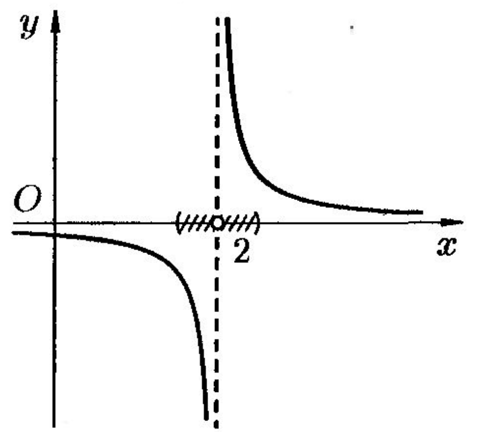
ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Точки , в которыхнарушается непрерывность функции, называются ***точками разрыва функции***.

Если x=x_0-точка разрыва функции y=f(x),то вней не выполняется по крайней мере одно из условий первого определения непрерывности , а именно:

1.Функция определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0

Например,функция $y=\frac{1}{x-2}$ н

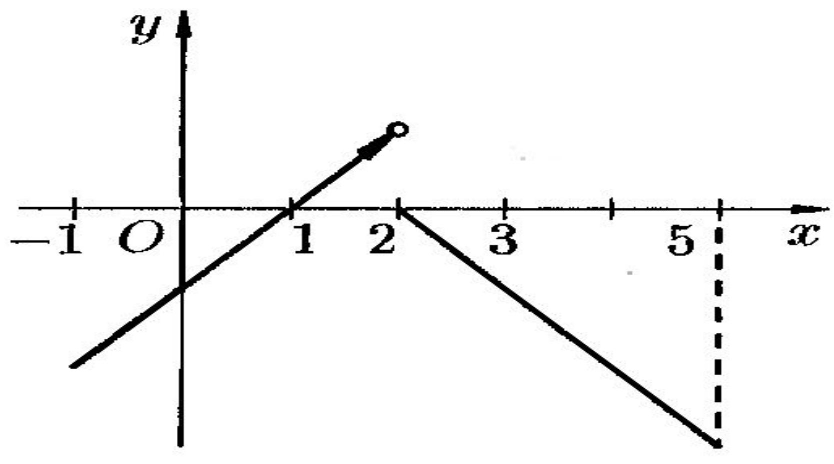


2.Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела f(x) при $x \to x_0$.

Например, функция : f(x)= $\begin{cases} x-1, если\ -1 \le x < 2, \\ 2-x, если\ 2 \le x < 5, \end{cases}$

Определена в точке x_0=2 (f(2)=0), Однако в точке x_0=2 имеет разрыв (см.рисунок) т.к. эта функция не имеет предела при $x \to 2$:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = 1, \lim_{x\to 2+0} f(x) = 0.$$

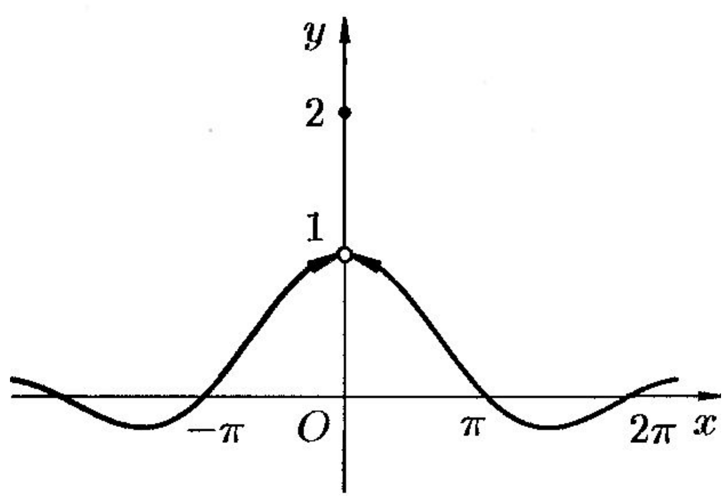


3.Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но

этот предел не равен значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Например, функция $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & если\ x\neq 0\\ 2, & если\ x=0\end{cases}$

Здесь $x_0=0$ – точка разрыва: $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,$ а $g(x_0)=g(0)=2$ (см.рис.)



Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $y=f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$

При этом: а) если $A_1=A_2$,

то точка x_0 *называется* ***точкой устранимого разрыва***

б)если $A_1 \neq A_2$

то точка x_0 называется ***точкой конечного разрыва***

Величину $|A_1 - A_2|$ называют ***скачком функции*** в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $y=f(x)$,если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

1.Обратимся к функции $y=\dfrac{1}{x-2}$, $x_0=2$ – точка разрыва второго рода.

2.Для функции f(x)= $\begin{cases} x-1, если -1 \le x < 2, \\ 2-x, если 2 \le x < 5, \end{cases}$

X_0=2 – точка разрыва первого рода , скачок функции равен $|1-0|=1.$

3. Для функции $$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 2 & , x = 0 \end{cases}$$

X_0=0 является точкой устранимого разрыва первого рода. Положив g(x)=1 (вместо g(x)=2) при x=0, разрыв устраниться,функция станет непрерывной.

Пример: Дана функция $$f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$$

Найти точки разрыва,выяснить их тип.

Решение: Функция f(x) определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки x=3.

Очевидно ,f(x)= $\begin{cases} 1 & , x \boxtimes 3 \\ -1 & , x \boxtimes 3 \end{cases}$ Следовательно, $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=-1.$

Поэтому в точке x=3 функция имеет разрыв первого рода.Скачок функции в этой точке равен 1-(-1)=2.