

14. Основы теории вероятностей.

Как построить математическую модель некоторого явления?

Для построения модели нужно выстроить ее аксиоматику. И мы уже знаем, что система аксиом должна быть непротиворечивой, независимой и полной.

- Человек ограничен в познании мира. Его знания пришли в результате опыта.
- Окружающий мир устроен так, что не все его законы нам известны.
- Следовательно, мы не можем учесть все свойства реального явления.

На помощь приходят
теория вероятностей и статистика.

- На основе наблюдения за явлением собираются некоторые данные,
- По собранным данным выводятся закономерности, свойственные этому явлению.
- На их основе строится матмодель.
- Далее, на основе этой модели, можно прогнозировать, как будет развиваться явление в будущем.

То есть, **мы можем не знать законов, лежащих в основе явления, но мы можем наблюдать присущие ему закономерности и по ним строить модель явления.**



**Вся история науки
была постепенным
осознанием того,
что события не
происходят
произвольным
образом, а
отражают
определенный
скрытый порядок...**

Стивен Уильям Хокинг

14.1. Случайные события

Определения.

Эксперимент – некоторый опыт, или действие, результаты (исходы) которого изучаются.

Эксперимент считается случайным, если он может закончиться любым из известных исходов, но нельзя предсказать, каким именно.

Примеры. Подбрасывание монетки, выбор маршрута движения, решение задачи, сдача экзамена.

Одинаковые эксперименты – проводимые в одинаковых условиях.

Независимые эксперименты – когда результаты по-следующих не зависят от результатов предыдущих.

Примеры.

а) *Случайные подбрасывания монетки* – **одина-ковые** и **независимые** случайные эксперименты.

б) *Измерения значения IQ у разных людей в одинаковых условиях* – **одинаковые** и **независимые** эксперименты.

в) *Измерение IQ у одного и того же человека каждый год* – **зависимые**. Если проводятся в

Определение. Результаты (исходы) эксперимента в вероятности называют событиями, обозначают буквами А, В, ... Случайными называют события, которые могут произойти или не произойти.

Пример 1. Результатом эксперимента «Подбрасывание монетки» может быть событие: «Появление орла».

<i>эксперимент</i>	<i>события</i>
бросание монетки	появление орла или решки
бросание игрального кубика	появление цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6
сдача экзамена	получение оценок 2,3,4,5.

Определение. События бывают:

- Достоверные – те, которые произойдут в любом случае.
- Невозможные – те, которые никогда не произойдут.
- События А и В несовместные – если появление одного события в результате опыта исключает появление другого.
- События А и В совместные – если возможно появление в результате опыта обоих событий

Пример. При бросании кубика:

Достоверное событие - «появление числа <7»

Невозможное событие - «появление числа >10»

Несовместные – «появление 3» и «появление 5»,

или «появление четного» и «появление нечетного».

Совместные – «появление 2» и «появление четного».

Они могут произойти одновременно - если появится «2».

Или «появление четного» и «появление ⁸

Определение. Несколько несовместных событий образуют **полную группу**, если в результате испытания наступит хотя бы одно из них.

Полная группа несовместных событий образует **пространство элементарных событий**

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}.$$

Примеры. Эксперимент – бросание кубика.

1) Несовместные события – «появление четного числа» и «появление нечетного числа» **образуют** полную группу

(очевидно, что одно из них точно произойдет)

2) Несовместные события – «появление четного числа» и «появление числа 3»

не образуют полную группу, так как возможно, что не произойдет ни одно из НИХ (появится «5»)

3) Несовместные события – «появление числа больше 3» и «появление числа меньше 3»

не образуют полную группу, так как возможно, что не произойдет ни одно из НИХ (появится «3»)

4) Несовместные события – «появление числа больше или равного 3» и «появление числа меньше 3»

образуют полную группу.

14.2. Классическая вероятность

Определение. Пусть проводится случайный эксперимент, результатами которого могут быть n *равновозможных* независимых элементарных событий (исходов): $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Пусть событие A может произойти в результате m исходов.

Тогда классической вероятностью случайного события A называется число

$$P_A = m/n,$$

Пример. Эксперимент - подбрасывание монетки. Классической вероятностью появления орла будет: $\frac{1}{2}$ (в 1 из 2 исходов может выпасть

Пример 2. Эксперимент - подбрасывание кубика. Возможные исходы: $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

а) Вероятность появления числа «2»

$P = 1/6$ (в 1 из 6 исходов может выпасть «2»).

б) Вероятность появления четного числа

$P = 3/6 = 1/2$. (3 исхода («2», «4», «6») из 6 возможных).

в) Вероятность того, что появится число, меньшее 10

$P = 1$ (6/6). (достоверное)

г) Вероятность того, что появится число, большее

Пример 3. Студент сдает экзамен. Из 25 билетов он выучил 15. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен?

Таким образом, в теории вероятностей для каждого эксперимента строится вероятностная модель:

- определяются все возможные элементарные события;
- вычисляются вероятности этих событий;
- тогда мы можем прогнозировать результаты эксперимента.

Основные свойства вероятности $P(A)$

- $0 \leq P(A) \leq 1$;
- Для достоверного события $P(A)=1$;
- Для невозможного события $P(A)=0$;
- Если события $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ образуют **полную группу событий**, то сумма их вероятностей равна единице:

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_N) = 1 ;$$

- **Правило суммы:** если события A и B независимы, то $P(A \text{ или } B) = P(A+B) = P(A) + P(B)$.
- **Правило произведения:** если события A и B независимы, то $P(A \text{ и } B) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Пример 2. Подбрасываем два кубика. Какова самая вероятная сумма выпавших очков?

Решение. Составим таблицу возможных исходов (можно и список, но таблицей удобнее), в таблицу впишем искомые суммы.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Пример 2. Подбрасываем два кубика. Какова самая вероятная сумма выпавших очков?

Решение. Составим таблицу возможных исходов (можно и список, но таблицей удобнее), в таблицу впишем искомые суммы.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(2)=1/36;$$

$$P(3)=2/36;$$

$$P(4)=3/36;$$

$$P(5)=4/36;$$

$$P(6)=5/36;$$

$$P(7)=6/36;$$

14.3. Статистическая вероятность

Реальные эксперименты, как правило, значительно сложнее подбрасывания кубика.

В них у нас может не хватать данных для построения вероятностной модели, и нет возможности заранее теоретически определить вероятность.

Как тогда все же построить вероятностную модель?

В этом случае данные придется брать из эксперимента. И это уже задача математической статистики – **по результатам экспериментов восстановить вероятностную модель.**

Смысл в том, что тогда последующие эксперименты мы уже сможем прогнозировать.

Пример 1. Прогноз погоды. Из известных физических свойств погодных явлений, и с учетом статистических данных за несколько лет, строится математическая модель, и самый возможный результат выдается как прогноз погоды.

Пример 2. Расчет автомобильных пробок через полчаса или час – (прогноз пробок на *Яндексе*). Из текущего расположения и направления движения машин, из статистики за аналогичные часы, дни, месяцы строится прогноз. Т.о., по многократным наблюдениям можно определять некоторые «усредненные» значения.

Пример 3. Прогноз поведения человека.
Многokратное наблюдение за поведением разных людей в некоторой ситуации дает возможность определить вероятности того или иного поведения человека в этой ситуации.

Определение. Пусть проводится серия из N одинаковых экспериментов, и событие A наступило в результате эксперимента N_A раз. Тогда число N_A называется частотой события A , а число $p_A = N_A / N$ называется относительной частотой события A в данной серии экспериментов.

Т.е. вероятность вычисляется теоретически, а частота вычисляется в результате опыта.

Пример. Подбрасывание монетки.

- Бросили 10 раз – выпали 4О, 6Р.

Частота выпадения орла $N_O = 4$, $p_O = 4/10 = 0,4$.

- Бросили еще 10 раз – выпали 5О, 5Р.

Частота выпадения орла $N_O = 5$, $p_O = 5/10 = 0,5$.

- Бросили еще 10 раз – выпали 8О, 2Р.

Частота выпадения орла $N_O = 8$, $p_O = 8/10 = 0,8$.

Каждый раз количество орлов и решек будет различно, но есть одна **важная закономерность**: при увеличении количества

Число бросаний	Число появлений "герба"	Относительная частота
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Частота появления орла стремится к вероятности появления орла $P = 0,5$.

Это свойство называется *свойством статистической устойчивости.*

Свойство статистической устойчивости.

Длительные наблюдения показали, что если

многократно повторяются одинаковые независимые эксперименты,

(например, серия из 1000 бросаний монетки),

то относительная частота колеблется около вероятности появления события.

Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за

Тогда построение статистической модели происходит так:

1. Многократные эксперименты позволяют определить относительные частоты событий.
2. Мы берем их за приближенные значения вероятностей.
3. Строим математическую вероятностную модель явления.
4. Изучаем построенную модель. При необходимости, корректируем, проводя дополнительные эксперименты.
5. По построенной модели мы можем изучать исследуемое явление.



**Прогресс состоит
не в замене
неверной теории
на верную,
а в замене одной
неверной теории
на другую
неверную, но
уточненную.**

Стивен Уильям Хокинг

Пример 1. Как узнать, «правильный» ли игральный кубик, не смещен ли центр тяжести?

- подбросить кубик много раз (например, 600), и подсчитать **частоты**: сколько раз выпали числа 1-6.
- определить **относительные частоты** выпадения чисел 1-6 (частоты поделить на 600).
- Эти частоты есть приближенные значения вероятности, следовательно, они должны быть приблизительно равны $1/6$.
- Если полученные значения сильно

Пример 2. Как приблизительно установить количество N рыб в озере?

- Забрасываем сеть и считаем, сколько рыб поймали, допустим, n .
- Каждую из них метим и отпускаем обратно.
- Через несколько дней в том же месте в такую же погоду (одинаковые условия) забрасываем такую же сеть. Допустим, в ней обнаружилось M рыб, и среди них m меченых.
- Тогда, с одной стороны, относительная частота меченых рыб равна n/N , с другой стороны, она же равна m/M . Тогда $n/N \approx m/M$, следовательно, искомое количество рыб равно $N \approx n * M / m$.