Лекция 16 Функциональные ряды. Формула и ряд Тэйлора и Маклорена

Литература.

В.Г. Зубков, В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев. Курс математики для технических высших учебных заведений Учебное пособие часть I Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А. Пушкаря. 2012г. Лекции 18, 19.

Область сходимости функционального ряда. Правильно сходящиеся ряды и их свойства. Степенные ряды.

Многочлен Тейлора.Формула Тейлора. Ряд Тейлора. Формулы и ряды Тейлора для некоторых элементарных функций и использование их для вычисления пределов и в приближённых вычислениях.

18. Функциональные ряды

18.1. Область сходимости функционального ряда

Ранее мы познакомились с рядами, членами которых являются числа. Рассмотрим теперь ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x). \qquad (18.1)$$

Определение 18.1. *Ряд (18.1), членами которого являются функции, определённые в некоторой области изменения аргумента x, называется функциональным рядом.*

Если в функциональный ряд вместо x подставить некоторое значение x_0 из области определения всех его функций, то получится числовой ряд.

Определение 18.2. *Точка $x = x_0$, при подстановке которой в (18.1) получится сходящийся числовой ряд, называется точкой сходимости функционального ряда (18.1).*

Определение 18.3. *Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его областью сходимости.*

Частичная сумма функционального ряда, т.е. сумма первых n его членов

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) \qquad (18.2)$$

является функцией переменой x, определённой в области сходимости ряда. Действительно, из определения области сходимости функционального ряда следует, что для любой точки x этой области существует предел $S_n(x)$ при $n \to +\infty$. В точках же, не принадлежащих области сходимости, $S_n(x)$ не имеет предела. *Если функциональный ряд сходится и имеет сумму $S(x)$, то разность $S(x) - S_n(x)$, как и для числового ряда, называется n-м остатком ряда и обозначается* $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

Очевидно, что если ряд сходится, то должен быть выполнен необходимый признак сходимости, т.е.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(x) = 0 \qquad (18.3)$$

во всех точках сходимости ряда, где также

$$\lim_{n \to +\infty} r_n(x) = 0. \qquad (18.4)$$

Для определения области сходимости функционального ряда обычно сначала используют признак Даламбера (теорема 11.4), применяемый к ряду, составленному из абсолютных величин ряда (18.1):

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| < 1. \tag{18.5}$$

Все точки x, удовлетворяющие (18.5), входят в область сходимости ряда.
Из признака Даламбера следует, что в случае, если предел последующего члена ряда к предыдущему равен единице, ряд может сходиться или расходиться. Поэтому в граничных точках промежутка, точки которого удовлетворяют (18.5), ряд также может сходиться, так как в них

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = 1. \tag{18.6}$$

Вопрос о сходимости ряда в точках удовлетворяющих (18.6), решается непосредственной подстановкой их значений в ряд (18.1).

Пример 18.1. *Определить область сходимости функционального ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+3)^n}.$$

Р е ш е н и е:

$$u_n = \frac{1}{n(x+3)^n}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(x+3)^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n(x+3)^n}{(n+1)(x+3)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{|x+3|} < 1.$$

Следовательно, $|x+3| > 1 \Rightarrow x > -2$ и $x < -4$.

Проверим сходимость ряда в точках $x = -2$ и $x = -4$:

- $x = -2$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+3)^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический ряд, расходится;
- $x = -4$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+3)^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(-1)^n}$ – знакочередующийся ряд, сходится по признаку Лейбница, но сходится условно, так как ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, является расходящимся.

Таким образом, область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+3)^n}$ состоит из всех точек $x \in (-\infty, -4] \cup (-2, +\infty)$.

18.2. Правильно сходящиеся функциональные ряды и их свойства

Известно, что сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная, и производная суммы конечного числа функций равна сумме производных этих функций. Функциональные же ряды содержат бесконечное число слагаемых и указанные свойства не всегда справедливы и для них.

Определение 18.4. *Функциональный ряд (18.1) называется правильно сходящимся в области D, принадлежащей области его сходимости, если в любой точке этой области все члены ряда не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов сходящегося знакоположительного ряда.*

Теорема 18.1. *Всякий функциональный ряд, правильно сходящийся в области D, сходится абсолютно в любой точке этой области.*

Теорема 18.2. *Если ряд из непрерывных функций правильно сходится в области D, то его сумма есть функция непрерывная в этой области.*

Теорема 18.3. *Если ряд (18.1), составленный из функций, имеющих непрерывные производные, сходится в области D и его сумма равна $S(x)$, а ряд из производных его членов сходится в этой области правильно, то производная суммы ряда $S'(x)$ равна сумме ряда, составленного из производных его членов. Это значит, что такой ряд можно почленно дифференцировать в области D.*

18.3. Степенные ряды

Определение 18.5. *Степенным рядом называется функциональный ряд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots, \qquad (18.8)$$

членами которого являются произведения постоянных $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_n$ на разность $(x - x_0)$ в соответствующих целых степенях n. Постоянные $a_1,\ \ldots,\ a_n, \ldots$ называются коэффициентами степенного ряда.

Если $x_0 = 0$, степенной ряд (18.8) примет вид

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots, \quad (18.9)$$

который мы прежде всего и рассмотрим.

Определим область сходимости этого ряда. Для этого рассмотрим знакоположительный ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (18.9) и применим к нему достаточный признак сходимости Даламбера (18.5).

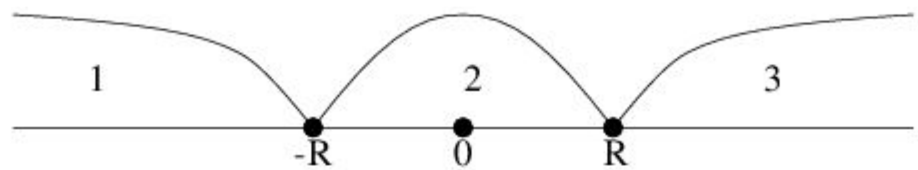
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

Откуда

$$|x| < \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R. \qquad (18.10)$$

Определение 18.6. *Число* $R = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *называется радиусом сходимости степенного ряда (18.9), при всех* $|x| < R$ *ряд абсолютно сходится, при* $|x| > R$ *– расходится. Интервал* $(-R; R)$ *называется интервалом сходимости ряда (18.9).*

В точках $x = \pm R$ сходимость или расходимость ряда устанавливается проверкой сходимости числовых рядов, полученных после подстановки в (18.9) $x = -R$ и $x = R$. Областью сходимости степенного ряда (18.9) является интервал $(-R; R)$, к которому, в зависимости от конкретных случаев, могут быть добавлены один или оба конца отрезка $[-R; R]$ (рис. 103). В каждой точке интервала $(-R; R)$ ряд (18.9) сходится абсолютно.



1 – область, где ряд расходится;
2 – область, где ряд сходится;
3 – область, где ряд расходится.

Рис. 103. *Область сходимости степенного ряда*

Очевидно, любой степенной ряд вида (18.9) сходится при $x = 0$. Если других точек сходимости нет, радиус сходимости $R = 0$. Если же ряд сходится при любых $x \in (-\infty; +\infty)$, то будем считать, что радиус сходимости $R = +\infty$.

Для степенных рядов может быть доказана теорема.

Теорема 18.4. *Пусть степенной ряд (18.9) имеет интервал сходимости $(-R; R)$, а $r < R$ произвольное положительное число. Тогда ряд (18.9) является правильно сходящимся на отрезке $[-r; r]$. По свойству правильно сходящихся рядов:*

- *Степенной ряд (18.9) абсолютно сходится в любой точке интервала сходимости и, следовательно, степенные ряды можно почленно складывать и умножать (как многочлены). При этом интервалом сходимости полученного степенного ряда будет множество всех точек, в которых сходятся складываемые или перемножаемые ряды.*
- *Сумма степенного ряда (18.9) является непрерывной функцией в каждой точке его интервала сходимости.*
- *Степенной ряд (18.9) можно почленно дифференцировать в любой точке его интервала сходимости.*

Естественно, что радиус сходимости степенного ряда (18.8) также равен

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

однако интервал сходимости будет

$$(x_0 - R; x_0 + R), \tag{18.11}$$

т.к. применив к ряду (18.8) признак Даламбера, получим

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

и, следовательно, ряд (18.8) сходится в интервале

$$|x-x_0| < \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R. \tag{18.12}$$

В точках $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$ сходимость устанавливается так же, как и для ряда (18.9) в точках $x = -R$ и $x = R$.

19. Формула и ряд Тейлора

Формула и ряд Тейлора относятся к числу важнейших понятий математического анализа. Они широко используются в математике. В частности, в нашем курсе мы будем использовать их при исследовании функций, приближённом вычислении значений функций, численном решении уравнений и оценке возникающих при этом ошибок.

19.1. Многочлен Тейлора

Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в некотором интервале, содержащем точку x_0. Построим многочлен степени $m < n$

$$P_m(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + \dots + C_m(x - x_0)^m = \sum_{k=0}^{m} C_k(x - x_0)^k, \qquad (19.1)$$

коэффициенты которого определим из условия совпадения значений этого многочлена и его m производных с соответствующими значениями функции $y = f(x)$ и её производных в точке x_0.

$$\begin{cases} P_m(x_0) = C_0 = f(x_0), \\ P'_m(x_0) = C_1 = f'(x_0), \\ P''_m(x_0) = 2 \cdot 1 \cdot C_2 = f''(x_0), \\ P'''_m(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot C_3 = f'''(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_m^{(k)}(x_0) = k \cdot (k-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot C_k = f^{(k)}(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_m^{(m)}(x_0) = m \cdot (m-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot C_m = f^{(m)}(x_0). \end{cases} \qquad (19.2)$$

Члены в производных от многочлена (19.1), содержащие множитель $(x - x_0)$ в точке x_0, равны нулю. Производные порядка выше m от многочлена m-й степени также равны нулю. Из (19.2) имеем

$$C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, k = 0, 1, \ldots, m. \qquad (19.3)$$

В (19.3) положено $0! = 1, f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.
Следовательно, искомый многочлен (19.1) с коэффициентами C_k, определяемыми по формуле (19.3), будет

$$P_m(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m = \qquad (19.4)$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Определение 19.1. *Многочлен (19.4) называется m-м многочленом Тейлора функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$.*

Если функция $f(x)$ сама по себе является многочленом степени m, то запись ее в виде (19.4) всегда возможна и означает лишь представление данного многочлена по степеням разности $(x - x_0)$.

Пример 19.1. *Представить функцию $f(x) = x^2$ в виде многочлена Тейлора по степеням $(x-3)$.*

Р е ш е н и е: Имеем $f(3) = 9, f'(3) = 6, f''(3) = 2$. Все производные выше второго порядка от $f(x) = x^2$ равны нулю. Следовательно, многочлен Тейлора при $x_0 = 3$ для $f(x) = x^2$ имеет вид

$$P_2(x) = 9 + 6(x-3) + (x-3)^2.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, очевидно, получим данную функцию $f(x) = x^2$.

19.2. Формула Тейлора

Если функция $f(x)$ не является многочленом, её всегда можно представить в виде

$$f(x) = P_m(x) + R_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_m(x). \qquad (19.6)$$

Определение 19.2. *Формула (19.6) называется формулой Тейлора для функции $f(x)$, а $R_m(x)$ называется m-м остаточным членом формулы Тейлора и определяет отличие $f(x)$ от многочлена Тейлора (19.4).*

Остаточный член может быть найден в виде, подобном $m+1$-му члену

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}, \qquad (19.8)$$

где $\xi \in (x_0, x)$ и вся неопределенность остаточного члена, т. е. отличие нашей функции $f(x)$ от многочлена $P_m(x)$, заключена в неизвестном значении ξ. Положив для удобства $m + 1 = n$, формулу (19.6) можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n. \qquad (19.9)$$

Определение 19.3. *Формула (19.9) называется формулой Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа*

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n, \qquad (19.10)$$

в которой точка $\xi \in (x_0, x)$ не определена и зависит от x и n. Формула (19.9) при $x_0 = 0$ является представлением функции $f(x)$ в виде многочлена в окрестности начала координат и часто называется формулой Маклорена.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n, \qquad (19.11)$$

где положено $\xi = \theta x, 0 < \theta < 1$.

При x близком к x_0, остаточный член является, очевидно, неизвестной бесконечно малой величиной порядка n при $x \to x_0$ и формула (19.9) может быть записана в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + O((x - x_0)^n), \qquad (19.12)$$

где $O(\alpha^n)$ есть обозначение бесконечно малой величины порядка n при $\alpha \to 0$. Выведенные выше формулы (19.9) и (19.12) позволяют сформулировать важную теорему.

Теорема 19.1. *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и её некоторой окрестности непрерывные n производных, то она может быть представлена в виде (19.9) или при $x \to x_0$ по формуле (19.12).*

19.3. Ряд Тейлора

Теорема 19.2. *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и её некоторой δ-окрестности, т. е. для всех $x \in (|x - x_0| \leqslant \delta)$ непрерывные производные любого порядка, ограниченные одним и тем же числом M, то она разлагается в этой окрестности точки x_0 в сходящийся к $f(x)$ степенной ряд.*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \qquad (19.13)$$

Определение 19.4. *Ряд (19.13), к которому по теореме (19.2) сходится функция $f(x)$, называется рядом Тейлора.*

Для $x_0 = 0$ соответствующий ряд (19.13) часто называют рядом Маклорена .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \qquad (19.15)$$

Покажем, что выведенная ранее формула Лагранжа (17.4), или формула конечных приращений, является частным случаем формулы Тейлора (19.9) при $n = 1$. Действительно, из (19.9) при $n = 1$ следует

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0). \qquad (19.16)$$

Положив $x_0 = a$ и $x = b$, получим $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$,где $\xi \in (a, b)$. Это и есть формула конечных приращений Лагранжа.
Рассмотрим представление по формуле Тейлора (19.9) (чаще всего это будет формула Маклорена (19.11)) и разложение в ряд Тейлора (19.13) или Маклорена (19.15) некоторых элементарных функций и определим их области сходимости.

19.4. Показательная функция $f(x) = e^x, \quad x_0 = 0$

Так как $x_0 = 0$, $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$, $k = 0, 1, \ldots$, $f^{(n)}(\xi) = e^\xi$, то по формуле (19.11):

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{n!} \cdot x^n, \tag{19.17}$$

где $0 < \theta < 1$.

Поскольку для функции $f(x) = e^x$ при любом $x = N \in (-\infty, +\infty)$ производные любого порядка $f^{(n)}(x) = e^N$ ограничены одним и тем же числом $M = e^N$, то по теореме (19.2) предыдущей лекции формула (19.17) переходит в соответствующий ряд Маклорена:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{19.18}$$

который сходится к e^x на $(-\infty, +\infty)$.

Пример 19.3. *Вычислим $e^{-1} = 1/e$ с точностью до 10^{-4}.*

Р е ш е н и е: По (19.18) при $x = -1$,

$$1/e = e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Это знакочередующийся ряд и по теореме Лейбница остаток ряда не превышает своего первого члена. Следовательно, ошибка при вычислении величины e^{-1} не больше первого из отброшенных членов ряда её представляющего

$$|\frac{(-1)^n}{n!}| \leqslant \varepsilon, n! \geqslant 1/\varepsilon = 10^4, \text{ откуда } n = 8, \text{ т. к. } 8! = 40320 > 10^4.$$

Итак, $1/e = 1/2 - 1/6 + 1/24 - 1/120 + 1/720 - 1/5040 = 0,3679.$

Первый из неучитываемых членов $\dfrac{(-1)^8}{40320} < 0,25 \cdot 10^{-4}$.

Пример 19.4. *Вычислить число e с точностью до 10^{-4}.*

Р е ш е н и е:
Ряд Маклорена (19.18) при $x = 1$ будет знакоположительным и для оценки ошибки вычисления числа e надо воспользоваться формулой (19.17). Оценим величину остаточного члена $\frac{e^{\theta}x}{n!}x^n$ при $x = 1$:

$$\varepsilon = e^{\theta}/n! < e/n! < 3/n!, \quad n! > 3 \cdot 10^4,$$

т.е. $n = 8$, как и в примере 19.3. Следовательно, с заданной точностью

$$e = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 + 1/720 + 1/5040 = 2,7183.$$

19.5. Функция $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0$

Как показано в ранее $f^{(k)}(x) = \sin(x + \pi k/2)$, $f^{(k)}(0) = \sin(\pi k/2)$.
Так как $|\sin(x + \pi k/2)| \leqslant 1$ и, следовательно, все производные $f(x)$ не превышают единицу, по теореме (19.2) предыдущей лекции $\sin x$ разлагается в сходящийся к ней на $(-\infty, +\infty)$ ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \qquad (19.19)$$

19.6. Функция $f(x) = \cos x, \ x_0 = 0$

Продифференцировав обе части (19.19), получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}. \qquad (19.20)$$

В качестве примера рассмотрим применение разложений (19.19) и (19.20) к нахождению предела.

Пример 19.5. *Показать, что* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}=\frac{n^2-m^2}{2}$.

Р е ш е н и е: Из (19.20) имеем $\displaystyle\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)$

и, следовательно,

$$\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}=\frac{1-\dfrac{m^2x^2}{2}+O(x^4)-1+\dfrac{n^2x^2}{2}+O(x^4)}{x^2}=$$

$$=\frac{n^2-m^2}{2}+\frac{O(x^4)}{x^2}=\frac{n^2-m^2}{2}+O(x^2)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{n^2-m^2}{2}.$$

19.7. Функция $f(x) = (1+x)^m, \quad x_0 = 0$

Здесь $\quad f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-k+1)(1+x)^{m-k},$
$\quad f^{(k)}(0) = m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-k+1).$

Запишем формально ряд Маклорена для этой функции

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-k+1)}{k!} x^k, \qquad (19.21)$$

где m – любое действительное число. Определим радиус сходимости этого ряда:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{(n+1)!}{m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-n+1)(m-n)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = 1.$$

Следовательно, правая часть формулы (19.21) есть сходящийся при $|x| < 1$ ряд и, как показывается, он сходится к функции $(1+x)^m$. Сходимость при $|x| = 1$ необходимо рассматривать отдельно, что мы делать не будем.

Определение 19.5. *Ряд (19.21) для* $(1+x)^m$ *называется биномиальным рядом.*

Используем (19.21) для вычисления предела.

Пример 19.6. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Р е ш е н и е: Из (19.21) имеем при $m = \dfrac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2),$$
$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+O(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}(1+O(x)) = 1.$$

Рассмотрим ещё пример приложения биномиального ряда к приближённому вычислению корней $\sqrt[m]{a}$. Прежде всего надо найти число b, близкое к a, из которого корень m-й степени извлекается элементарно, и такое, чтобы их разность была бы, по крайней мере, меньше b.

Тогда $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b+x} = \sqrt[m]{b}\sqrt[m]{1+\dfrac{x}{b}} = \sqrt[m]{b}\left(1+\dfrac{x}{b}\right)^{\frac{1}{m}}$.

Затем $\left(1+\dfrac{x}{b}\right)^{\frac{1}{m}}$ необходимо разложить в биномиальный ряд и взять необходимое для нужной точности число членов.

Пример 19.7. *Вычислить* $\sqrt{5}$ *с точностью до* 10^{-3}.

Р е ш е н и е:

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{4(1+0.25)} = 2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots\right).$$

Полученный ряд является знакочередующимся и для того, чтобы вычислить $\sqrt{5}$ с нужной точностью, необходимо учитывать лишь те члены, которые по модулю больше 10^{-3}.

Поэтому $\sqrt{5} = 2 + 0,25 - 0,0156 + 0,0020 = 2.236$.

19.8. Функция $f(x) = \ln(1+x),\ x_0 = 0$

Для этой функции

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}; \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!.$$

Соответствующий ряд Маклорена примет вид

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}. \qquad (19.22)$$

Он сходится к функции $\ln(1+x)$ на множестве $(-1 < x \leqslant 1)$

Полученный ряд (19.22) можно также использовать для вычисления пределов.

Пример 19.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+x)-\ln(1+x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-x+\dfrac{x^2}{2}+O(x^3)}{x^2} = \dfrac{3}{2}.$

Займемся теперь вычислением логарифмов. По формуле (19.22) вычислить логарифмы можно лишь для чисел от 0 до 2. Получим теперь формулу, позволяющую вычислить логарифмы любых положительных чисел.

Заменим в формуле (19.22) x на $-x$:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}. \tag{19.23}$$

Вычтем теперь из равенства (19.22) соотношение (19.23):

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{19.24}$$

Положив $\dfrac{1+x}{1-x} = a$, получим $x = \dfrac{a-1}{a+1}$.

Формулу (19.24) можно использовать для вычисления логарифмов любых положительных чисел.

Ошибки при вычислении логарифмов с помощью конечного числа членов ряда (19.24) можно оценить следующим образом. По a определим x, затем берем несколько членов в формуле (19.24):

$$\ln a = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) + r_n. \tag{19.25}$$

Остаток ряда r_n и есть ошибка. Учитывая, что

$$\frac{1}{2n+5} < \frac{1}{2n+3}, \quad \frac{1}{2n+7} < \frac{1}{2n+3} \text{ и т. д., получим}$$

$$r_n = 2\Big(\frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \frac{x^{2n+5}}{2n+5} + \dots\Big) < 2\Big(\frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \frac{x^{2n+5}}{2n+3} + \tag{19.26}$$

$$+\frac{x^{2n+7}}{2n+3} + \dots\Big) = 2\frac{x^{2n+3}}{2n+3}(1 + x^2 + x^4 + \dots) = 2\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\frac{1}{1-x^2}.$$

Так как $|x| < 1$ то $1 + x^2 + x^4 + \dots$ есть бесконечно убывающая геометрическая последовательность с $q = x^2$, её сумма равна $\dfrac{1}{1-x^2}$

Пример 19.9. *Вычислить* $\ln 3$, *с точностью* 10^{-4}.

Р е ш е н и е: В формуле (19.24) положим $a = 3$, а $x = \dfrac{3-1}{3+1} = \dfrac{1}{2}$. Тогда по (19.26) должно быть $\dfrac{2\cdot 4}{(2n+3)\cdot 3\cdot 2^{2n+3}} = \dfrac{1}{3(2n+3)\cdot 4^n} < 10^{-4}$. Это неравенство выполняется при $n = 5$ следовательно,

$$\ln 3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1}{9\cdot 2^9} + \frac{11}{3\cdot 2^{11}}\right) = 1 + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 16} +$$

$$+ \frac{1}{7\cdot 64} + \frac{1}{9\cdot 256} + \frac{1}{11\cdot 1024} = 1,0986.$$

Хотя в данной сумме шестое слагаемое и меньше 10^{-4}, его нельзя отбрасывать, так как тогда ошибка будет больше 10^{-4}. Напомним, что только для знакочередующегося ряда ошибка не превышает первого из не учитываемых членов, а в случае знакоположительных рядов ошибку чаще всего оценивают, сравнивая остаток ряда с геометрической убывающей прогрессией, что мы и сделали в нашем примере.

Спасибо за внимание