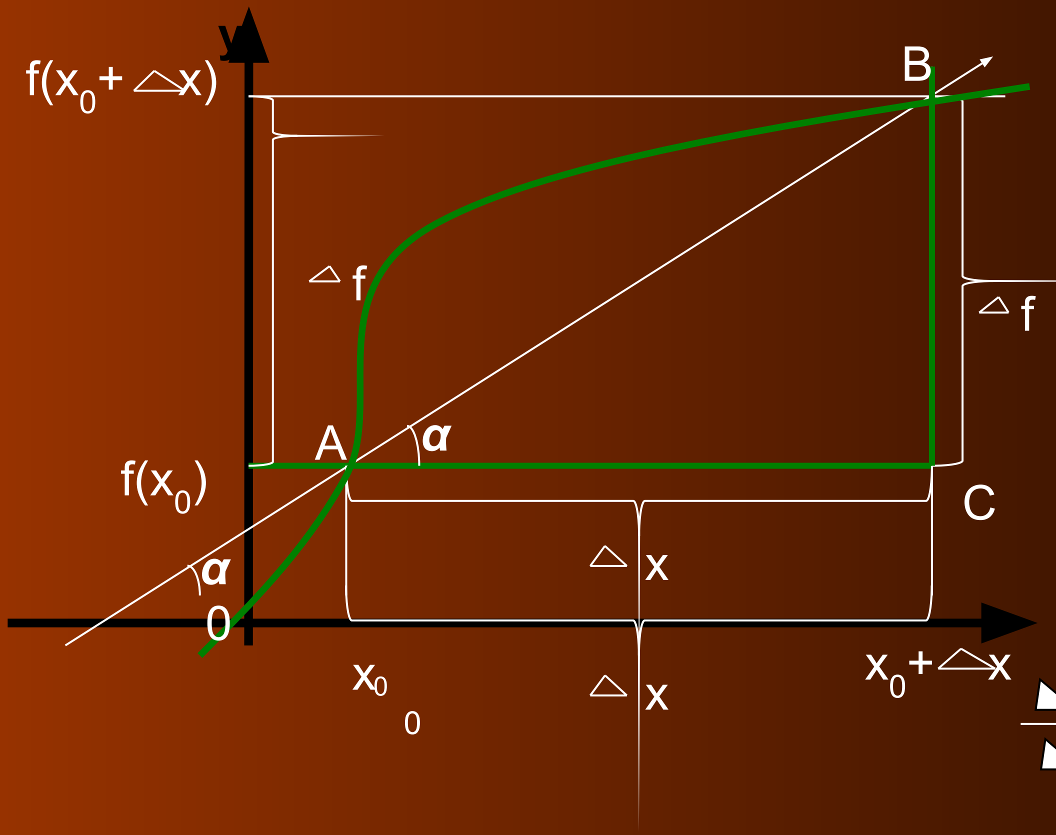
Непрерывность

Исследование функции с помощью производной

Практическая часть

Задачи на нахождение наибольшего и Наименьшего значения функции

Понятие производной



$\Delta f=(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

Определение.

Производной функции f в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

При Δx, стремящемся к нулю.

на главную

Производная частных функций

Частные функции

$(x)' = 1$, *x* - переменная

$(c)' = 0$, *c* - const

$(1/x)' = -1/x^2$

$(\sqrt{x})' = 1/2\sqrt{x}$

$(\sqrt[3]{x})' = 1/\sqrt[3]{x})$

$(x^2)' = 2x$

$(x^3)' = 3x^2$

Правила дифференцирования

Основные правила дифференцирования

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'v + v'u$

$(C\,u)' = Cu'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

$(f\,(u(x)))' = f'\,(u(x))\cdot u'(x)$

Основные формулы дифференцирования

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\ln x)' = 1/x$
$x>0$

$(\log a)' = 1/(x \ln a)$

$(e^x)' = e^x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(kx + b)' = k$

$(\ln (kx + b))' = k/ kx + b$

$(x^p)' = p x^{p-1}$

$(\log a)' = 1/x \ln a$

$(\lg)' = 1/x \cdot \lg e$

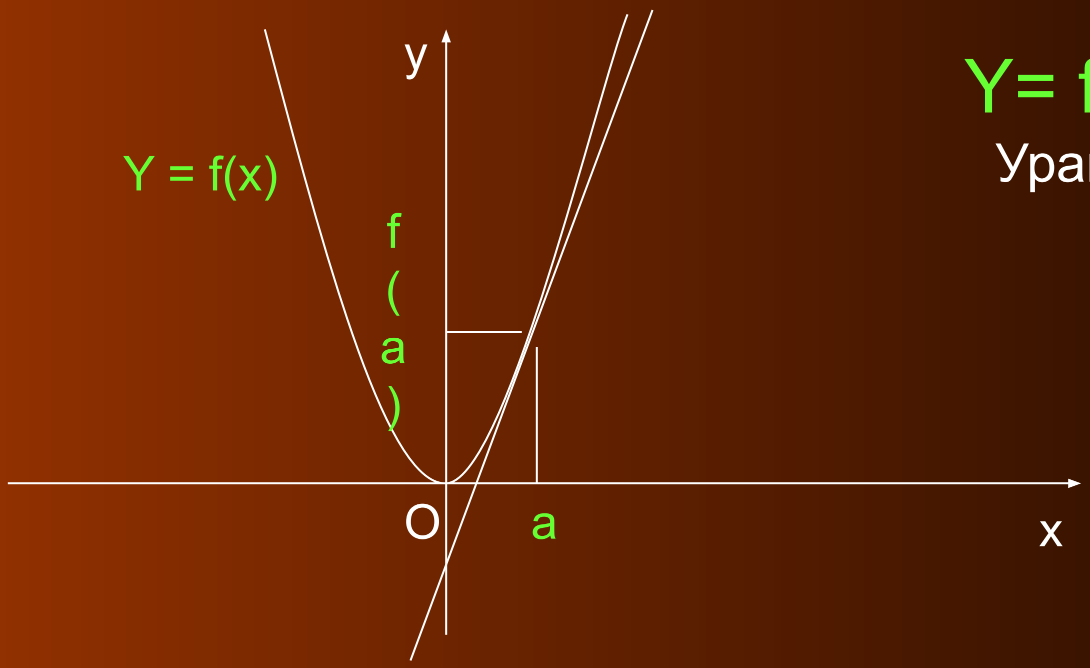
$(tgx)' = 1/\cos^2 x$

$(kx + b)' = k$

$(ctgx)' = - 1/\sin^2 x$

Геометрический смысл производной

Пусть задана функция y = f(x), которая имеет производную в точке x = a. Через точку (a; f(a)), проведена касательная к графику функции y = f(x). Угловой Коэффициент или тангенс угла наклона этой касательной будет равен производной функции y = f(x) в точке x = a, то есть $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(a)$.



$$Y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

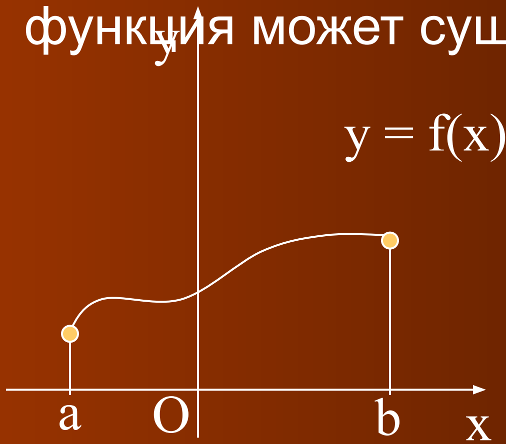
Уравнение касательной

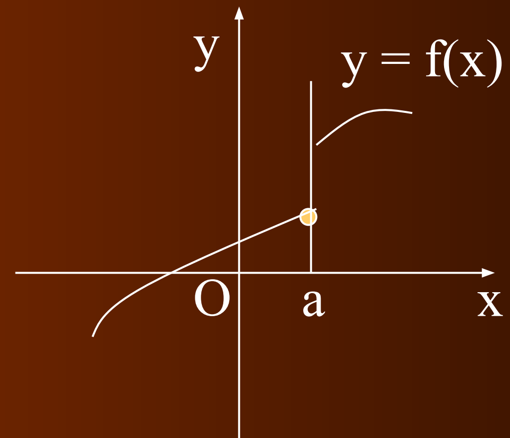
Непрерывность

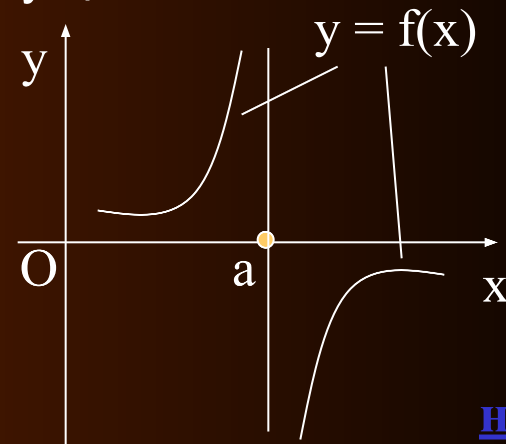
Функция y = f(x) называется непрерывной на промежутке, если она определена на этом промежутке и непрерывна в каждой точке промежутка.

Геометрическая непрерывность функции на промежутке означает, что график этой функции на данном промежутке изображен сплошной линией без скачков и разрывов. При этом малому изменению аргумента соответствует малое изменение функции.

Если при x = a функция y = f(x) существует в окрестности этой точки, но в самой точке x = a не выполняется условие непрерывности, говорят, что точка x = a есть точка разрыва функции. В самой точке x = a функция может существовать, а может и не существовать.







на главную

Физический смысл производной

Пусть точка движется по некоторой прямой линии, так что ее положение меняется с течением времени. Рассмотрим эту прямую как числовую ось, тогда положение точки определяется её координатой, и с течением времени эта координата меняется, являясь тем самым функцией от времени. Уравнением движения называется запись $y = f(t)$, показывающая, каким образом меняется координата с течением времени.

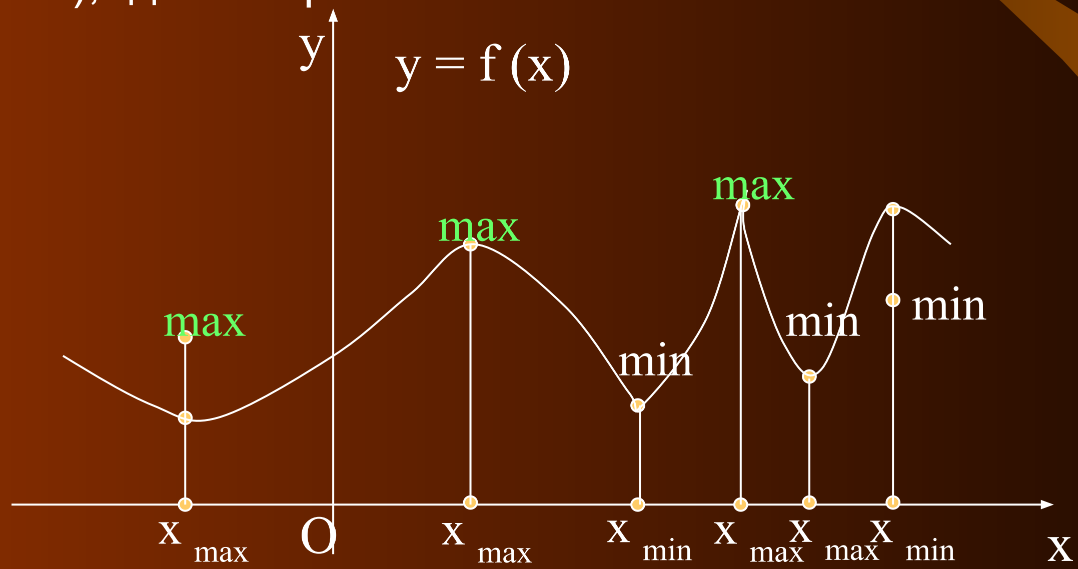
Скорость движения с уравнением $y = f(t)$ в момент времени t равна значению производной $f'(t)$ в этот момент времени. В этом состоит физический смысл производной.

Скорость движения при неравномерном движении изменяется с течением времени. Скорость изменения скорости называется ускорением,

То есть $f''(t)$. В этом состоит физический смысл второй производной.

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке$[a; b]$. Говорят, что функция имеет максимум в точке $x_0 \in [a; b]$, если существует окрестность точки x_0, целиком содержащаяся в $[a; b]$ и такая, что для любого x, принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Под окрестностью точки x_0 понимают интервал длины 2е с центром в точке x_0, т. е. $(x_0 – e ; x_0 + e)$, где е – произвольное положительное число.



Определение 2. Пусть функция $y = f (x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Говорят, что функция имеет минимум в точке x_0 $[a; b]$, если существует окрестность точки x_0, целиком содержащаяся в $[a; b]$ и такая, что для любого x, принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f (x) > f(x_0)$.

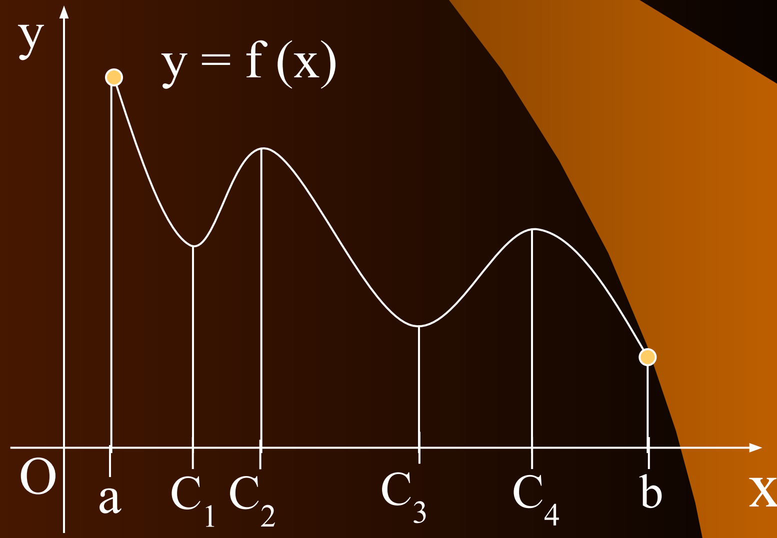
Максимумы и минимумы функции не являются обязательно наибольшими и наименьшими значениями этой функции во всей области определения. **Например,** функция y = f (x) определена на отрезке [a; b], имеет четыре экстремума: два минимума ($x = C_1$ и $x = C_3$) и два максимума ($x = C_2$ и $x = C_4$). Вместе с тем, функция достигает наибольшего значения при x = a и наименьшего при x = b.

Признак максимума функции:

Если функция непрерывна в точке x_0 и ее производная, переходя через нее, меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума.

Признак минимума функции:

Если функция непрерывна в точке x_0 и ее производная, переходя через нее, меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть Точка минимума.



Исследование функции с помощью производной

Схема исследования:

1. Область определения.
2. Чётность.
3. Периодичность.
4. Критические точки.
5. Значение функции в критических точках.
6. Промежутки возрастания и убывания.
7. Экстремумы.
8. Наибольшее и наименьшее значение функции.
9. Дополнительные точки.

Пример: исследовать функцию $y = -x^3 + 3x - 2$ и построить её график

- Решение:

1. Область определения: $D_y = (-\infty; +\infty)$.
2. Функция не является ни чётной, ни нечётной.
3. Функция не является периодической.
4. Производная: y‘ = 0 при x = 1 и x = -1.

6. У ‘(1) = 0; y(-1) = - 4.

7. y‘ < 0 при x є (- ∞ ; -1), следовательно, на промежутке (- ∞ ; -1) функция убывает;
y‘ > 0 при x є (- 1; 1) функция возрастает;
y‘ < 0 при x є (1; +∞), следовательно, на промежутке (1; +∞) функция убывает.

Так как в точка x = -1 и x = 1 функция непрерывна, то эти точки присоединим к промежуткам убывания и промежутку возрастания.

(- ∞ ; - 1]; [1; + ∞) – промежутки убывания. [-1;1] – промежуток возрастания.

8. Так как в точке x = -1 производная меняет знак с минуса на плюс, то x = -1 – точка минимума

Так как в точке x = 1 производная меняет знак с плюса на минус, то точка x = 1 – точка максимума

Минимум функции:

$y_{min} = -4$

Максимум функции:

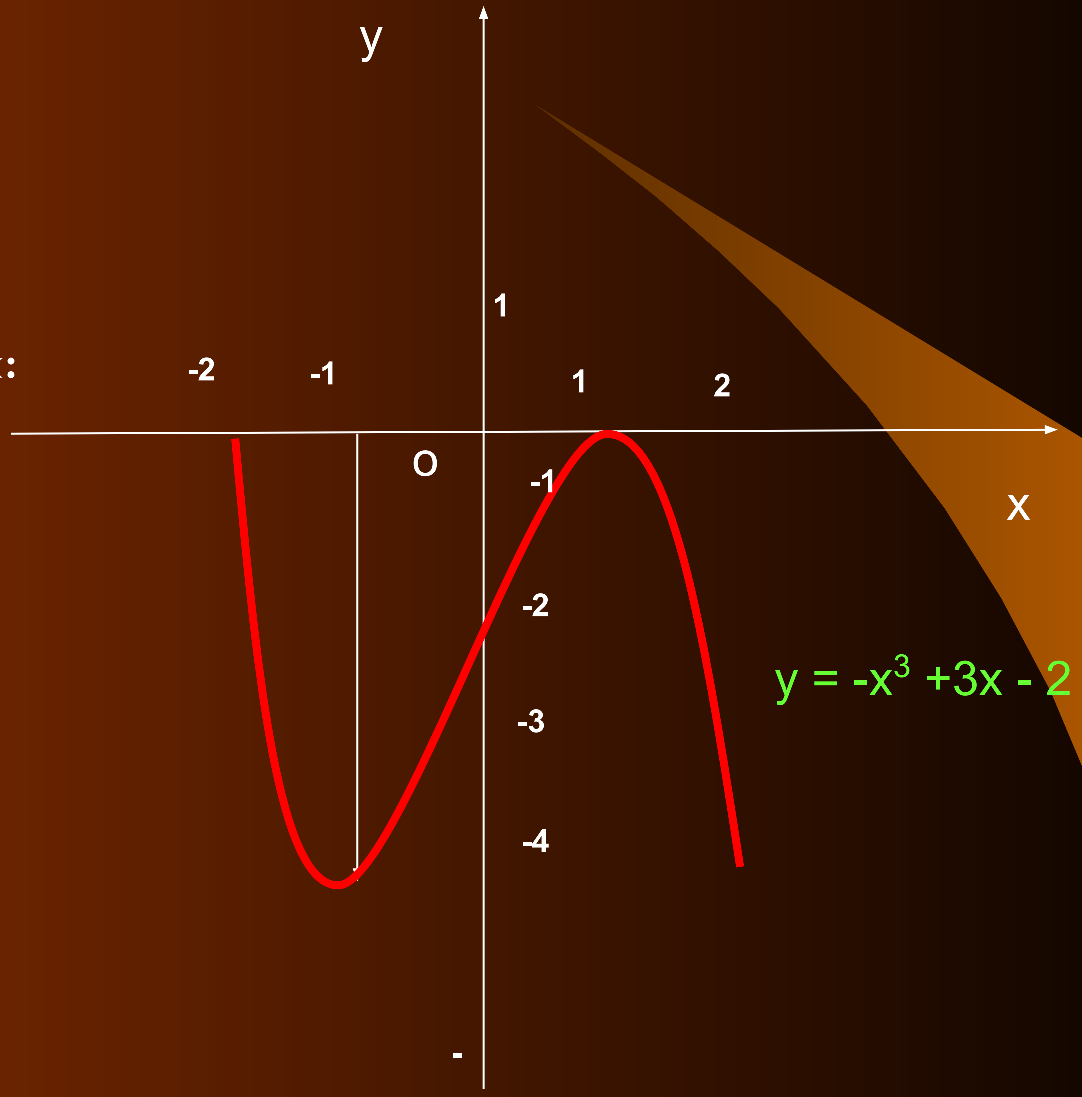
$y_{max} = 0.$

9. Дополнительные точки:

Если x = 0, то y = -2;

Если x = -2, то y = 0.

Построим график функции:



Задачи на нахождение наименьшего и наибольшего значения функции.

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема во всех точках этого отрезка и имеет конечное число критических точек на этом отрезке.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = f(x)$, на отрезке $[a; b]$, необходимо:

1. Найти критические точки;
2. Вычислить значение функции на концах отрезка и в критических точках;
3. Выбрать из найденных значений наибольшее и наименьшее.

если функция $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$, то $f(a)$ – наименьшее значение, $f(b)$ – наибольшее значение функции на этом отрезке.

если функция $y = f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$, то $f(a)$ – наибольшее значение, $f(b)$ - наименьшее значение функции на этом отрезке.

Практическая часть

Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

Решение: данная функция непрерывна и дифференцируема в каждой точке отрезка

[-1; 2].

Найдём производную: $y' = x^2 - 4x + 3$.

Найдём критические точки: $y' = 0$ при $x = 1$ и $x = 3$, $3 \notin [-1; 2]$.

Найдём значение функции в точке x = 1 и на концах отрезка [-1; 2]:

$У(1) = 1^3/3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 1/3 - 2 + 3 + 1 = 2\frac{1}{3}$

$У(-1) = (-1)^3/3 - 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -4\frac{1}{3}$

$У(2) = 2^3/3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 1\frac{2}{3}$

Ответ: $\max\limits_{[-1;2]} y(x) = 2\frac{1}{3}$; $\min\limits_{[-1;2]} y(x) = -4\frac{1}{3}$.

Составьте уравнение касательной к параболе у $=2x^2 - 12x + 20$ в точке с абсциссой х = 4.

Решение:

уравнение касательной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Найдём производную функции $f(X) = 2x^2 - 12x + 20$: $f'(x) = 4x - 12$.

Найдём значение производной и функции при х = 4:

$f'(4) = 4 \cdot 4 - 12 = 4$

$f(x) = 2 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 20 = 4$.

Составим уравнение касательной:

$У = 4 + 4(x - 4)$;

$У = 4 + 4x - 16$;

$У = 4x - 12$

$У = 4x - 12$ - уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 12x + 20$ в точке с абсциссой х = 4.

Ответ: $У = 4x - 12$.

Найти промежутки возрастания и убывания, точки максимума и точки минимума функции, максимумы и минимумы функции:
$y = 2x^2 + 4x + 1$.

Решение: Найдём производную данной функции: $y' = 4x + 4$.

Так как $y' > 0$ на $(-1; +\infty)$, значит, на этом интервале функция возрастает.

Так как $y' < 0$ на $(-\infty; -1)$, значит, на этом интервале функция убывает.

Так как в точке $x = -1$ функция **$y = 2x^2 + 4x + 1$ непрерывна, то эту точку присоединим к промежутку возрастания и промежутку убывания, то есть на промежутке** $[-1; +\infty)$, функция возрастает, на промежутке $(-\infty; -1]$, функция убывает;

Так как в точке $x = -1$ производная меняет знак с минуса на плюс, то $x = -1$ является точкой минимума.

Найдём минимум функции:

$$y_{min} = 2*(-1)^2 + 4(-1) + 1 = -1.$$

Ответ: на $[-1; +\infty)$, функция возрастает, на промежутке $(-\infty; -1]$, функция убывает; $x_{min} = -1$; $y_{min} = -1$.

Найти координаты точки, в которой касательная к параболе у = 3/2 x^2 - 4х + 5 образует угол 135° с осью Ох.

Решение:

Тангенс угла наклона равен производной функции в точке касания, то есть t g 135° =

$f'(x)$, t g 135° = -1

$f'(x) = (3/2\ x^2 - 4x + 5)' = 3x – 4$, $3x – 4 = - 1$; $3x = 3$; $x = 1$.

Значит, 1 – абсцисса точки касания. Найдём ординату этой точки:

$f(1) = 3/2 \cdot 1^2 – 4 \cdot 1 + 5 = 3/2 – 4 + 5 = 2,5$

(1; 2,5) – координаты точки касания.

Ответ: (1; 2,5).

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 1/3\ t^3 – ½\ t^2 + 2$. Выведите формулу для вычисления скорости в любой момент времени и найдите скорость в момент $t = 5$ с. (Путь – в метрах).

Решение: Скорость движения с уравнением $x(t) = 1/3\ t^3 – ½\ t^2 + 2$ в момент времени t равна значению производной $x^/(t)$ в этот момент времени.

Поэтому:

$V = x^/(t) = t^2 - t$

Найдём скорость в момент времени $t = 5$;

$V(5) = 5^2 – 5 = 25 – 5 = 20$ (м/с).

Ответ: $V = 20$ (м/с).

Успехов вам на ЕГЭ!