

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Предположим, что переменная Y зависит от переменной X в соответствии с показанной зависимостью, и необходимо получить оценки β_1 , β_2 , и β_3 , имея данные Y и X .

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Представленное выше уравнение не может быть преобразовано в уравнение линейного вида, поэтому в этом случае невозможно применение обычной процедуры оценивания регрессии.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Тем не менее, все же можно использовать принцип минимизации суммы квадратов остатков для получения оценок параметров. Мы опишем простой нелинейный регрессионный алгоритм, который использует принцип, состоящий из серии повторяющихся шагов.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение β_1, β_2 , и β_3 . $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$, и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.

Начинаем с оценивания правдоподобных значений параметров.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение $\beta_1, \beta_2,$ и β_3 . $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2,$ и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.
2. Вычисляем $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i^{\hat{\beta}_3}$ для каждого исследования.

Вычисляем соответствующие установленные значения Y из данных по X , обусловленные этими значениями параметров.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение $\beta_1, \beta_2,$ и β_3 . $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2,$ и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.
2. Вычисляем $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i^{\hat{\beta}_3}$ для каждого исследования.
3. Вычисляем $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ для каждого исследования.
4. Вычисляем $RSS = \sum \hat{u}_i^2$.

Вычисляем остатки для каждого наблюдения в выборке и, следовательно, RSS - сумму квадратов остатков.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение $\beta_1, \beta_2,$ и β_3 . $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2,$ и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.
2. Вычисляем $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i^{\hat{\beta}_3}$ для каждого исследования.
3. Вычисляем $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ для каждого исследования.
4. Вычисляем $RSS = \sum \hat{u}_i^2$.
5. Вычисляем $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}_3$

Затем вносим небольшие изменения в одну или более оценку параметров.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение $\beta_1, \beta_2,$ и β_3 . $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.
2. Вычисляем $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i^{\hat{\beta}_3}$ для каждого исследования.
3. Вычисляем $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ для каждого исследования.
4. Вычисляем $RSS = \sum \hat{u}_i^2$.
5. Вычисляем $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}_3$
6. Пересчитываем Y_i , \hat{u}_i , RSS .

Используя новые оценки $\beta_1, \beta_2,$ и β_3 , пересчитываем установленные значения Y . Затем пересчитываем остатки и RSS .

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение $\beta_1, \beta_2,$ и β_3 . $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2,$ и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.
2. Вычисляем $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i^{\hat{\beta}_3}$ для каждого исследования.
3. Вычисляем $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ для каждого исследования.
4. Вычисляем $RSS = \sum \hat{u}_i^2$.
5. Вычисляем $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}_3$.
6. Пересчитываем Y_i, \hat{u}_i, RSS .
7. Если новый $RSS <$ предыдущего RSS , продолжить вычисление методом наименьших квадратов.
В противном случае выполнить другое вычисление.

Если RSS меньше стал меньше предыдущего, новые оценки параметров лучше предыдущих, необходимо продолжать корректировать оценки в одном направлении. В противном случае необходимо выполнить различные вычисления методом наименьших квадратов.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение $b_1, b_2,$ и b_3 . $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2,$ и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.
2. Вычисляем $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i^{\hat{\beta}_3}$ для каждого исследования.
3. Вычисляем $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ для каждого исследования.
4. Вычисляем $RSS = \sum \hat{u}_i^2$.
5. Вычисляем $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}_3$
6. Пересчитываем Y_i, \hat{u}_i, RSS .
7. Если новый $RSS <$ предыдущего RSS , продолжить вычисление методом наименьших квадратов.
8. Повторите шаги 5, 6 и 7 для сближения.

Вы повторяете шаги 5, 6 и 7 вновь до тех пор, пока не окажется невозможным внести какие-либо изменения в оценки параметров, которые привели бы к уменьшению RSS .

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение $b_1, b_2,$ и b_3 . $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2,$ и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.
2. Вычисляем $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i^{\hat{\beta}_3}$ для каждого исследования.
3. Вычисляем $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ для каждого исследования.
4. Вычисляем $RSS = \sum \hat{u}_i^2$.
5. Вычисляем $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}_3$
6. Пересчитываем Y_i, \hat{u}_i, RSS .
7. Если новый $RSS <$ предыдущего RSS , продолжить вычисление методом наименьших квадратов.
8. Повторите шаги 5, 6 и 7 для сближения.

Делается вывод о том, что величина RSS минимизирована и конечные оценки параметров являются оценками по методу наименьших квадратов.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X^{\beta_3} + u$$

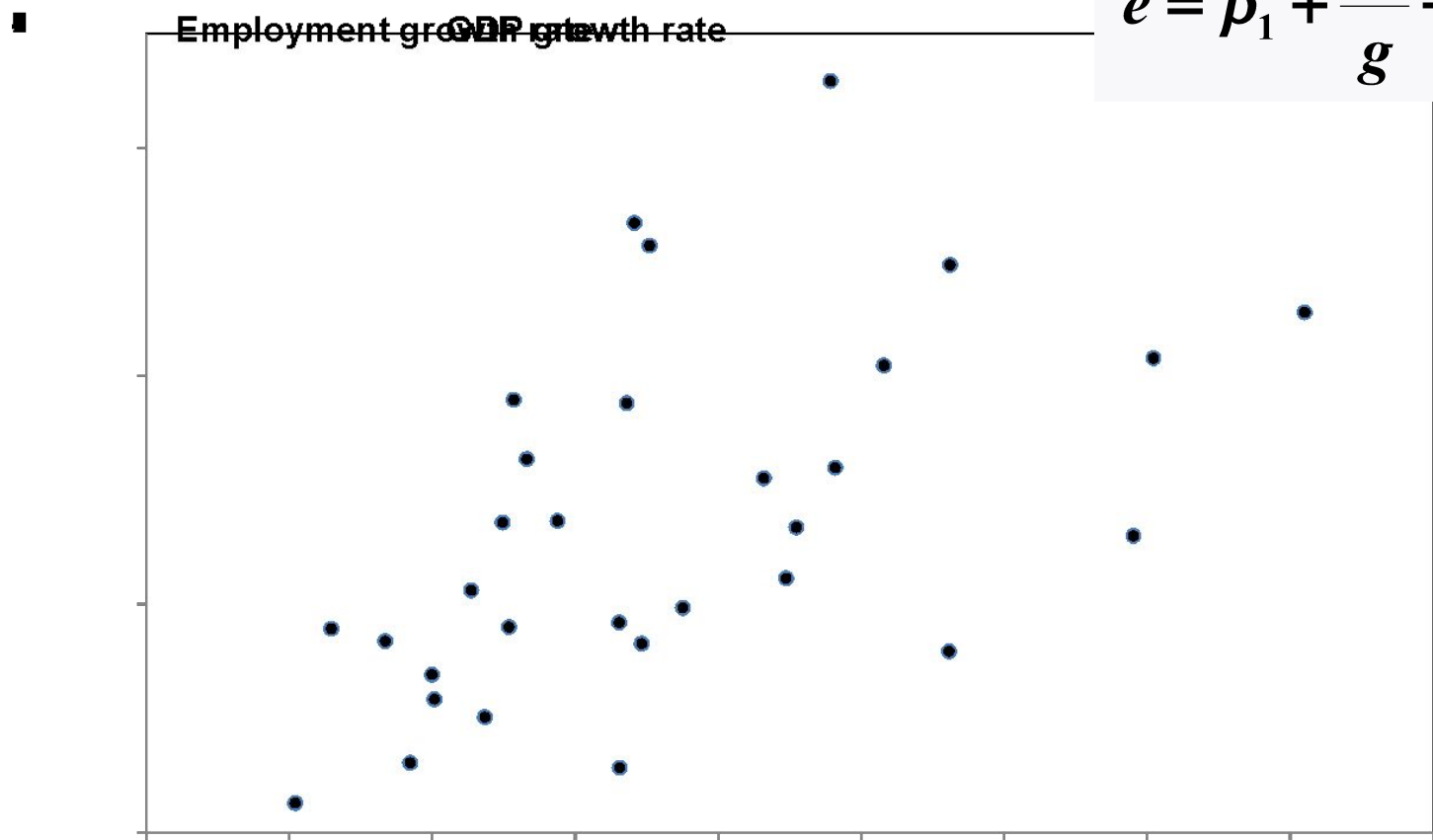
Алгоритм нелинейной регрессии

1. Предположение $b_1, b_2,$ и b_3 . $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2,$ и $\hat{\beta}_3$ - приближенные оценки.
2. Вычисляем $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i^{\hat{\beta}_3}$ для каждого исследования.
3. Вычисляем $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ для каждого исследования.
4. Вычисляем $RSS = \sum \hat{u}_i^2$.
5. Вычисляем $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}_3$
6. Пересчитываем Y_i, \hat{u}_i, RSS .
7. Если новый $RSS <$ предыдущего RSS , продолжить вычисление методом наименьших квадратов.
8. Повторите шаги 5, 6 и 7 для сближения.

Следует подчеркнуть, что математики давно разработали сложные методы, чтобы свести к минимуму количество шагов, требуемых алгоритмами этого типа.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

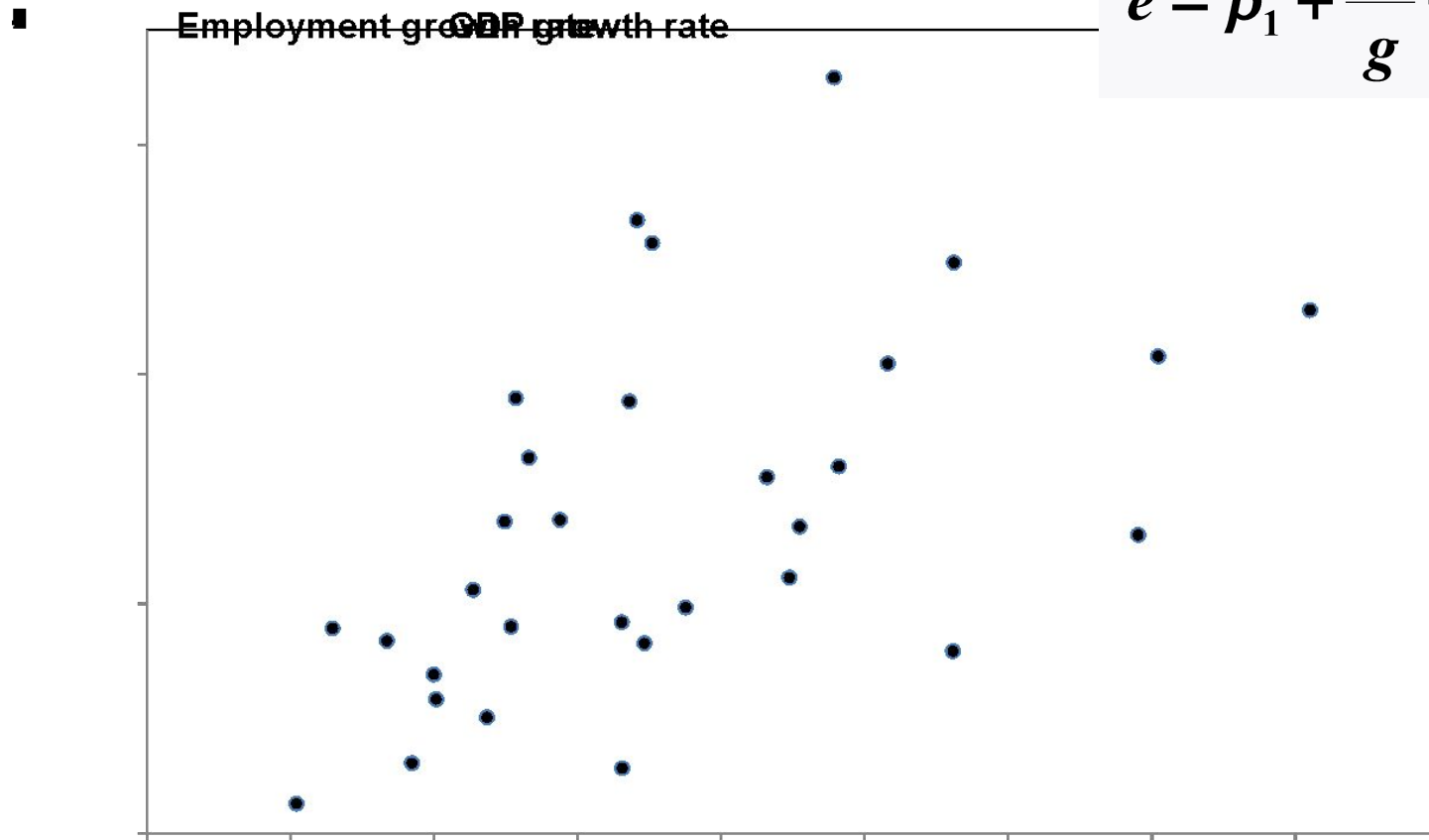
$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{g} + u$$



Мы вернемся к взаимосвязи между темпами роста занятости, e и темпами роста ВВП, g , в первом слайд-шоу этой главы. Предполагается, что e и g связаны между собой как показано.

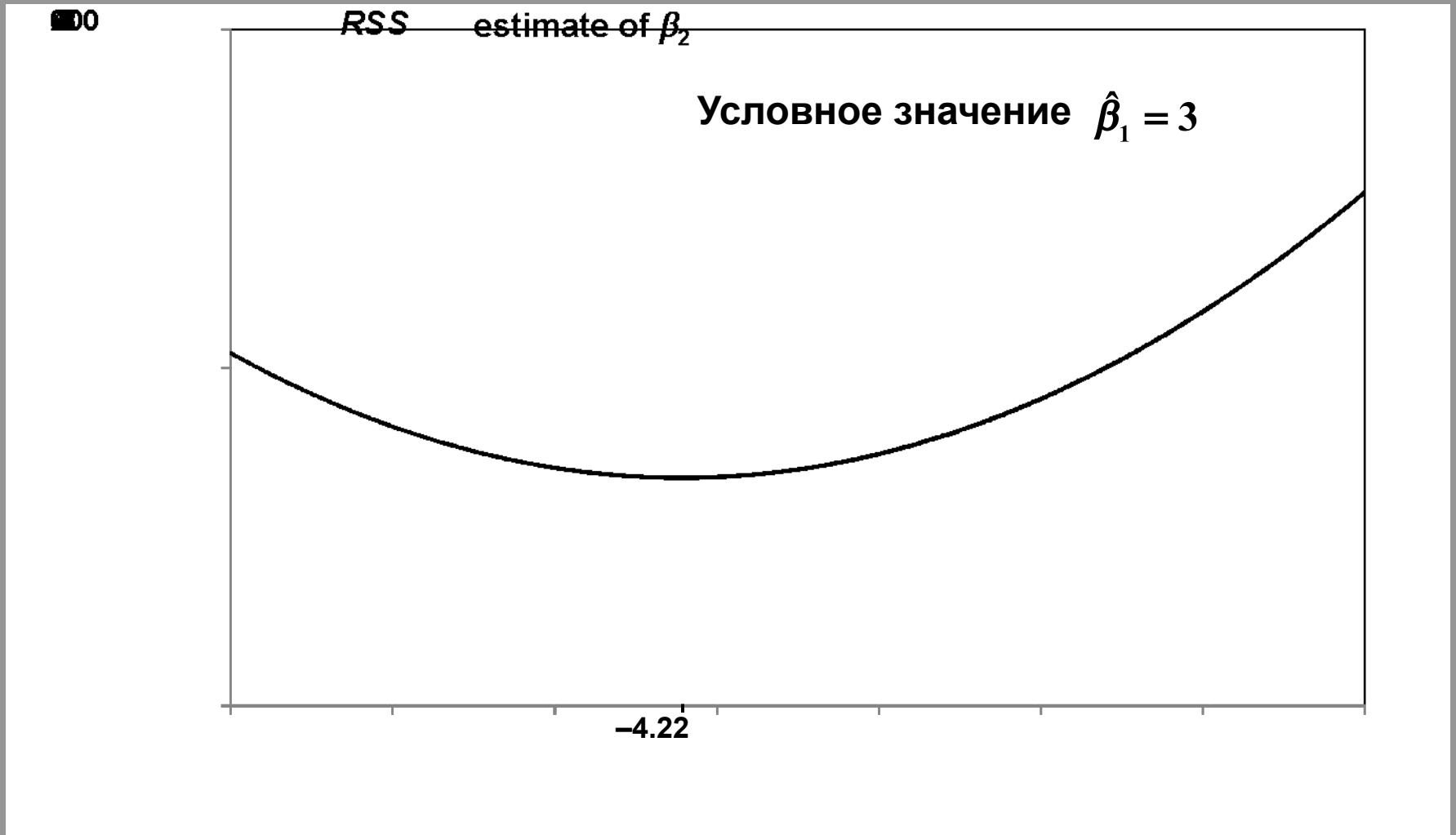
НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{g} + u$$



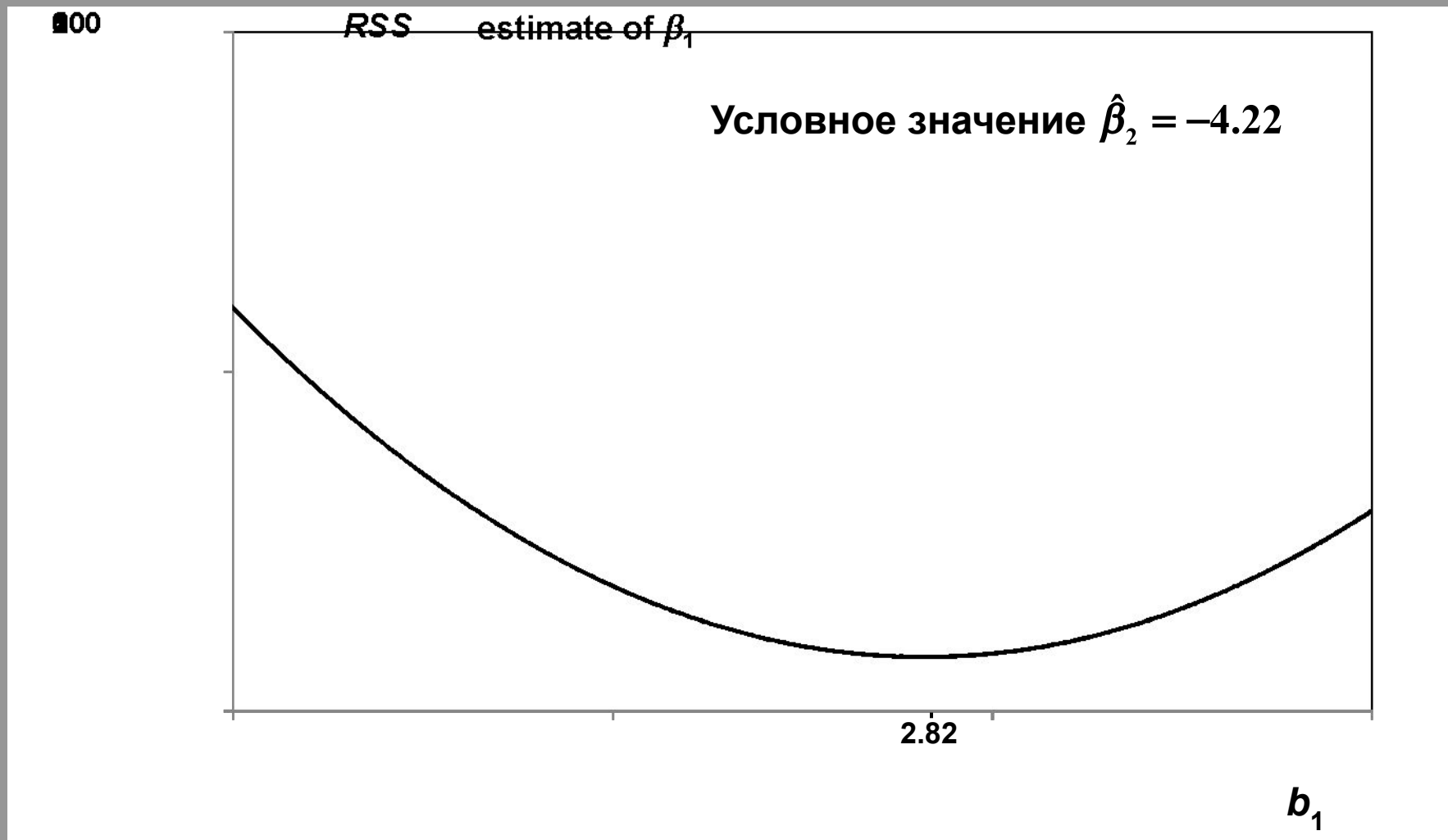
Согласно этой спецификации, когда g становится большим, e будет стремиться к пределу β_1 . На рисунке видно, что максимальное значение e равно 3. Поэтому будем считать его начальным значением для β_1 . Затем мы ищем оптимальное значение β_2 , обусловленное этой предпосылкой для β_1 .

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ



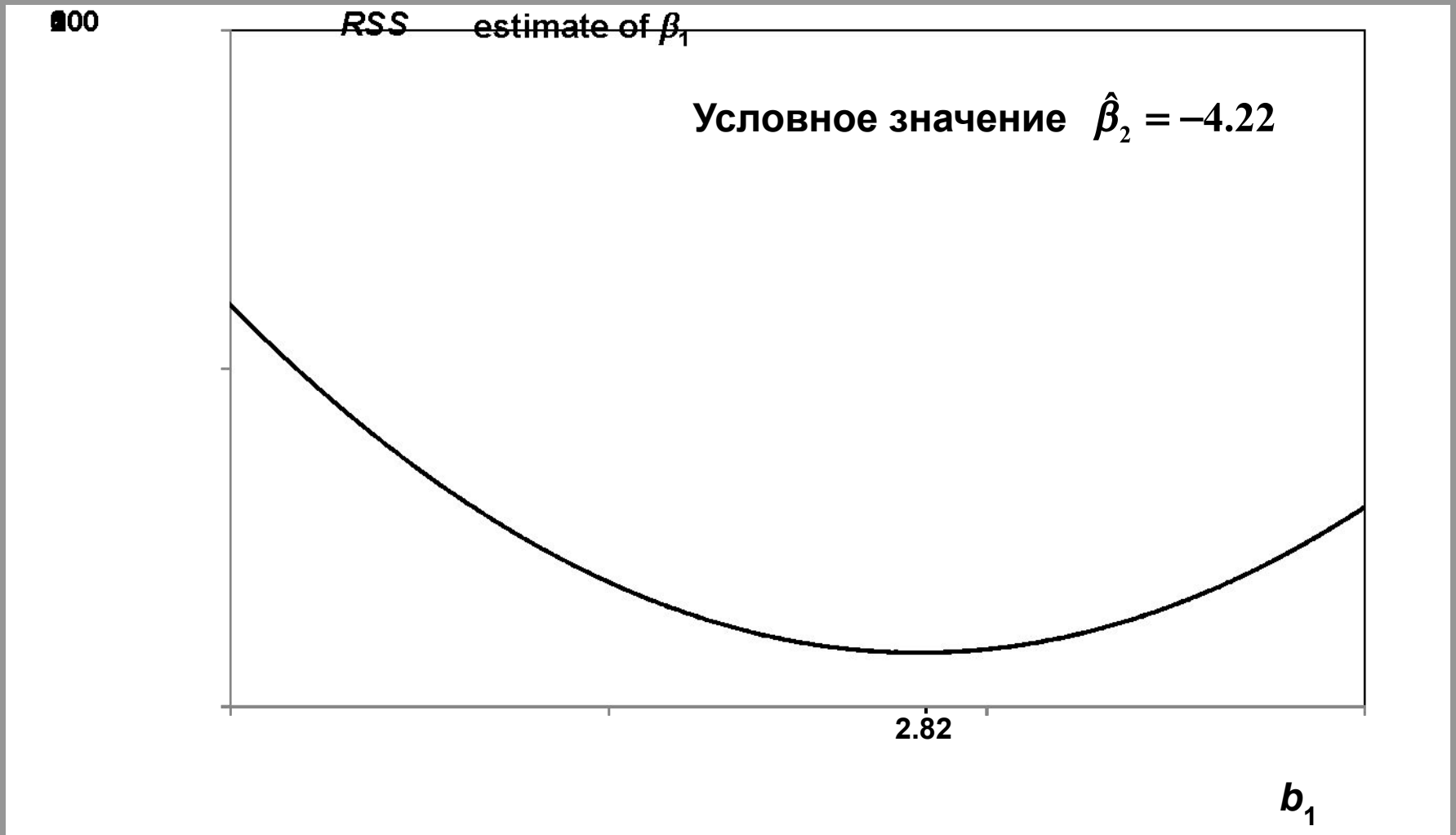
На рисунке показано, как RSS отображается в зависимости от $\hat{\beta}_2$, условное значение $\hat{\beta}_1 = 3$. Из этого мы видим, что оптимальное значение $\hat{\beta}_2$, условное на $\hat{\beta}_1 = 3$, равно -4.22.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ



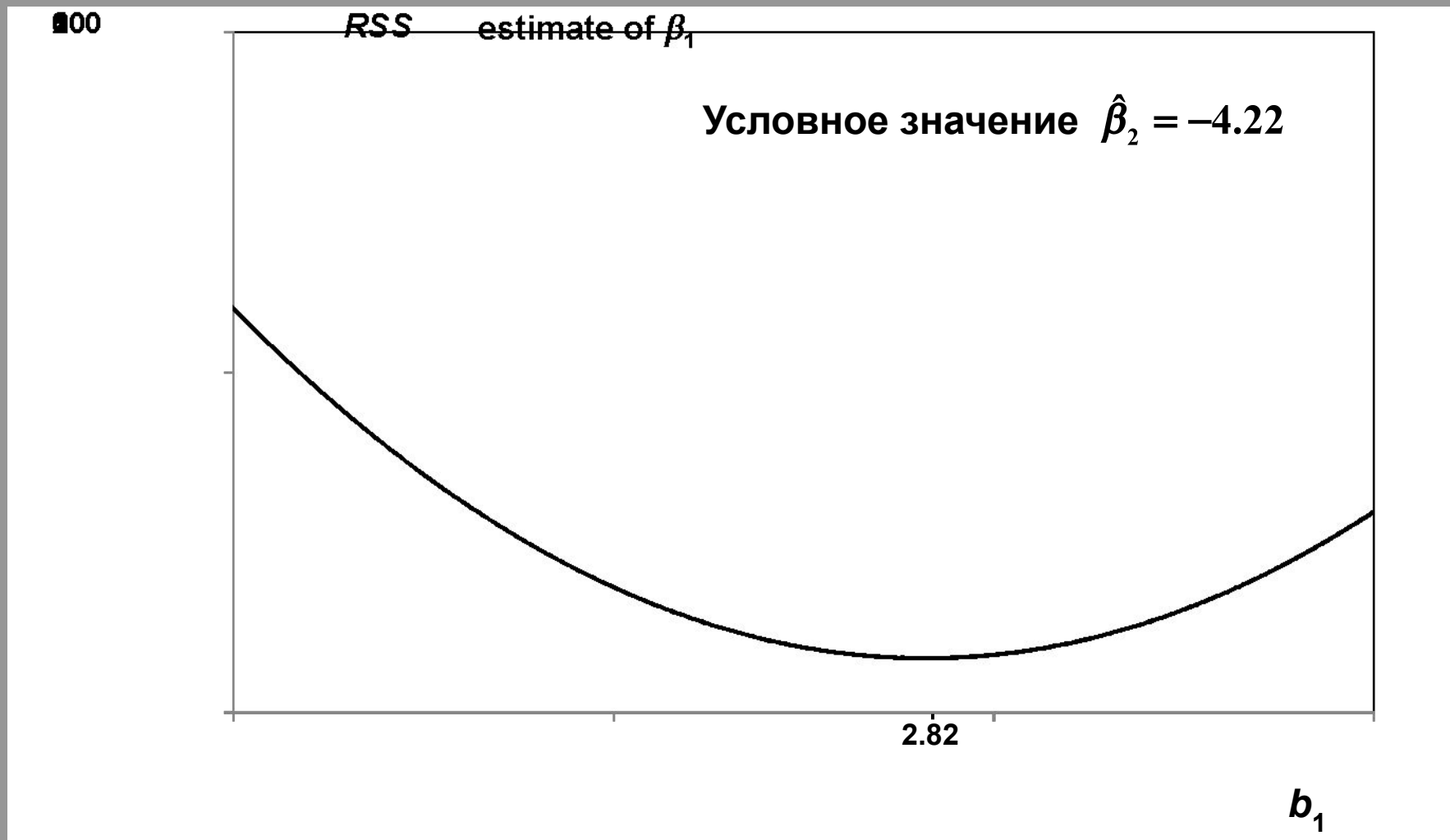
Затем, фиксируя $\hat{\beta}_2$ на уровне -4.22, мы стараемся улучшить наше предположение для $\hat{\beta}_1$. На рисунке показано RSS в зависимости от $\hat{\beta}_1$, условное значение $\hat{\beta}_2 = -4.22$. Мы видим, что оптимальное значение b_1 равно 2.82.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ



Мы продолжаем делать так до тех пор, пока обе оценки параметров сходятся к пределам и затем перестают меняться. Затем мы достигнем значений, которые дают минимальную сумму квадратов остатков (RSS).

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ



Пределы должны быть значениями преобразованной линейной регрессии, показанной в первом слайд-шоу для этой главы: $\hat{\beta}_1 = 2,18$ и $\hat{\beta}_2 = -2,36$. Они были определены по тому же критерию, что и минимизация RSS. Все, что мы сделали – использовали другой метод.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

```
. nl (e = {beta1} + {beta2}/g)
(obs = 31)
```

$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{g} + u$$

```
Iteration 0: residual SS = 12.30411
Iteration 1: residual SS = 12.30411
```

Source	SS	df	MS			
Model	5.80515805	1	5.80515805	Number of obs =	31	
Residual	12.304107	29	.42427955	R-squared =	0.3206	
				Adj R-squared =	0.2971	
				Root MSE =	.6513674	
Total	18.109265	30	.603642167	Res. dev. =	59.32851	

e	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
/beta1	2.17537	.249479	8.72	0.000	1.665128	2.685612
/beta2	-2.356136	.6369707	-3.70	0.001	-3.658888	-1.053385

Вот результат для данной гиперболической регрессии влияния e на g с использованием нелинейной регрессии. Это, как обычно, вывод Stata, но вывод из других приложений регрессии будет похожим.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

```
. nl (e = {beta1} + {beta2}/g)
(obs = 31)
```

$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{g} + u$$

```
Iteration 0: residual SS = 12.30411
Iteration 1: residual SS = 12.30411
```

Source	SS	df	MS			
Model	5.80515805	1	5.80515805	Number of obs =	31	
Residual	12.304107	29	.42427955	R-squared =	0.3206	
				Adj R-squared =	0.2971	
				Root MSE =	.6513674	
Total	18.109265	30	.603642167	Res. dev. =	59.32851	

e	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
/beta1	2.17537	.249479	8.72	0.000	1.665128	2.685612
/beta2	-2.356136	.6369707	-3.70	0.001	-3.658888	-1.053385

Команда Stata для нелинейной регрессии - «nl». За этим следует гипотетическая математическая связь в круглых скобках. Параметры должны иметь имена, помещенные в фигурные скобки. Здесь b_1 является {beta1}, а b_2 - {beta2}.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

```
. gen z = 1/g
```

```
. reg e z
```

$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{g} + u$$

Source	SS	df	MS	Number of obs = 31		
Model	5.80515811	1	5.80515811	F(1, 29)	=	13.68
Residual	12.3041069	29	.424279548	Prob > F	=	0.0009
				R-squared	=	0.3206
				Adj R-squared	=	0.2971
Total	18.109265	30	.603642167	Root MSE	=	.65137

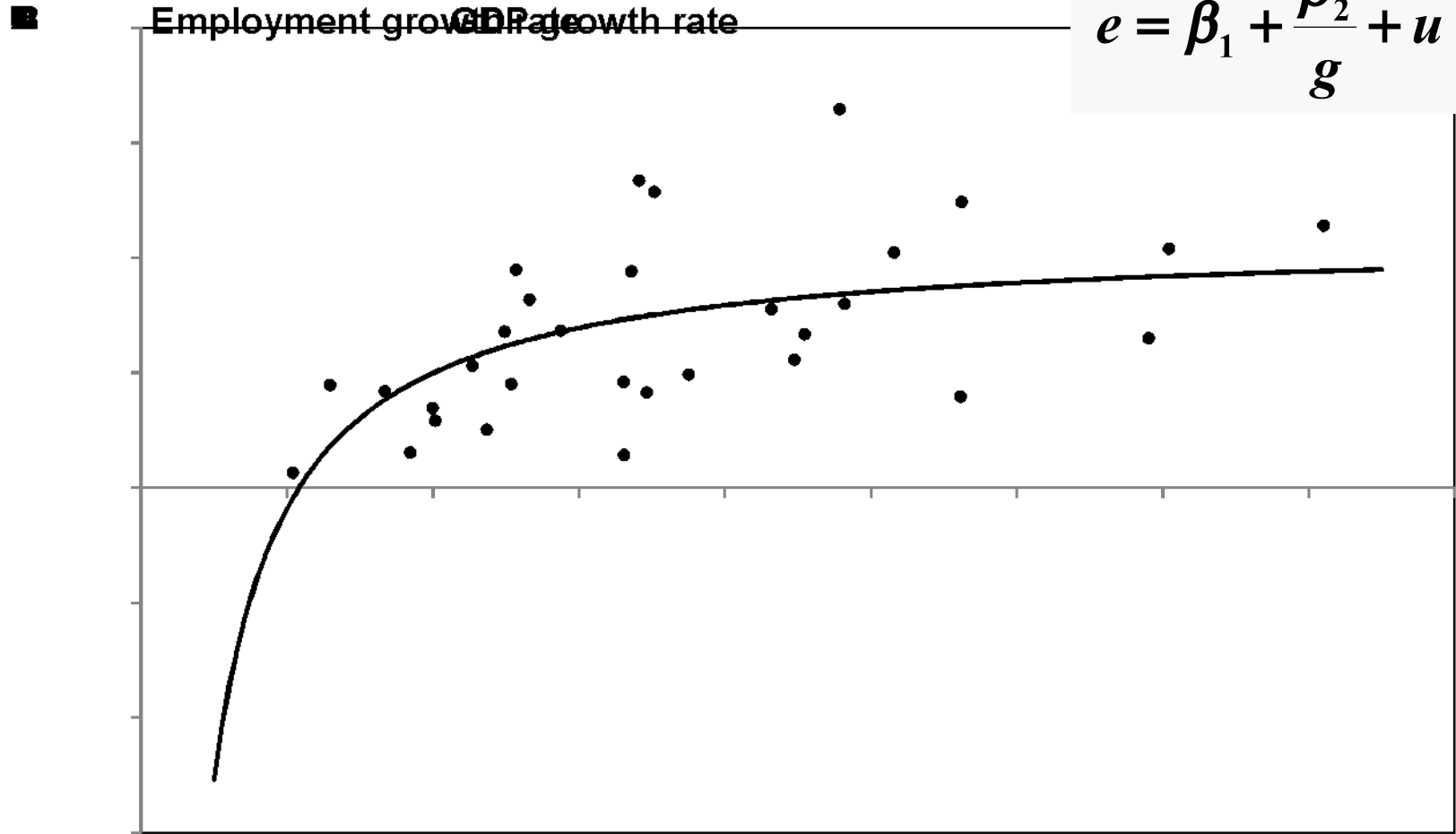
e	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
z	-2.356137	.6369707	-3.70	0.001	-3.658888	-1.053385
_cons	2.17537	.249479	8.72	0.000	1.665128	2.685612

$$\hat{e} = 2.18 - 2.36z = 2.18 - \frac{2.36}{g}$$

Выходные данные аналогичны выходным данным линейной регрессии в первом слайд-шоу для этой главы.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{g} + u$$



Гиперболическая функция вводит такое ограничение, что функция стремится к минус бесконечности для положительного g при приближении g к нулю.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

```
. nl (e = {beta1} + {beta2}/({beta3} + g))
(obs = 31)
```

```
Iteration 0: residual SS = 12.30411
Iteration 1: residual SS = 12.27327
.....
Iteration 8: residual SS = 11.98063
```

$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{\beta_3 + g} + u$$

Source	SS	df	MS			
Model	6.12863996	2	3.06431998	Number of obs =	31	
Residual	11.9806251	28	.427879466	R-squared =	0.3384	
Total	18.109265	30	.603642167	Adj R-squared =	0.2912	
				Root MSE =	.654125	
				Res. dev. =	58.5026	

e	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
/beta1	2.714411	1.017058	2.67	0.013	.6310616	4.79776
/beta2	-6.140415	8.770209	-0.70	0.490	-24.10537	11.82454
/beta3	1.404714	2.889556	0.49	0.631	-4.514274	7.323702

Эта особенность может быть ослаблена путем использование показанного изменения. В отличие от предыдущей функции, она не может быть приведена к линейному виду каким-либо преобразованием. Здесь должна использоваться нелинейная регрессия.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

```
. nl (e = {beta1} + {beta2}/({beta3} + g))
(obs = 31)
```

```
Iteration 0: residual SS = 12.30411
Iteration 1: residual SS = 12.27327
.....
Iteration 8: residual SS = 11.98063
```

$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{\beta_3 + g} + u$$

Source	SS	df	MS			
Model	6.12863996	2	3.06431998	Number of obs =	31	
Residual	11.9806251	28	.427879466	R-squared =	0.3384	
Total	18.109265	30	.603642167	Adj R-squared =	0.2912	
				Root MSE =	.654125	
				Res. dev. =	58.5026	

e	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
/beta1	2.714411	1.017058	2.67	0.013	.6310616	4.79776
/beta2	-6.140415	8.770209	-0.70	0.490	-24.10537	11.82454
/beta3	1.404714	2.889556	0.49	0.631	-4.514274	7.323702

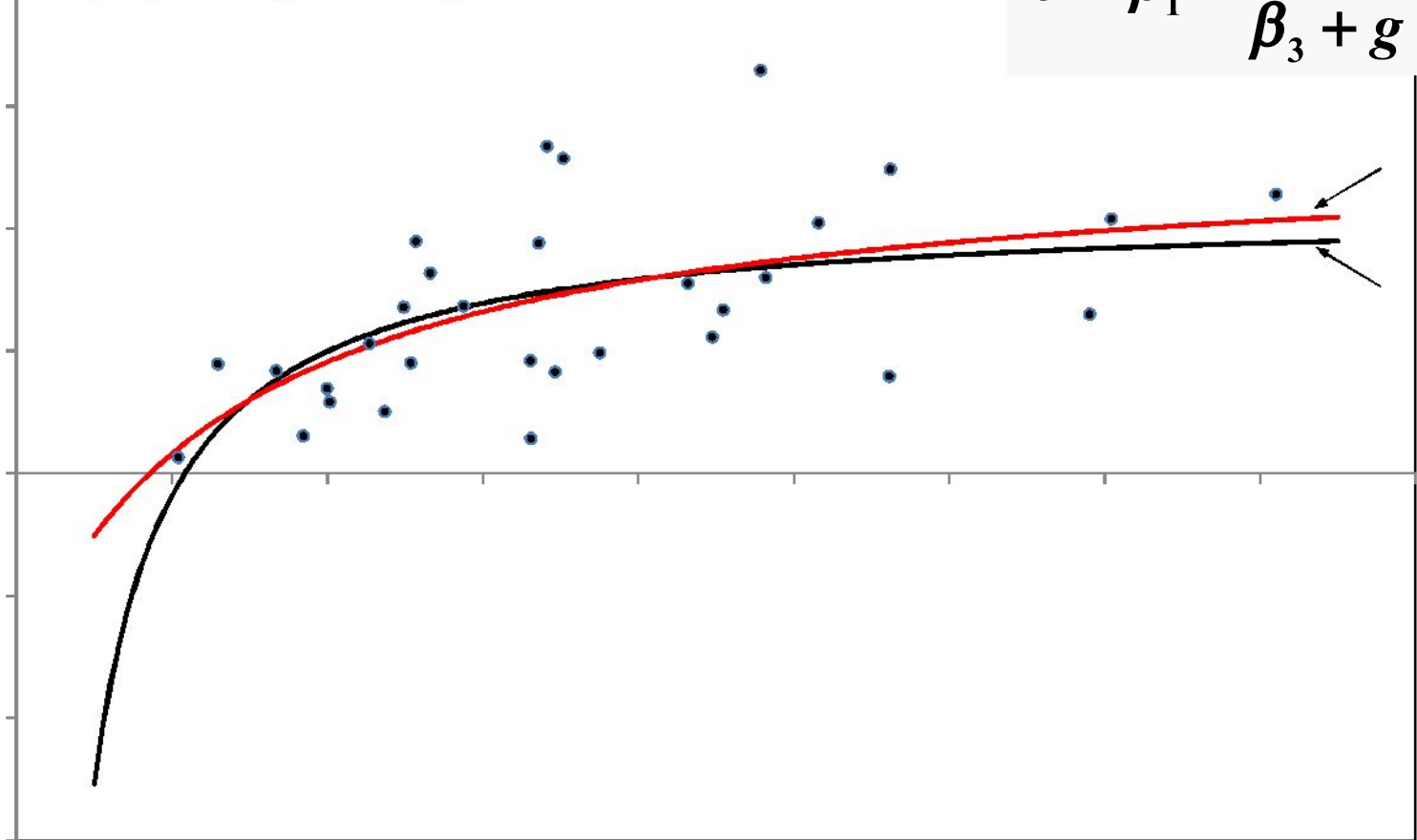
Вывод для данной спецификации (характеристик) показан с наибольшим количеством сообщений.

НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

$$e = \beta_1 + \frac{\beta_2}{\beta_3 + g} + u$$

■ 46)

Employment growth rate GDP growth rate



На рисунке сравниваются оригинальные (черные) и новые (красные) гиперболические функции. Общее выравнивание значительно не улучшено, но спецификация (характеристики) кажется более удовлетворительной.