Лекция 10
Элементы линейной алгебры

Литература.

В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев.
Курс математики для технических высших учебных заведений
Учебное пособие часть I Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А. Пушкаря. 2012г. Лекция 24, 25, 26.

Матрицы, действия над матрицами, определители второго порядка и их свойства, определители высших порядков. Обратная матрица.

Система линейных уравнений, решение системы уравнений матричным способом, формулы Крамера, метод Гаусса.

24.1. Матрицы

Определение 24.1. *Прямоугольная таблица*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (24.1)$$

составленная из $m \times n$ чисел a_{ij}, называется матрицей размером $m \times n$.

Числа a_{ij}, входящие в матрицу, называются элементами матрицы. Горизонтальный ряд чисел называется строкой, а вертикальный – столбцом матрицы. Первый индекс i – номер строки $(i = 1, 2, ..., m)$, второй j – номер столбца $(j = 1, 2, ..., n)$. Матрицу принято обозначать заглавными буквами, например A, B и т.д.

Приведем основную терминологию матриц, которую будем использовать в дальнейшем.

- Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов $(m \neq n)$, называется прямоугольной.
- Матрица, в которой число строк равно числу столбцов $(m = n)$, называется квадратной. Причём число её строк или столбцов называется порядком матрицы.
  Например, матрица $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
  является квадратной матрицей 2-го порядка
- Последовательность элементов квадратной матрицы с одинаковыми индексами $(i = j)$ называется главной диагональю матрицы $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.
- Если в квадратной матрице все недиагональные элементы равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$), то матрица называется диагональной
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
- Квадратная диагональная матрица, у которой элементы главной диагонали равны единице, называется единичной матрицей E.
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

- Квадратная матрица, все элементы которой, расположенные выше (ниже) главной диагонали, равны нулю, называется треугольной.
- Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нуль-матрицей.
- Матрица, состоящая только из одной строки, называется матрицей-строкой
$$A = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$$
- Матрица, состоящая только из одного столбца, называется матрицей-столбцом.
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$
- Матрица B называется транспонированной по отношению к матрице A, если она получена из матрицы A заменой строк этой матрицы её столбцами, и, наоборот, столбцов строками. Транспонированная матрица обозначается A^T.

Например, по отношению к матрице
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ транспонированной будет $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$

24.2. Действия над матрицами

Определение 24.2. *(Равенство матриц.) Две матрицы A и B называются равными ($A = B$), если они имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов и их соответствующие элементы равны, $a_{ij} = b_{ij}$.*

Определение 24.3. *(Сложение матриц.) Суммой двух матриц A и B одинакового размера ($m \times n$) называется матрица C того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:*

$$A + B = C, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \qquad (24.2)$$

Пример 24.1. *Сложить матрицы* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

Сложение матриц подчиняется переместительному и сочетательному законам:

$$A + B = B + A, \qquad (A + B) + C = A + (B + C).$$

Нуль-матрица при сложении матриц выполняет роль обычного нуля при сложении чисел:

$$A + 0 = A.$$

Определение 24.4. *Произведением матрицы A на число α называется матрица B:*

$$B = A \cdot \alpha = \alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij}). \qquad (24.3)$$

Пример 24.2. *Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ на число 3.*

Решение: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 3 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$.

При умножении матрицы на нуль получается нуль-матрица.

Определение 24.5. *Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на матрицу $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij}) = A \cdot B$, каждый элемент которой определяется выражением*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Как видно из определения произведения двух матриц, перемножить можно лишь матрицы, у которых число столбцов матрицы сомножителя A равно числу строк матрицы сомножителя B.

Например, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$, то

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

В результате перемножения двух матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько их имеет матрица-множимое, и столько столбцов, сколько их имеет матрица множитель.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 - 1\cdot 3 & 3\cdot 1 - 1\cdot 1 \\ -1\cdot 1 + 2\cdot 3 & -1\cdot 1 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 1\cdot(-1) & 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 \\ 3\cdot 3 + 1\cdot(-1) & 3\cdot(-1) + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Эти примеры показывают, что произведение двух матриц, вообще говоря, не подчиняется переместительному закону:

$$AB \neq BA.$$

Определение 24.6. *Матрицы A и B, для которых $AB = BA$, называются коммутативными.*

Можно проверить, что умножение матриц подчиняется сочетательному закону

$$A(BC) = (AC)B$$

и распределительному закону $(A + B)C = AC + BC.$

Замечание 24.1. *Как известно, произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц подобное обстоятельство может и не иметь место, т. е. произведение двух не нулевых матриц может оказаться равным нуль-матрице.*

Пример 24.4. *Умножить матрицу* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *на матрицу* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Решение: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

24.3. Определители второго порядка и их свойства

Рассмотрим квадратную матрицу 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определение 24.7. *Определителем (или детерминантом) второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число* $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. *Определитель обозначают символом*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{24.4}$$

Таким образом, определитель второго порядка можно вычислить (раскрыть) по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{24.5}$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются элементами определителя.

Пример 24.5. *Вычислить определитель матрицы* $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Решение: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 5 \cdot 3 = -23.$

Приведем свойства определителя второго порядка.

- Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

- При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

- Определитель с двумя одинаковыми строками (или столбцами) равен нулю.
- Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k\,a_{12} \\ a_{21} & k\,a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

- Если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.
- Если к элементам какой-либо строки (или столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины, т. е. $\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$

24.4. Определители высших порядков

Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (24.6)$$

Определение 24.8. *Определителем (или детерминантом) n-го порядка, соответствующим данной квадратной матрице, называют число, получаемое из элементов матрицы A по определённому закону – закону раскрытия определителя.*

Это число обозначается
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (24.7)$$

Прежде, чем формулировать закон раскрытия определителей высшего порядка, введем понятие минора и алгебраического дополнения.

Определение 24.9. *Минором, соответствующим данному элементу определителя n-го порядка, называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из данного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.*

Миноры будем обозначать заглавными буквами M_{ij} с двумя индексами. Так, например, минор M_{12}, соответствующий элементу a_{12} определителя (24.7), есть определитель $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Он получается, если вычеркнуть в определителе n-го порядка первую строку и второй столбец.

Определение 24.10. *Алгебраическим дополнением элемента определителя называется его минор, взятый со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца, в которых стоит элемент, чётна, и со знаком минус, если эта сумма нечётна.*

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается через A_{ij}. Здесь i означает номер строки, а j-номер столбца, на пересечении которых находится данный элемент.

Связь между алгебраическим дополнением элемента и его минором выражается следующим равенством:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{24.8}$$

Например: $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$; $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$.

В этом случае закон раскрытия определителей можно записать следующим образом:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \text{для любых} \quad i \tag{24.9}$$

или

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \text{для любых} \quad j. \tag{24.10}$$

Этот результат можно сформулировать следующим образом.
Определитель n-го порядка равен сумме попарных произведений элементов какой-либо его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.
Так как согласно определениям 24.9 и 24.10, алгебраическое дополнение любого элемента определителя n – го порядка является определителем $n-1$-го порядка, из формул (24.9) и (24.10) следует, что любой *определитель n-го порядка сводится к сумме n определителей $n-1$-го порядка.*

В качестве примера использования формул (24.9) и (24.10) приведем формулы разложения определителя третьего порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{24.11}$$

по элементам первой строки $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$, и элементам второго столбца $|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$.

Замечание 24.2. *Для определителя 2-го порядка* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, *алгебраическим дополнением, согласно (24.8),* $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$, $A_{21} = -a_{12}$, $A_{22} = a_{11}$.
И раскрывая $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ *по (24.9) или (24.10) получим формулу (24.5).*

Пример 24.6. *Вычислить определитель третьего порядка*

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (24.12)$$

Воспользуемся формулой (24.9) и раскроем определитель (24.12), например, по элементам третьей строки $(i = 3)$:

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \qquad (24.13)$$

Предварительно вычислим алгебраические дополнения, входящие в формулу (24.13)

$$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = 1\begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = (-2)10 - 9(-10) = -20 + 90 = 70;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -1\begin{vmatrix} -1 & -10 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = -[(-1)10 - 1(-10)] = 0;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = 1\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = (-1)9 - 1(-2) = -9 + 2 = -7.$$

Подставляем в формулу (24.13)

$$|A| = 1 \cdot 70 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 7 = 70.$$

Замечание 24.3. *Рекомендуется раскрывать определители по элементам той строки или того столбца, которые содержат нулевые элементы, т.к. это значительно сокращает процесс вычислений.*

Все свойства определителя 2-го порядка, приведенные в п. 24.3, без всяких изменений переносятся и на определители n-го порядка.

Свойства определителя могут быть использованы для того, чтобы в какой-либо строке (или столбце) все элементы, кроме одного, сделать равными нулю. Покажем это на примере вычисления определителя (24.12):

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$ из примера 24.6.

Р е ш е н и е: Прибавим к элементам первой строки элементы третьей строки и вычтем из элементов второй строки элементы третьей строки

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Теперь раскроем полученный определитель по элементам первого столбца и получим результат, известный из решения примера 24.6.

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 1\begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 70.$$

Таким образом, мы можем сформулировать общее *правило*, согласно которому *любой определитель n-го порядка может быть сведен к одному определителю $n-1$-го порядка.* И, следовательно, применяя последовательно это правило, мы можем свести определитель n-го порядка к числу. Вычисление определителей часто удобнее и быстрее проводить, пользуясь этим правилом.

25.1. Обратная матрица

Рассмотрим так называемую обратную матрицу, понятие которой вводится только для квадратной матрицы.

Определение 25.1. *Если A – квадратная матрица, то обратной для неё матрицей называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию*

$$AA^{-1} = E. \tag{25.1}$$

Можно доказать, что матрицы A и A^{-1} являются коммутативными:

$$A^{-1}A = E.$$

Приведем теперь следующую основную теорему.

Теорема 25.1. (**об обратной матрице**): *Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, т.е. чтобы её определитель был отличен от нуля.*

Вычисляется обратная матрица по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{25.2}$$

Пример 25.1. *Дана матрица* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Найти обратную матрицу.*

Р е ш е н и е: Вычислим определитель матрицы A

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 27 + 2 - 24 = 5.$$

Находим алгебраические дополнения элементов этого определителя по формулам $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2,\ A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Следовательно, $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

25.3. Элементарные преобразования матриц

Элементарными называются следующие преобразования:

- умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на одно и тоже число, отличное от нуля;
- прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и тоже число;
- перемена местами строк (столбцов) матрицы;
- отбрасывание строк (столбцов) матрицы, все элементы которых равны нулю.

Матрицы, получающиеся одна из другой при элементарных преобразованиях, называются *эквивалентными*.

26.1. Система линейных уравнений

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k + \cdots + a_{in}x_n = c_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = c_m. \end{array}\right. \qquad (26.1)$$

Здесь первый индекс в обозначении коэффициента a_{ij} означает номер уравнения, а второй номер неизвестного. Каждая неизвестная обозначена одной буквой x с индексом, означающим её номер.
Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Совместная система линейных уравнений называется определённой, если она имеет единственное решение, и неопределённой, если она имеет бесчисленное множество решений.
Две совместные системы уравнений называются равносильными, если каждое решение первой системы является решением второй и, обратно, каждое решение второй системы является решением первой.

Можно доказать, что следующие преобразования переводят систему уравнений в равносильную ей:

- перемена местами двух любых уравнений;
- умножение обеих частей любого из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;
- перемена слагаемых, содержащих разные неизвестные, местами;
- прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое действительное число.

Эти преобразования, по аналогии с элементарными преобразованиями матриц, будем называть элементарными.
Возможно, что после нескольких таких преобразований в системе появится уравнение, все коэффициенты которого и свободный член равны нулю. Поскольку такому уравнению удовлетворяют любые значения неизвестных, оно может быть отброшено. В этом случае мы получим систему, равносильную данной и содержащую на одно уравнение меньше, чем данная система.
Если в результате применения элементарных преобразований в системе появится уравнение, в котором все коэффициенты левой части равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то это указывает на то, что уравнение не удовлетворяет никаким значениям неизвестных и, следовательно, полученная система несовместна. Поэтому несовместной является и первоначальная система.
Если обозначить через A матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных (26.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (26.2)$$

Через X – матрицу-столбец, составленную из неизвестных

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (26.3)$$

Через C – матрицу-столбец, составленную из свободных членов

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad (26.4)$$

Произведение $A \cdot X$ есть матрица–столбец

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \qquad (26.5)$$

Тогда система линейных уравнений может быть записана в матричном виде

$$A \cdot X = C. \qquad (26.6)$$

26.3. Решение системы линейных уравнений матричным методом

Если число неизвестных системы равно числу уравнений и матрица А системы невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$, то уравнение $A \cdot X = C$ решается следующим образом:

- Умножаем обе части уравнения на матрицу A^{-1}, обратную матрице A :

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot C.$$

- Используя сочетательный закон умножения матриц, можно записать:

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot C.$$

- Так как $A^{-1} \cdot A = E$, а $E \cdot X = X$, то решение матричного уравнения получится в виде:

$$X = A^{-1} \cdot C. \qquad (26.9)$$

Пример 26.1. *Решить матричным способом систему уравнений*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: В матричной форме эта система запишется в виде $AX = C$. Здесь $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Матрица A^{-1} найдена нами в примере 25.1.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}.$$

Решение системы записываем в виде

$$X = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда на основании определения равенства матриц следует, что $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти значения неизвестных удовлетворяют данной системе.

26.4. Формулы Крамера

Рассмотрим ещё раз систему n уравнений с n неизвестными $A \cdot X = C$, для которой $|A| \neq 0$. Запишем матричное равенство (26.9) в следующем виде:

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} \frac{A_{21}}{|A|} \cdots \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} \frac{A_{22}}{|A|} \cdots \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} \frac{A_{2n}}{|A|} \cdots \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ .. \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n} A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ .. \\ c_n \end{pmatrix}$$

Или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} c_1 + A_{21} c_2 + \cdots + A_{n1} c_n \\ A_{12} c_1 + A_{22} c_2 + \cdots + A_{n2} c_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n} c_1 + A_{2n} c_2 + \cdots + A_{nn} c_n \end{pmatrix}.$$

Вспомним, что две матрицы равны, если равны их соответствующие элементы, т.е.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{|A|}(A_{11} c_1 + A_{21} c_2 + \cdots + A_{n1} c_n) \\ x_2 = \frac{1}{|A|}(A_{12} c_1 + A_{22} c_2 + \cdots + A_{n2} c_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \frac{1}{|A|}(A_{1n} c_1 + A_{2n} c_2 + \cdots + A_{nn} c_n) \end{cases} \qquad (26.10)$$

Обратим внимание на то, что выражения в круглых скобках равенств (26.10) представляют собой определители, полученные из определителя системы $|A|$ заменой соответствующего номеру неизвестного столбца столбцом свободных членов данной системы уравнений (26.1). Обозначим их следующим образом:

$$\Delta_{x_1} = A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + \dots + A_{n1}c_n = \begin{vmatrix} c_1\, a_{12} \dots a_{1n} \\ c_2\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_n\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = A_{12}c_1 + A_{22}c_2 + \dots + A_{n2}c_n = \begin{vmatrix} a_{11}\, c_1 \dots a_{1n} \\ a_{21}\, c_2 \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\, c_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

и т.д.

С учётом этих обозначений формулы (26.10) можно переписать в виде:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{|A|}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{|A|}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{|A|}. \qquad (26.11)$$

Формулы (26.11) называются формулами Крамера и являются следствием формулы (26.9).

Пример 26.2. *Решить систему уравнений методом Крамера*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Ранее определитель системы $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ уже был вычислен: $|A|=5$.

Вычислим определители неизвестных:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 10 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10.$$

Используя формулы Крамера, найдем:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{|A|} = \frac{5}{5} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{|A|} = \frac{-5}{5} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{|A|} = \frac{10}{5} = 2.$$

26.5. Метод Гаусса для систем линейных уравнений (метод последовательного исключения)

Метод Гаусса – метод решения систем линейных уравнений, в которых число неизвестных может быть либо равно числу уравнений ($m = n$), либо отлично от него.

Метод Гаусса заключается в следующем. Допустим, что в системе (26.1) коэффициент при первом неизвестном $a_{11} \neq 0$.
Если $a_{11} = 0$, то всегда можно перенумеровать неизвестные так, чтобы коэффициент при первом неизвестном стал отличен от нуля.
Исключим сначала неизвестное x_1 из всех уравнений системы, кроме первого.
Для этого прежде всего разделим обе части первого уравнения на коэффициент $a_{11} \neq 0$; тогда получим новую систему, равносильную данной:

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \dfrac{a_{1k}}{a_{11}}x_k + \cdots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \dfrac{c_1}{a_{11}}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k + \cdots + a_{in}x_n = c_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = c_m. \end{array}\right. \qquad (26.12)$$

Умножим теперь первое уравнение системы (26.12) на a_{21} и вычтем из второго уравнения. Затем умножим первое уравнение на a_{31} и вычтем из третьего уравнения и т.д. В результате получим новую систему, также равносильную данной:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1k}x_k + \cdots + a'_{1n}x_n = c'_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2k}x_k + \cdots + a'_{2n}x_n = c'_2, \end{cases}$$

Здесь введены обозначения: $i = 2, 3, \ldots, n;$

Ошибка в учебнике

$$a'_{1k} = \frac{a_{1k}}{a_{11}}, \quad a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{1k}}{a_{11}}a_{i1}; \qquad c'_1 = \frac{c_1}{a_{11}}, \quad c'_i = c_i - \frac{c_1}{a_{11}}a_{i1}; \qquad i = 2, 3, \ldots, m.$$

Здесь введены обозначения:

Надо

$$a'_{1k} = \frac{a_{1k}}{a_{11}}, \quad a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{1k}}{a_{11}}a_{i1}; \quad c'_1 = \frac{c_1}{a_{11}}, \quad c'_i = c_i - \frac{c_1}{a_{11}}a_{i1}; \quad i = 2, 3, \ldots, m.$$

Разделим теперь второе уравнение системы (26.13) на коэффициент a'_{22}, предполагая, что он отличен от нуля; затем умножим второе уравнение полученной системы последовательно на $a'_{32}, \ldots, a'_{i2}, \ldots, a'_{m2}$ и вычтем поочередно из соответствующих уравнений системы, кроме первого и второго.

Если, продолжая этот процесс, мы придем к системе, содержащей уравнение, в котором все коэффициенты левой части равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то эта система несовместна.

В том случае, когда система совместна, мы придем либо к системе

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1k}x_k + \cdots + b_{1n}x_n = B_1, \\ \qquad\quad x_2 + \cdots + b_{2k}x_k + \cdots + b_{2n}x_n = B_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_r + \cdots + b_{rn}x_n = B_r. \end{cases} \tag{26.14}$$

либо к системе

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1k}x_k + \cdots + b_{1n}x_n = B_1, \\ \qquad\quad x_2 + \cdots + b_{2k}x_k + \cdots + b_{2n}x_n = B_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_k + \cdots + b_{kn}x_n = B_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n = B_n. \end{cases} \tag{26.15}$$

Система вида (26.14) называется ступенчатой, а система вида (26.15)– треугольной.
В случае треугольной системы из последнего уравнения находим $x_n = B_n$; затем подставляя значения x_n в предыдущее уравнение, находим x_{n-1} и т.д.
Таким образом, если данная система уравнений (26.1) после выполнения ряда элементарных преобразований приводит к треугольной системе (26.15), то это означает, что система (26.1) является совместной и определённой.

Если же данная система (26.1) после элементарных преобразований приводится к ступенчатой системе (26.14), то система (26.1) совместна и неопределённа.

В самом деле, перенося в каждом из уравнений системы (26.14) члены с неизвестными $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в правую часть, получим систему вида

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1p}x_p = B_1 - b_{1,p+1}X_{p+1} - \cdots - b_{1n}x_n, \\ \qquad x_2 + \cdots + b_{2p}x_p = B_2 - b_{2,p+1}X_{p+1} - \cdots - b_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad x_r = B_r - b_{r,r+1}X_{r+1} - \cdots - b_{rn}x_n. \end{cases}$$

Придавая неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$, которые называются свободными, произвольные значения $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$, получим треугольную систему, из которой последовательно найдем все остальные неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$, которые называются базисными. Так как числа $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$ могут иметь различные значения, то исходная система (26.1) имеет бесчисленное множество решений.

Замечание 26.1. *Часто при преобразованиях системы по Гауссу целесообразно переставлять строки и столбцы с неизвестными.*

Пример 26.3. *Решить систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение:

Совершим элементарные преобразования, которые каждый раз будут приводить нас к равносильной исходной системе уравнений.

- Переставим местами первое и второе уравнения системы для удобства дальнейших преобразований:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

- Умножим первое уравнение на 3 и вычтем из второго, умножим первое уравнение на 5 и вычтем из третьего уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ -7x_2 - x_3 = 5, \\ -12x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

- Поменяем члены, содержащие x_2 и x_3 местами,

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_2 = 0, \\ x_3 + 7x_2 = -5, \\ -x_3 - 12x_2 = 10. \end{cases}$$

- Сложим второе и третье уравнения $\left\{\begin{aligned} x_1 + x_3 + 3x_2 &= 0, \\ x_3 + 7x_2 &= -5, \\ -5x_2 &= -5. \end{aligned}\right.$

$x_2 = -1$

$x_3 = -5 - 7x_2 = 2$

$x_1 = -3x_2 - x_3 = (-3)(-1) - 2 = 3 - 2 = 1.$

Прежде, чем перейти к решению других примеров по методу Гаусса, заметим, что *нет необходимости каждый раз переписывать системы уравнений. Все преобразования можно проводить над расширенной матрицей системы (26.8).*

Пример 26.4. *Решить систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение:
Составим расширенную матрицу системы и выполним над ней элементарные преобразования, указанные в методе Гаусса

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \end{array}\right).$$

Выше вертикальной прямой отделен столбец свободных членов от столбцов коэффициентов при неизвестных, так как его, в отличие от других столбцов, нельзя переставлять.

Полученный результат запишем в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ \qquad 11x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Если в качестве базисных неизвестных выбрать, например, x_1 и x_2, тогда свободными неизвестными будут x_3 и x_4 после элементарных преобразований следует

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{11} - \dfrac{14}{11}x_3 + \dfrac{2}{11}x_4, \\[2ex] x_2 = \dfrac{2}{11} - \dfrac{6}{11}x_3 - \dfrac{7}{11}x_4. \end{cases}$$

Полагая, например, $x_3 = 1, x_4 = 1$, получим $x_1 = -1, x_2 = -1$, т.е. некоторое частное решение системы уравнений.

Пример 26.5. *Решить систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 12, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 8x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$$

Р е ш е н и е:

Составляем расширенную матрицу и выполняем над её строками элементарные преобразования. Поскольку при применении метода Гаусса к данной системе целесообразно менять местами слагаемые, содержащие неизвестные, будем указывать их над соответствующими столбцами.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 10 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 5 & 3 & 10 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 6 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 6 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -22 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -22 \end{array}\right) \end{array}.$$

Полученной матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_2 + 2x_1 + x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 12, \\ x_4 = 0, \\ 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -22. \end{cases}$$

Так как последнее уравнение этой системы противоречиво, то она является несовместной. Следовательно, несовместна и равносильная ей исходная система уравнений, т.е. она не имеет решения.

25.2. Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (25.3)$$

имеющую m строк и n столбцов. Выделим в этой матрице произвольные k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k.

Напомним, что минором k-го порядка матрицы A называется определитель квадратной матрицы, получающийся из данной матрицы выделением произвольных k строк и k столбцов.

Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

имеющей три строки и четыре столбца, одним из миноров третьего порядка является определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, полученный выделением первой, второй и третьей строк и первого, второго и третьего столбцов матрицы A. Минором второго порядка является, например, определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$.

Сами элементы матрицы можно рассматривать как миноры первого порядка. Некоторые из миноров матрицы могут быть равны нулю, другие – отличны от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25.2. *Рангом матрицы называется наибольший из порядков отличных от нуля её миноров.*

Если ранг матрицы A равен r, то это означает, что в матрице A имеется хотя бы один отличный от нуля минор порядка r, но всякий минор порядка, большего чем r, равен нулю. Ранг матрицы A будем обозначать символом $r(A)$.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Единственный минор четвёртого порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

как определитель, все элементы одной из строк которого равны нулю. Один из миноров третьего порядка отличен от нуля, например

$M_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$. Следовательно, ранг данной матрицы равен 3, т.е. $r(A) = 3$.

25.3. Элементарные преобразования матриц

При определении ранга матрицы, как правило, приходится вычислять большое число определителей. Чтобы облегчить этот процесс, применяют специальные приемы. Прежде чем излагать эти приемы, введем понятие об *элементарных преобразованиях матрицы*.

Элементарными называются следующие преобразования:

- умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на одно и тоже число, отличное от нуля;
- прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и тоже число;
- перемена местами строк (столбцов) матрицы;
- отбрасывание строк (столбцов) матрицы, все элементы которых равны нулю.

Матрицы, получающиеся одна из другой при элементарных преобразованиях, называются *эквивалентными*. Эквивалентные матрицы, вообще говоря, не равны друг другу, но, как можно доказать, *ранги эквивалентных матриц равны*. Этим обстоятельством пользуются при вычислении ранга матрицы.

Пример 25.2. *Вычислить ранг матрицы* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

Р е ш е н и е: Вычтем из 2-ой строчки 1-ую и результат поставим в 1-ую строчку

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из второй и третьей строк матрицы A_1 первую строку, умноженную соответственно на 3 и 5, получим матрицу

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из третьей строки матрицы A_2 вторую строку, получим матрицу

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отбрасывая в матрице A_3 строку, состоящую из нулей, получаем матрицу

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

ранг которой равен, очевидно, двум. Следовательно, ранг данной матрицы A также равен двум, т.е. $r(A) = 2$.

Спасибо за внимание