

Множество комплексных чисел.

Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, в котором a и b – действительные числа, а i – некоторый символ такой, что

$$i^2 = -1$$

Действительное число a называется **действительной частью** $z = a + bi$ ($\operatorname{Re} z$), а число b – **мнимой частью** ($\operatorname{Im} z$)

Комплексное число $z = a + bi$ изображают точкой плоскости с координатами $(a; b)$

Точка $M(a; b)$, соответствующая комплексному числу $z = a + bi$, называется **аффиксом** данного числа z .

Два комплексных числа $(a; b)$ и $(c; d)$ называются **равными**, если $a = c$ и $b = d$.

Комплексное число $a-bi$ называется комплексно **сопряженным** с числом $a+bi$ и обозначается через $\bar{z}$

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

Комплексные числа вида $a+bi$ и $-a-bi$ называются **противоположными**.

Арифметические операции над КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Сумма двух комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ будет комплексное число вида

$$z=z_1+z_2=a+bi+c+di=a+c+(b+d)i$$

Разность двух комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ будет комплексное число вида

$$z=z_1-z_2=a+bi-c+di=a-c+(b-d)i$$

Произведение двух комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ будет комплексное число вида

$$z=z_1*z_2=(a+bi)*(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$$

Частное двух комплексных чисел $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ будет комплексное число вида

$$z=z_2/z_1=$$

$$(a+bi)/(c+di)=$$

$$(ac+bd)/(c^2+d^2)+(bc-ad)*i/(c^2+d^2)$$

Нахождение степеней числа i

Если показатель степени i делится на 4, то значение степени равно 1, если при делении показателя на 4 в остатке получается 1, то значение степени равно i , если при делении показателя на 4 остаток равен 2, то значение степени равно -1 , если в остатке при делении показателя на 4 будет 3, то значение степени равно $-i$.

- Вычислить: 1) i^{66} , 2) i^{143} , 3) i^{216} , 4) i^{137}

Решение:

1) i^{66}

$66:4=16(2)$. Остаток равен 2, значит $i^{66}=-1$

2) i^{143}

$143:4=35(3)$. В остатке 3, значит $i^{143}=-i$

3) i^{216}

$216:4=54(0)$. В остатке 0, значит $i^{216}=1$

4) i^{137}

$137:4=34(1)$. В остатке 1, значит $i^{137}=i$

Пример 1

Вычислить: $(1 + 2i)i - \frac{3 + 2i}{1 - i}$

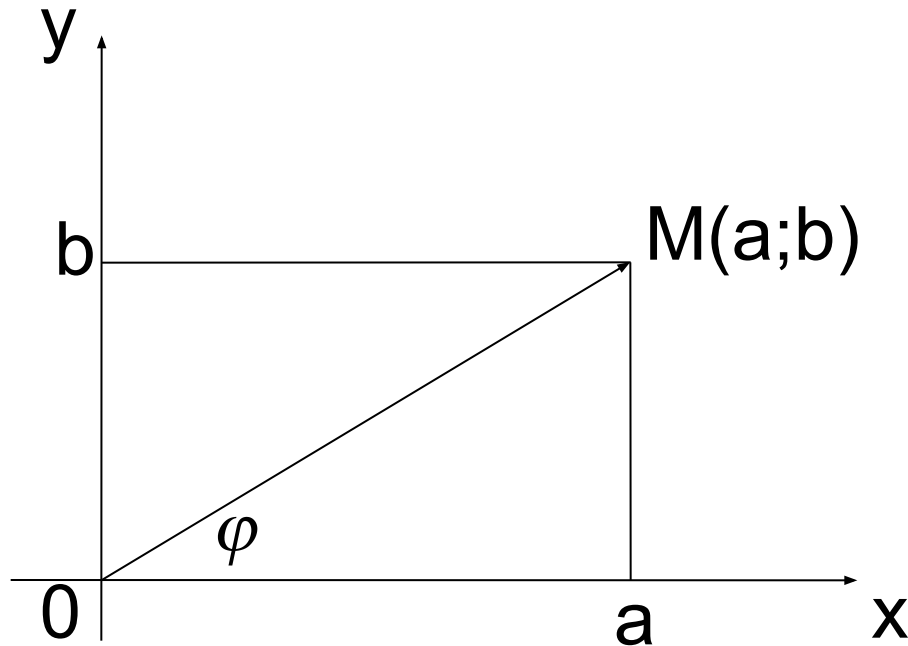
$$1)(1+2i)i = i + 2i^2 = -2 + i$$

$$2)\frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+2i+3i+2i^2}{1-i^2} = \frac{3+5i-2}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$3)(-2+i) - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i\right) = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$$

Геометрический смысл комплексного числа

Каждой точке M плоскости с координатами (a,b) соответствует один и только один вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{z}$ с началом в точке $z = 0$ и концом в точке $z = a + bi$



Если комплексное число $Z = a + bi$ трактовать как точку $M(a, b)$ плоскости xOy , то модуль Z равен расстоянию точки $M(a, b)$ от начала координат

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Если на плоскости ввести полярные координаты (r, φ) , где φ **аргумент** числа z ($\varphi = \arg z$) - угол между действительной осью Ox и вектором OM , то $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$

В силу этого комплексное число Z можно записать в форме $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где r – модуль числа Z , φ – угол (в рад.), который составляет вектор OM с положительным направлением оси ox

Тригонометрическая форма комплексного числа

Тригонометрической формой комплексного числа называют его запись в виде:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль, а

φ - аргумент числа z , связанный с a и b формулами:

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Угол φ из промежутка $[-\pi; \pi]$ называется главным аргументом. Все остальные значения угла φ могут быть получены прибавлением к главному аргументу значений $2\pi n$, где n - любое целое число.

Пример2.

Записать в тригонометрической форме: $-2\sqrt{3} + 2i$

Сначала находим модуль числа: $r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

Далее, согласно формулам (*),

имеем: $\cos \varphi = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sin \varphi = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Учитывая, что угол $\varphi \in [-\pi; \pi]$ $\varphi = \frac{5\pi}{6}$

Итак, $z = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

При умножении/делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются /делятся, а аргументы складываются (вычитаются).

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (2)$$

Пример3. Выполнить действия:

$$4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) * \frac{1}{10}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

Используя формулу (1), находим:

$$\frac{4}{10}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{2}{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{2}{5}i$$

При возведении комплексного числа
 $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ в натуральную степень
 n

модуль данного числа возводится в эту степень,
а аргумент умножается на показатель степени:

формула Муавра

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Корень n-й степени из комплексного числа z
 $= r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ имеет n различных значений,
которые находятся по формуле :

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

Здесь $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Пример4. Решить уравнение $z^2 + 4 = 0$

Корнями данного уравнения являются все значения $\sqrt{-4}$

Для числа - 4 имеем $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Согласно формуле,

находим:
$$\sqrt{-4} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2} \right)$$

Если $k = 0$, то
$$\omega_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2}i$$

Если $k = 1$, то
$$\omega_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -\sqrt{2}i$$

Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера

Если комплексному числу $(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, модуль которого равен 1, поставить в соответствие показанное выражение $e^{i\varphi}$, то получим

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi},$$

то получим соотношение которое называется **формулой Эйлера**.

Любое комплексное число можно записать в виде

$$z = r e^{i\varphi}$$

. Эта форма записи комплексного числа называется **показательной формой**.

Пример: Записать число в показательной форме.

$$z = 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$$

Решение: Здесь $r = 3$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

тогда показательная форма числа имеет вид

.

$$z = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Пример: Записать число $z = -5i$ в показательной форме.

Решение. Чтобы представить число z в виде $z = re^{i\varphi}$ нужно найти модуль и аргумент числа z .
Здесь $a = 0$, $b = -5$; тогда $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0 + (-5)^2} = 5$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$,
так как точка z лежит на мнимой оси комплексной плоскости.
Зная r и φ , получим

$$z = 5e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

- **Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме**

Если комплексные числа записаны в показательной форме, то умножение, деление, возведение в степень производится по правилам действий со степенями.

Так, для произведения и частного комплексных чисел

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ справедливы формулы

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

а для n -й степени комплексного числа используется

- формула $z^n = r^n e^{i\varphi n}$

Для вычисления корня из комплексного числа

$$z = re^{i\varphi}$$

используется формула

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$$

где k принимает n значений: $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Понятие функции комплексного переменного и отличие от действительного анализа

Пусть D – некоторая область на комплексной плоскости

Определение. *Функцией комплексного аргумента* с областью определения D называется соответствие, которое любому комплексному числу $z \in D$ сопоставляет одно или несколько комплексных значений.

Таким образом, в отличие от действительного анализа, в комплексном анализе допускаются многозначные функции. Например,

$f(z) = az + b$ (a, b – фиксированные комплексные числа) – однозначная функция;

$f(z) = z^2$ – однозначная функция

$f(z) = \sqrt[n]{z}$ - n-значная функция;

$f(z) = \operatorname{Arg} z$ -бесконечнозначная функция.

Если функция однозначна, то она может быть задана в виде отображения $f : D \rightarrow C$. В таком случае функция называется **однолистной**. В дальнейшем, если не указано особо, будем рассматривать однолистные функции.

Пример: Для функции $f(z) = \frac{z^2 + 1}{2i} + 1$ найти $f(i)$

Решение: Подставим в место z значение i в функцию

$$f(i) = \frac{i^2 + 1}{2i} + 1 = \frac{-1 + 1}{2i} + 1 = 0 + 1 = 1$$

Ответ: $f(i) = 1$

Компоненты функции

Пусть дана функция , $f(z)$ $z \in D$ Представим z в алгебраической форме $z = x + iy$ Значение $f(z)$ - комплексное число, т.е. $f(z) \in \mathbb{C}$, которое также можем представить в алгебраической форме $f(z) = u(z) + iv(z)$, где $u(z)$ и $v(z)$ - действительные функции комплексного аргумента, но задание $f(z)$ эквивалентно заданию пары (u, v) .
Окончательно, любую функцию комплексного аргумента можно представить в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ - действительные функции двух действительных переменных. Функции u и v называются компонентами функции $f(z)$, u - действительная компонента, v - мнимая компонента. Пишут :

$$u = \operatorname{Re} f(z) \quad v = \operatorname{Im} f(z)$$

Пример: Для функции $f(z) = (x + iy)^2 + 4i$
Где $z = x + iy$ найти ее действительную и
мнимую часть.

Решение:

$$(x+iy)^2+4i=x^2+2ixy-y^2+4i=(x^2-y^2)+(2xyi+4i)=(x^2-y^2)+i(2xy+4).$$

Тогда действительная часть функции $f(z)$ - x^2-y^2 , а
мнимая - $2xy+4$.

$$\operatorname{Re}(f(z)) = x^2 - y^2$$

$$\operatorname{Im}(f(z)) = 2xy + 4$$

Понятие **непрерывности** определяется аналогично действительному случаю.

$f(z)$ -непрерывна в точке $z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$

$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ Так как это определение формально совпадает с обычным, то все свойства непрерывной функции комплексного аргумента совпадают дословно со свойствами действительных функций.