

4. Случайные погрешности

При повторных измерениях изменяются случайным образом измеряемая величина

$$X = x[X] \quad x_1 = \mu + \Delta x_1; \quad x_2 = \mu + \Delta x_2; \quad \dots \quad x_N = \mu + \Delta x_N$$

μ – истинное значение измеряемой величины (его мы никогда не знаем),
 Δx_i – случайная погрешность при i -м наблюдении

4.1. Случайные величины и закон распределения

4.1.1. Дискретные случайные величины

принимающие только отделенные друг от друга значения (например, возможное число выпавших очков при бросании в игре «Кости»)

Чтобы охарактеризовать дискретную случайную величину, необходимо знать все ее возможные значения и вероятность появления каждого значения.



Пример. Пусть при измерении напряжения при помощи вольтметра, позволяющего производить измерения с дискретностью отсчета в 1 В, были получены следующие 10 значений: 34, 36, 34, 38, 36, 33, 35, 37, 38, 34 В. Далее запишем полученные значения в порядке возрастания ($x_1 < x_2 < \dots < x_k$) в таблицу и занесем в нее, сколько раз было получено каждое значение n_k ($k = 1, 2, \dots, m$).

Причем .
$$\sum_{k=1}^m n_k = N$$

Значение x_k , В	33	34	35	36	37	38
Число реализаций n_k	1	3	1	2	1	2
Вероятность p_k (F_k)	0.1	0.3	0.1	0.2	0.1	0.2

Из полученных значений можно вычислить среднее арифметическое:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{33 + 34 + 34 + \dots + 38}{10} = 35.5$$

Среднее значение можно получить, используя средневзвешенную сумму, так как по своему смыслу n_k является весовым множителем для каждого x_k :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^N x_k n_k}{N} = \frac{33 \cdot 1 + 34 \cdot 3 + \dots + 38 \cdot 1}{10} = 35.5$$

Далее вместо числа реализаций n_k можно ввести относительные частоты $F_k = n_k / N$ появления x_k .

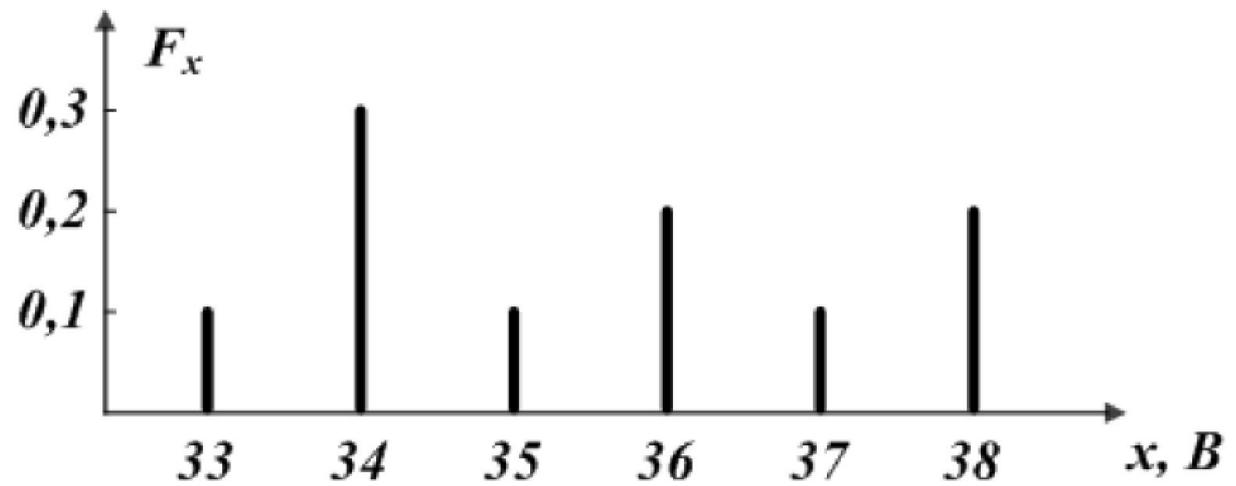
Если N будет стремиться к бесконечности, то частоты будут стремиться к вероятностям p_k появления конкретных значений дискретной случайной величины. Заметим, что сумма всех вероятностей будет всегда равна единице

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad \text{- условие нормировки}$$

Следовательно, можно установить связь между возможными значениями дискретной случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Это и будет закон распределения вероятности или просто **закон распределения**.

Закон распределения можно задать при помощи таблицы, в которую вносят все дискретные значения и их вероятности, или в графическом виде, где по оси абсцисс откладывают возможные дискретные значения, а по оси ординат – вероятности этих значений.



Кроме закона распределения для характеристики дискретных случайных величин используются такие параметры, как **математическое ожидание** и **дисперсия**.

В общем случае под **математическим ожиданием** случайной величины понимают сумму произведений всех ее возможных значений на вероятность этих значений:

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_N x_N}{N} = \sum_{i=1}^N \frac{n_i x_i}{N} = \sum_{i=1}^N p_i x_i = M$$

- совпадает с средним.



Дисперсия – математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания

$$D = M[x - M]^2 = \sum_{i=1}^N ([x_i - M]^2 p_i)$$



Дисперсия имеет размерность квадрата измеряемой случайной величины, поэтому вводят понятие **среднего квадратического отклонения** (СКО):

$$\sigma_x = \sqrt{D}$$

СКО будет иметь размерность самой измеряемой величины. Характеризуют **степень разброса случайной величины от среднего значения**

4.1.2. Непрерывные случайные величины

значения которых не отделены друг от друга и непрерывно заполняют некоторый промежуток

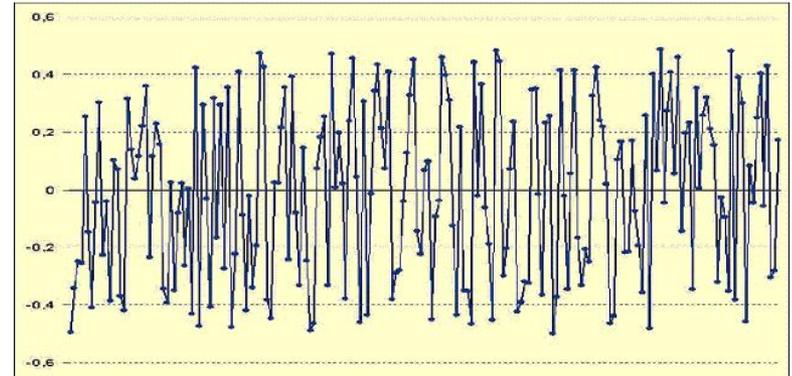
Функция распределения вероятности
случайной величины

(интегральный закон распределения)

- вероятность того, величина принимает значение от $-\infty$ до x .

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty, x)$$

- Вот ее общие свойства:
- 1. Функция распределения $F(x)$ является неубывающей функцией: т.е. при $x_1 < x_2$ $F(x_1) < F(x_2)$.
- 2. При $x = -\infty$ $F(-\infty) = 0$: на минус бесконечности функция распределения равна нулю.
- 3. При $x = +\infty$ $F(+\infty) = 1$: на плюс бесконечности функция распределения равна единице.



Для непрерывной случайной величины с непрерывной и дифференцируемой функцией распределения вероятности $F(x)$ можно использовать **дифференциальный закон распределения вероятностей (или плотность распределения вероятности)**:

$$p(x) = F'(x);$$

Эта функция всегда неотрицательна и подчинена условию нормирования:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 - \text{нормировка}$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины:

$$M = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx$$

Дисперсия,
среднее квадратическое отклонение

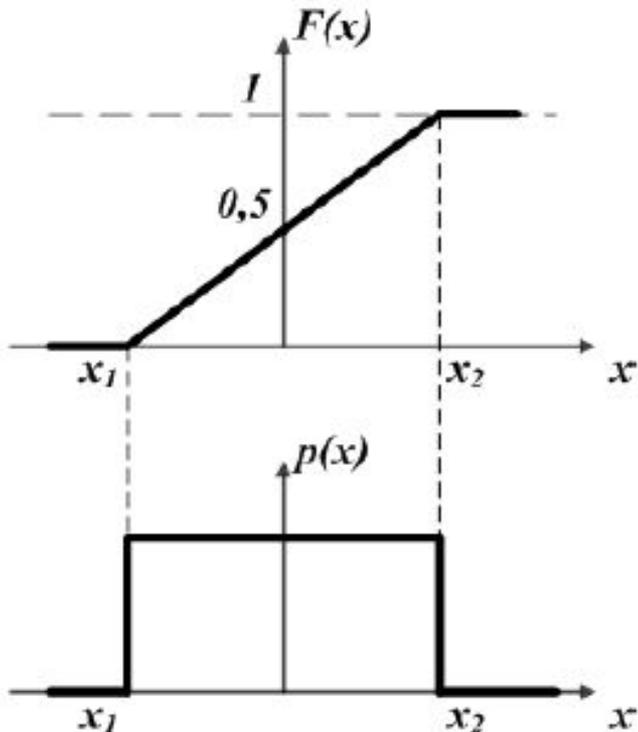
$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M)^2 p(x) dx; \quad \sigma = \sqrt{D}$$

В метрологии существует много законов распределения. Чаще всего в измерительной практике применяются два: равномерный и нормальный (распределение Гаусса).

4.1.3. Равномерный закон распределения

При **равномерном законе** возможные значения непрерывной случайной величины находятся в пределах некоторого конечного интервала и имеют одну и ту же плотность вероятности

$$\begin{cases} p(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}, & \text{если } x_1 < x < x_2 \\ p(x) = 0, & \text{если } x < x_1 \text{ и } x > x_2 \end{cases}$$



Математическое ожидание

$$M(X) = (x_1 + x_2)/2$$

Дисперсия

$$D(X) = (b - a)^2/12$$

Функция распределения и
Плотность распределения

Примеры равномерно распределенных случайных величин.

Автомобиль подъезжает к перекрестку, регулируемому светофором, в некоторый момент времени. На светофоре – красный сигнал. Полное время «горения» красного сигнала – 30 секунд. Время T , в течение которого водителю автомобиля придется ждать зеленого сигнала светофора, представляет собой случайную величину, равномерно распределенную на отрезке $[0, 30]$.

встречается в измерительной практике при округлении отсчётов измерительных приборов до целых делений шкал

Шкала измерительного прибора проградуирована в некоторых единицах. Ошибку при округлении отсчета до ближайшего целого деления можно рассматривать как случайную величину, распределенную с постоянной плотностью между двумя соседними делениями.

4.1.4.. Нормальный закон распределения (гауссовское распределение)

Широко применяется в задачах практики

Аксиомы:

1) Аксиома симметрии: одинаковые по величине и разные по знаку отклонения величины от среднего значения встречаются одинаково часто;

2) Аксиома монотонного убывания плотности

Вероятности: большие отклонения величины встречаются реже.



Формула нормального закона распределения имеет следующий вид:
где \bar{x} - среднее значение; σ - среднее квадратическое отклонение (СКО).

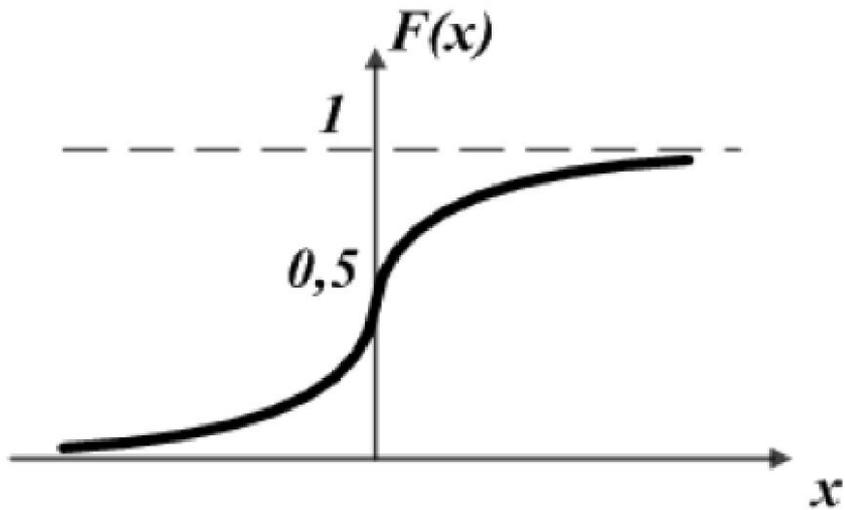
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

- вероятность того, что случайная величина лежит в интервале (x_1, x_2)

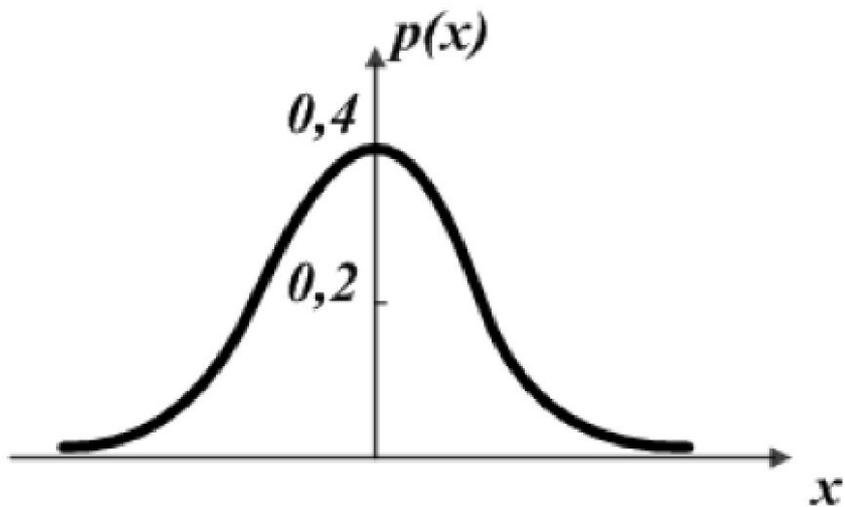
$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} xp(x)dx$$

Чем больше дисперсия (разброс, отклонение от среднего), тем ниже и шире кривая

Общий вид дифференциальной и интегральной функций распределения для нормальных законов представлен на рисунке



-- функция распределения



-- плотность распределения

Как в случае дискретных величин, для оценки законов распределения используют математическое ожидание $M(x)$ и дисперсию $D(x)$

Математическое ожидание – положение случайной величины на числовой оси (среднее значение), определяющее центр распределения, вокруг которого группируются значения случайной величины. Для расчета используется следующая формула:

$$M = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

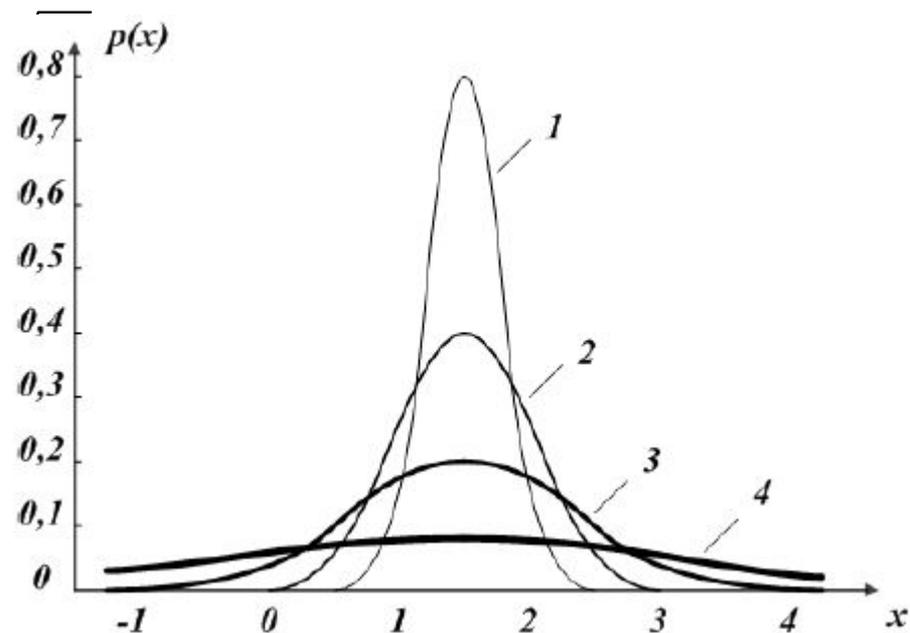
Дисперсия (СКО в квадрате) служит для определения разброса получаемых результатов относительно среднего значения и определяется :

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M)^2 p(x)dx;$$

$$\sigma = \sqrt{\quad}$$

Чем больше дисперсия, тем значительнее рассеяние результатов относительно среднего значения
Чем больше дисперсия (разброс, отклонение от среднего), тем ниже и шире кривая

Плотности распределения при мат. ожидания = 1.5 и СКО: 1 – 0.5; 2 – 1; 3 – 2; 4 – 5.



На практике все результаты измерений являются дискретными величинами, т. е. из всей генеральной совокупности (всех возможных значений) мы при измерении получаем некоторый ряд значений, который называется **выборкой**.

Полученная выборка должна быть репрезентативной, т. е. достаточно хорошо представлять пропорции генеральной совокупности.

Далее встает задача нахождения точечных оценок, характеризующих распределение величин, входящих в данную выборку. Эти оценки должны быть:

****состоятельными* (при увеличении объема выборки должны стремиться к истинному значению величины),

****несмещенными* (математическое ожидание оценки равно оцениваемой числовой характеристике) и

****эффективными* (иметь как можно меньшую дисперсию).

4.2. Использование нормального закон распределения для представления результатов измерений

Закон распределения $p(x)$ является наиболее полной характеристикой случайной величины, в частности, измеряемой физической величины

Числовая оценка характеристик нормального закона распределения

$$X = x[X] \quad x_1 = \mu + \Delta x_1; \quad \dots \quad x_N = \mu + \Delta x_N$$

μ – истинное значение измеряемой величины (его мы никогда не знаем),

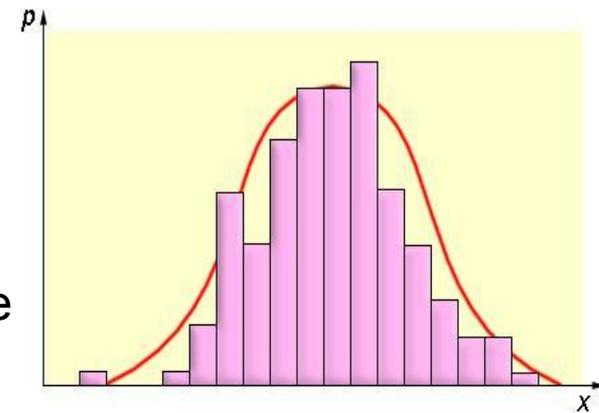
Δx_i – случайная погрешность при i -м наблюдении

В статистике доказано, что если Δx_i подчиняется нормальному распределению, то \bar{x} является наиболее полной оценкой истинного значения μ

Среднее значение (точечная оценка математического ожидания результата измерений):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \mu + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta x_i$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta x_i = 0$$
$$\bar{x} \rightarrow \mu$$



Среднее квадратическое отклонение наблюдений (СКО):

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

- характеризует разброс результатов наблюдений относительно \bar{x}

Полученные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения являются случайными величинами. Это проявляется в том, при повторении несколько раз серий из n наблюдений каждый раз будут получаться различные оценки \bar{x} и S_x . Рассеяние этих оценок принято оценивать СКО среднего:

Среднее квадратическое отклонение результата измерений (СКО среднего):

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

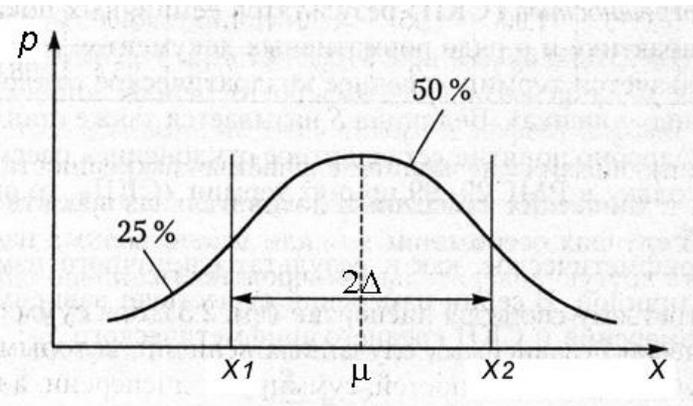
- характеризует отклонение \bar{x} относительно истинного значения μ

Интервальная оценка нормального закона распределения (квантильная оценка)

Для практики важно на основе полученных точечных оценок определить доверительный интервал, в границах которого с доверительной вероятностью P находится истинное значение измеряемой физической величины.

В метрологии используются *квантильные оценки доверительного интервала*. Под $100 \cdot P$ -процентным квантилем x_p понимают абсциссу такой вертикальной линии, слева от которой площадь под кривой плотности распределения равна $P\%$, т. е. квантиль – это значение случайной величины с заданной доверительной вероятностью P .

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

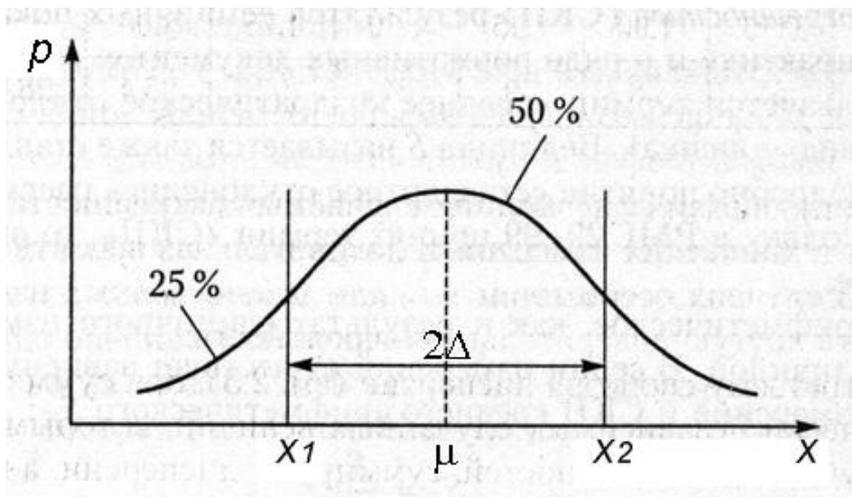


x_1, x_2 – квантили;

(x_1, x_2) – доверительный интервал
 P – доверительная вероятность

На рисунке – $x_1 = x_{0.25}$ – квантиль
порядка 0.25; $x_2 = x_{1-0.25} = x_{0.75}$

Интервальная оценка нормального закона распределения (квантильная оценка)



На рисунке — $x_1 = x_{0.25}$ — квантиль порядка 0.25; $x_2 = x_{1-0.25} = x_{0.75}$

Математическое ожидание распределения является 50 %-ным квантилем $x_{0,5}$ (справа и слева относительно него вероятности равны 50 %).

Между 25 %- и 75 %-ными квантилями заключено 50 % всех возможных значений случайной величины, а остальные 50 % лежат вне его. На основании такого похода вводят понятие квантильных значений погрешности, т. е. значений погрешности с заданной доверительной вероятностью P — границ интервала $\pm\Delta = (x_p - x_{1-p})/2$: на его протяжении встречается P % значений случайной величины, а $q = 1 - P$ значений остаются за пределами их интервала.

Интервальная оценка нормального закона распределения
(квантильная оценка)

Действия 1: провести N измерений, вычислить среднее арифметическое (принять за μ), вычислить СКО среднего арифметического (принять за σ), задаться доверительным интервалом Δ , рассчитать доверительную вероятность P

$$\bar{x} \pm \Delta; P$$

2. Результат измерений: среднее арифметическое с вероятностью P отклоняется от истинного значения не более чем на Δ

!!! Нормальный закон распределения – для выборки с большим количеством случайных величин.

$$N > 30$$

При малом количестве наблюдений ($n < 30$) пользуются не нормальным законом распределения, а распределением Стьюдента. Оно описывает плотность распределения отношением:



$$t = \frac{\bar{x} - x_u}{S_{\bar{x}}}$$

Стьюдент – псевдоним У.С. Госсета (1876-1937) – химика, работавшего в одной из пивоваренных фирм Великобритании. Он самостоятельно разработал статистику малых выборок. Поскольку в современной технике чаще всего исследуются небольшие по объему выборки (менее 30), то работа Стьюдента имеет большое практическое значение.

Вероятность того, что дробь Стьюдента в результате выполненных наблюдений примет некоторое значение в интервале от $-t_P$ до $+t_P$ можно рассчитать так:

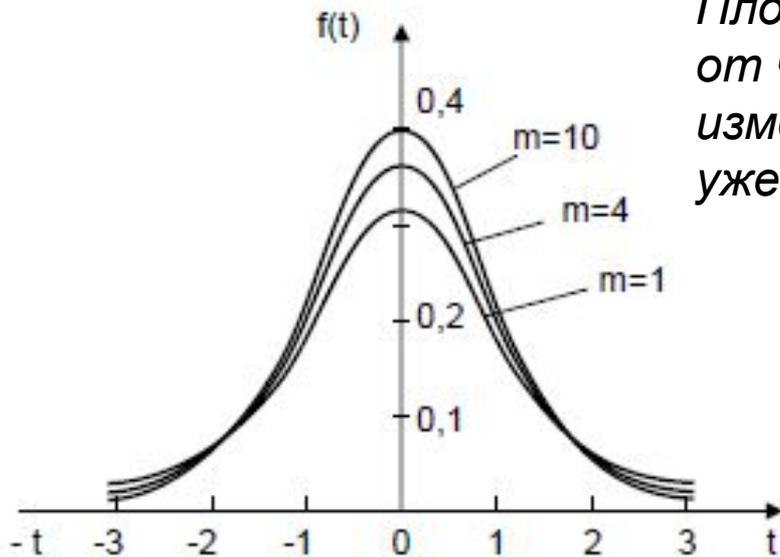
$$P\left\{-t_p < \frac{\bar{x} - x_u}{S_{\bar{x}}} < +t_p\right\} = \int_{-t_p}^{+t_p} S(t, k) dt$$

где k – число степеней свободы ($n - 1$). Коэффициенты Стьюдента табулированы. Поэтому с помощью распределения Стьюдента можно найти вероятность того, что отклонение среднего арифметического от истинного значения измеряемой величины не превышает следующей величины:

$$\Delta = t S_{\bar{x}}$$

- случайная погрешность

Плотность распределения Стьюдента зависит от числа степеней свободы (количества измерений). Чем больше число измерений, тем уже кривая (меньше дисперсия)

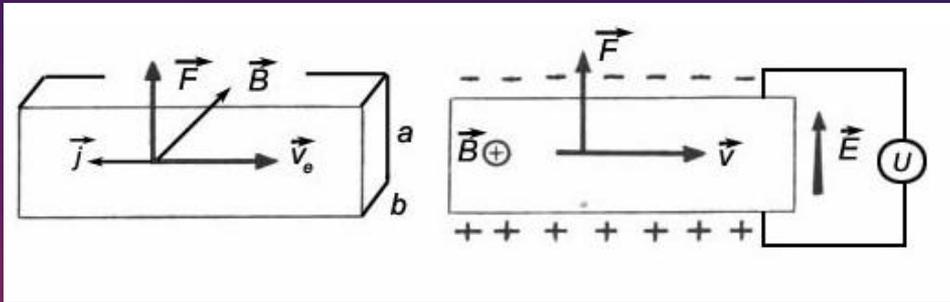


Коэффициенты Стьюдента

N	P			N	P		
	0,9	0,95	0,99		0,9	0,95	0,99
2	6,31	12,71	63,66	13	1,78	2,18	3,05
3	2,92	4,30	9,92	14	1,77	2,16	3,01
4	2,35	3,18	5,94	15	1,76	2,14	2,98
5	2,13	2,78	4,60	20	1,73	2,09	2,86
6	2,02	2,57	4,03	25	1,71	2,06	2,80
7	1,94	2,45	3,71	30	1,70	2,04	2,76
8	1,90	2,36	3,50	40	1,69	2,02	2,71
9	1,86	2,31	3,35	50	1,69	2,01	2,68
10	1,83	2,26	3,25	100	1,66	1,98	2,63
11	1,81	2,23	3,17				
12	1,80	2,20	3,11	бескон.	1,645	1,960	2,576

Действия 2: провести N измерений, вычислить среднее арифметическое, вычислить СКО среднего арифметического, задаться доверительной вероятностью P , определить коэффициент Стьюдента, рассчитать доверительный интервал $\Delta \quad \bar{x} \pm \Delta; P$

Эффект Холла и квантовый эффект Холла



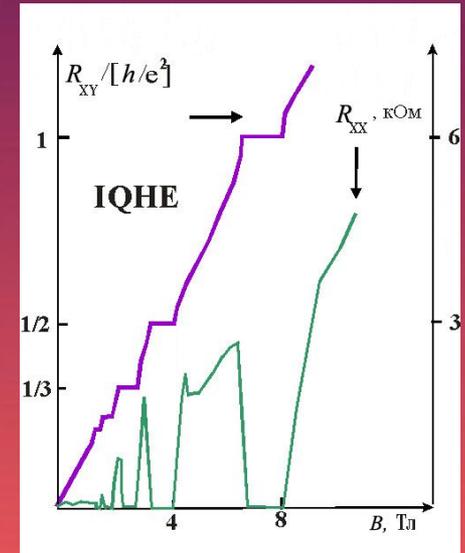
$$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}] \quad R_{xy} = \frac{U_y}{I_x}$$



GaAs/AlGaAs

IQHE - Integer Quantum Hall Effect.
Целый (нормальный) квантовый эффект Холла. Открыт в 1980 г. Ноб. премия 1985 г. (K.von Klitzing, G.Dorda, M.Pepper).

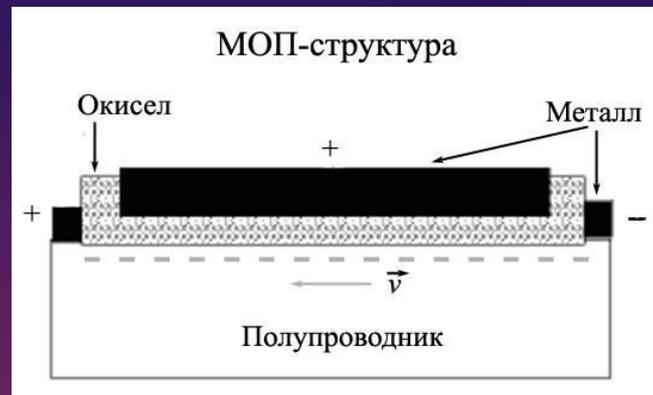
$$(R_{xy})_n = \frac{h}{ne^2};$$



К. фон Клитцинг



$$(R_{xy})_1 = 25812,807 \hat{I}i$$



QUANTΩ – автоматизированная, переносная система первичного сопротивления, которая представляет собой экономичное средство для точного переноса сопротивления устройства на основе квантового сопротивления Холла ($I=2$) на вторичные эталоны сопротивления. Переносит сопротивление устройства на основе квантового сопротивления Холла на стандартный резистор сопротивлением 1000Ω с точностью $<0,02$ ppm и повторением $<0,01$ ppm.