9. Аксиоматические системы и их свойства

9.1. Отношения между объектами

Определение. В математике ***отношение*** выражает связь между элементами x, y, …, некоторых множеств A, B, ….

Пример. Отношения: равенства, больше/меньше, конгруэнтности.

Определение. Отношения между *двумя* элементами $x \in A$ и $y \in B$ называют ***двухместными*** или ***бинарными*** отношениями. Все такие отношения будем обозначать Đ(x,y), при $x \in A$, $y \in B$.

Пример. Отношение **равенства** 1+2=2+1 *бинарное.* Отношение «**больше**» тоже *бинарное.*

Аналогично двухместному, определяются n–местные отношения – отношения между элементами $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$ некоторых множеств $A_1, \ldots, A_n$.

Пример. Отношение «**точка А на прямой лежит между точками В и С**» - *трехместное* P(A,B,C).

Определение. Отношение Đ(x,y) между элементами множества М называется отношением эквивалентности, обозначим его $(x_{\sim}y)$, если выполняются три условия:

1. Рефлексивности: $x_{\sim}x$;
2. Симметричности: если $x_{\sim}y$, то $y_{\sim}x$;

Пример. Отношения эквивалентности:

1) числовые равенства

Рефлексивность $x = x$

Симметричность $x=y \Rightarrow y=x$

Транзитивность $x=y$ и $y=z \Rightarrow x=z$

ДА

2) числовые неравенства

Рефлексивность $x \neq x$

Симметричность $x \neq y \Rightarrow y \neq x$

Транзитивность $x \neq y$ и $y \neq z \Rightarrow x \neq z$

НЕТ

Пример. Отношения эквивалентности:

3) отношение «>»

Рефлексивность $x > x$

Симметричность $x > y \Rightarrow y > x$

Транзитивность $x > y$ и $y > z \Rightarrow x > z$

НЕТ

4) конгруэнтность фигур. Пусть заданы фигуры A, B,C.

Рефлексивность $A \cong A$

Симметричность $A \cong B \Rightarrow B \cong A$

Транзитивность $A \cong B$ и $B \cong C \Rightarrow A \cong C$

ДА

Пример. Отношения эквивалентности:

5) подобие фигур. Пусть заданы фигуры A,B,C.

Рефлексивность $A \sim A$

Симметричность $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

Транзитивность $A \sim B$ и $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

ДА

6) параллельность прямых. Пусть заданы прямые *a*,*b*,*c*

Рефлексивность $a \parallel a$

Симметричность $a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$

Транзитивность $a \parallel b$ и $b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$

ДА

Утверждение. Любое отношение эквивалентности Đ(x,y), заданное на множестве M, определяет ***множество классов эквивалентности***: два элемента x,y∈M попадают в один класс тогда и только тогда, когда x ~ y (эти классы непересекающиеся).

Пример 1. Рассмотрим множество выражений:

{1+5, 2+1, 2+3, 2+4, 1+2, 1+4, 3+3, 1+1+1, 4+2, 1+3}.

Сколько всего классов эквивалентности по отношению «числовое равенство» ?

такие классы эквивалентности:

[{1+5, 2+4, 3+3, 4+2}, {2+1, 1+2, 1+1+1},

{2+3, 1+4}, {1+3}]

Таким образом, **задание отношения эквивалентности на некотором множестве равносильно разбиению этого множества на непересекающиеся подмножества**.

Пример 2. После выставления оценок за КН студенты разбиваются на 3 класса экв-ти: получившие 0,1,2 баллов.

9.2. Аксиоматические теории и математические структуры

Все примеры математических «языков» - числовые системы, евклидова геометрия, векторы, геометрия Лобачевского - построены по общему правилу.

Рассмотрим это общее правило – формирование математической структуры на основе аксиоматического подхода

Определение. Любая *система аксиом* - это система утверждений $T=\{T_1,T_2 \dots\}$, задающих систему отношений Đ={ Đ$_1$, Đ$_2$ …} между элементами некоторых базовых множеств $M_1, \dots, M_m$.

Пример. 20 аксиом Гильберта описывают отношения между точками, прямыми, плоскостями, отрезками, углами и числами. Здесь:

Утверждения: (это сами аксиомы) $T=\{T_1, T_2 \ldots, T_{20}\}$.

Отношения: $Đ_1$ инцидентности,

$Đ_2$ порядка,

$Đ_3$ конгруэнтности,

$Đ_4$ отношения, определяющие свойства непрерывности,

$Đ_5$ отношение параллельности.

Множества: M_1 - множество точек, M_2 - множество прямых, M_3 - множество плоскостей, M_4 - множество отрезков, M_5 - множество углов, M_6 - множество натуральных чисел.

Определение. *Математической структурой* называется система отношений Đ, заданная на базовых множествах $M_1, \ldots, M_m$ посредством системы аксиом T.

Система аксиом – это набор утверждений. Когда мы выделяем базовые множества и отношения – получаем структуру.

Математическую структуру будем обозначать Σ_T = {T, Đ, M}. Для краткости иногда обозначается Σ_T.

Пример. Таким образом, все рассмотренные нами аксиоматики задают структуры (мы пока называли их системами):

Структура натуральных чисел – (аксиоматика Пеано для натуральных чисел),

Структура действительных чисел – (аксиоматика действительных чисел),

Структура векторных пространств – (аксиоматика векторных пространств),

Структура геометрического евклидова пространства – (аксиоматика Гильберта),

Структура арифметического евклидова пространства – (аксиоматика Вейля).

Определение. Система всех утверждений, доказываемых логическим путем в структуре Σ_T, называется ***аксиоматической теорией*** этой структуры, она обозначается T_Σ.

То есть, **теория состоит из всех возможных утверждений**, которые логически выводятся из заданных аксиом.

Примеры. 1) теорема о конгруэнтности треугольников по 3 углам является элементом теории структуры планиметрии Лобачевского.

2) теорема о подобии треугольников по 3 углам является элементом теории структуры евклидовой планиметрии

3) Утверждение о том, что 2 прямые могут иметь не более 1 общей точки является элементом и евклидовой планиметрии, и планиметрии Лобачевского.

9.3. Модель (реализация) системы аксиом.

В системе аксиом не всегда указываются конкретные объекты, к которым эти аксиомы применяются.

Например, в аксиоматике Пеано для натуральных чисел не указано, что такое числа, как они выглядят.

При этом, мы имеем как минимум две конкретные модели натурального ряда:

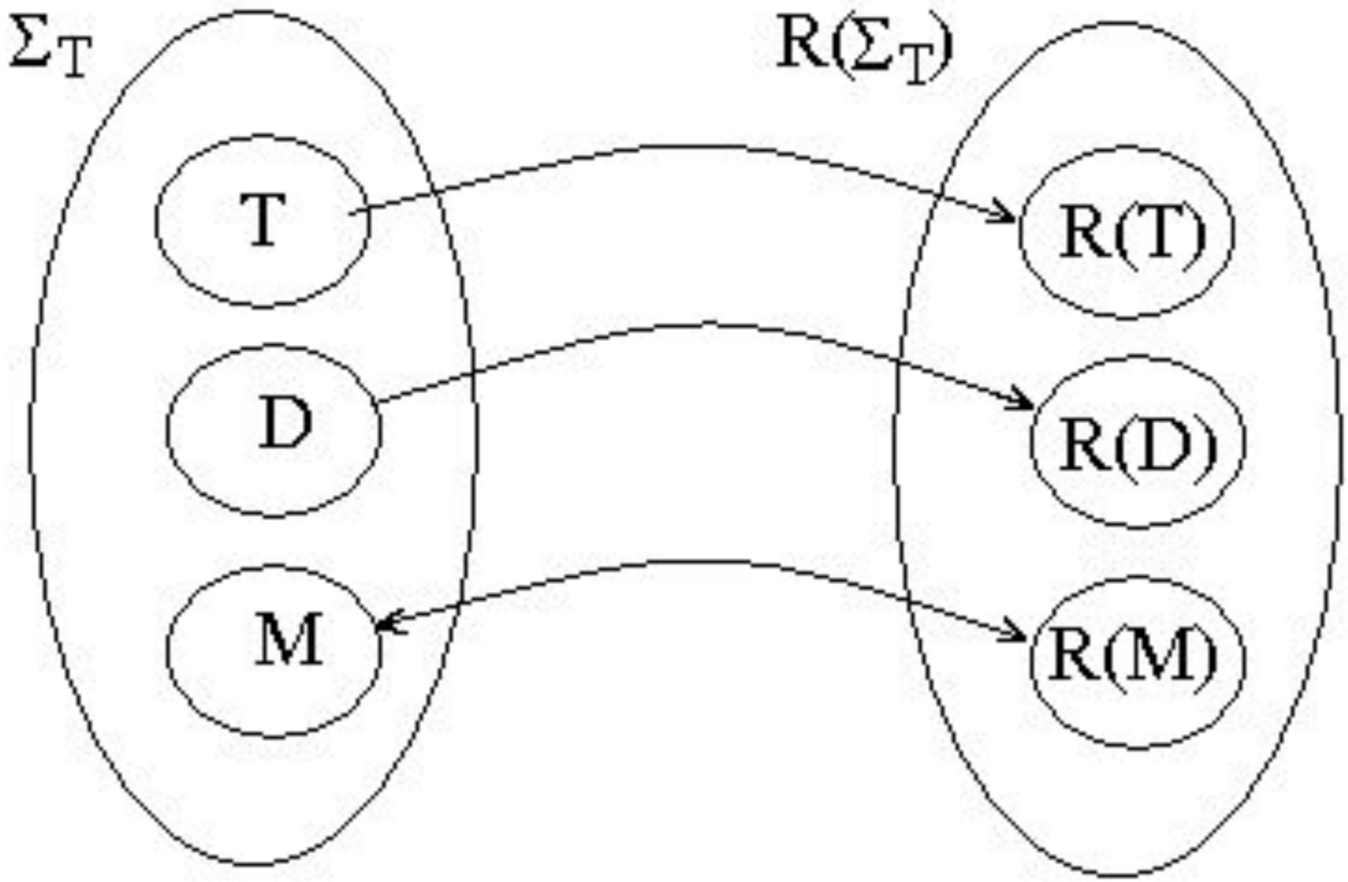
- десятичная модель: «1,2,3,4,…» и

Определение. <u>*Модель*</u> системы аксиом T (<u>*реализация*</u> системы аксиом) представляет собой такую совокупность некоторых объектов и отношений между ними, для которой выполняются все требования системы аксиом T.

То есть, реализация – это некоторый конкретный пример.

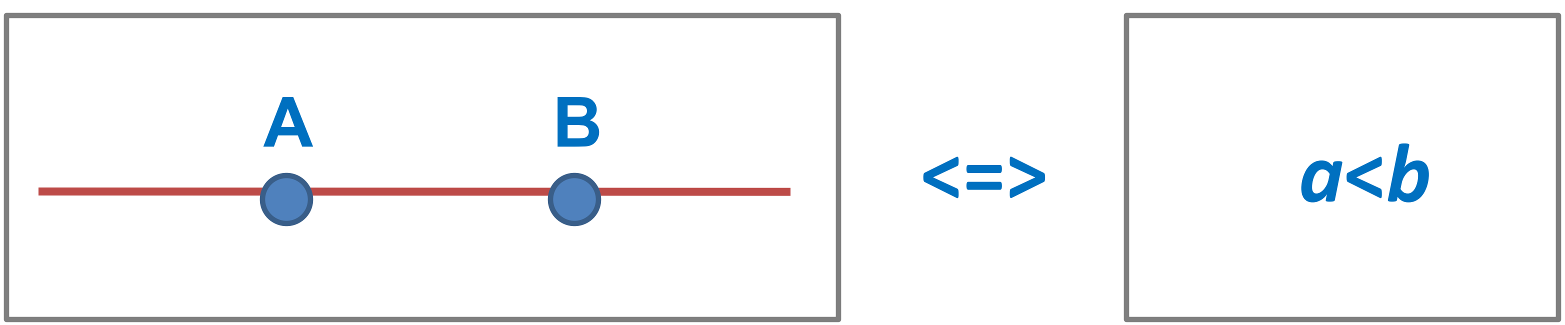
Пример. Для моделей «1,2,3,4,…» и «I,II,III,IV,V,…» выполняются все аксиомы Пеано, а вот ряд «1,2,3,3,3,4…» уже <u>не является</u> моделью натурального ряда.

Реализация $R(\Sigma_T)$ аксиоматической структуры Σ_T :



Примеры реализаций. 1) Пусть ε^1 – геометрическое евклидово пространство (прямая), и R^1 - арифметическая модель евклидовой прямой. То есть, $R(\varepsilon^1)=R^1$.

Тогда, например для утверждения «**точка А лежит левее точки В**», его реализация есть «**числовое неравенство a<b**», где a и b – десятичные представления точек А и В.



Пример. 2) Пусть ε^2 – геометрическое евклидово пространство (плоскость), и R^2 - арифметическая модель евклидовой плоскости. Т.е., $R(\varepsilon^2)=R^2$.

Тогда, например:

- базовое множество M_1 - это **все точки** R^2, а его реализация $R(M_1)$ - **упорядоченные числовые пары** (x,y).

- Базовое множество M_2 – множество **всех прямых** R^2, а его реализация есть **множество уравнений вида** $ax+by+c = 0$.

Пример. 2) Пусть ε^2 – геометрическое евклидово пространство (плоскость), и R^2 - арифметическая модель евклидовой плоскости. Т.е., $R(\varepsilon^2)=R^2$.

Для отношения «**точка А принадлежит прямой *l***», его реализация есть свойство: «**пара (x,y) удовлетворяет уравнению** $ax+by+c = 0$».

- Для утверждения «**для любых двух прямых существует не более одной общей точки**», его реализация есть «**система уравнений… имеет не более одного решения**».

№	Структура	Реализация
1	Аксиоматика Пеано (структура натурального ряда)	Десятичная модель
2	Структура действительных чисел	Множество действительных чисел
		Евклидова прямая
3	Система аксиом трехмерного векторного пространства	1) Геометрическая модель векторного пространства.
		2)Арифметическая модель векторного пространства

№	Структура	Реализация
4	Система аксиом Гильберта евклидовой геометрии	Арифметическая модель евклидова пространства R^3
5	Система аксиом Вейля евклидовой геометрии	
6	n-мерное арифметическое евклидово пространство R^n	Множество n–местных наборов чисел $(x_1, \ldots, x_n)$
7	Планиметрия	Модель Пуанкаре.

9.4. **Формальная** и **содержательная** аксиоматики, теории и структуры.

Определение. Система аксиом T, ее аксиоматичес-кая теория T_{Σ} и аксиоматическая структура Σ_T, определенные вне какой-либо реализации называются абстрактными. Если существует реализация R(T) этой системы, то система T, теория T_{Σ} и структура Σ_T называются содержательными.

Примеры.

1) Содержательная теория: теория аксиоматики Гильберта (реализация $\boldsymbol{\varepsilon}^3$).

Примеры.

2) Классическим примером **абстрактной** теории является геометрия Лобачевского.

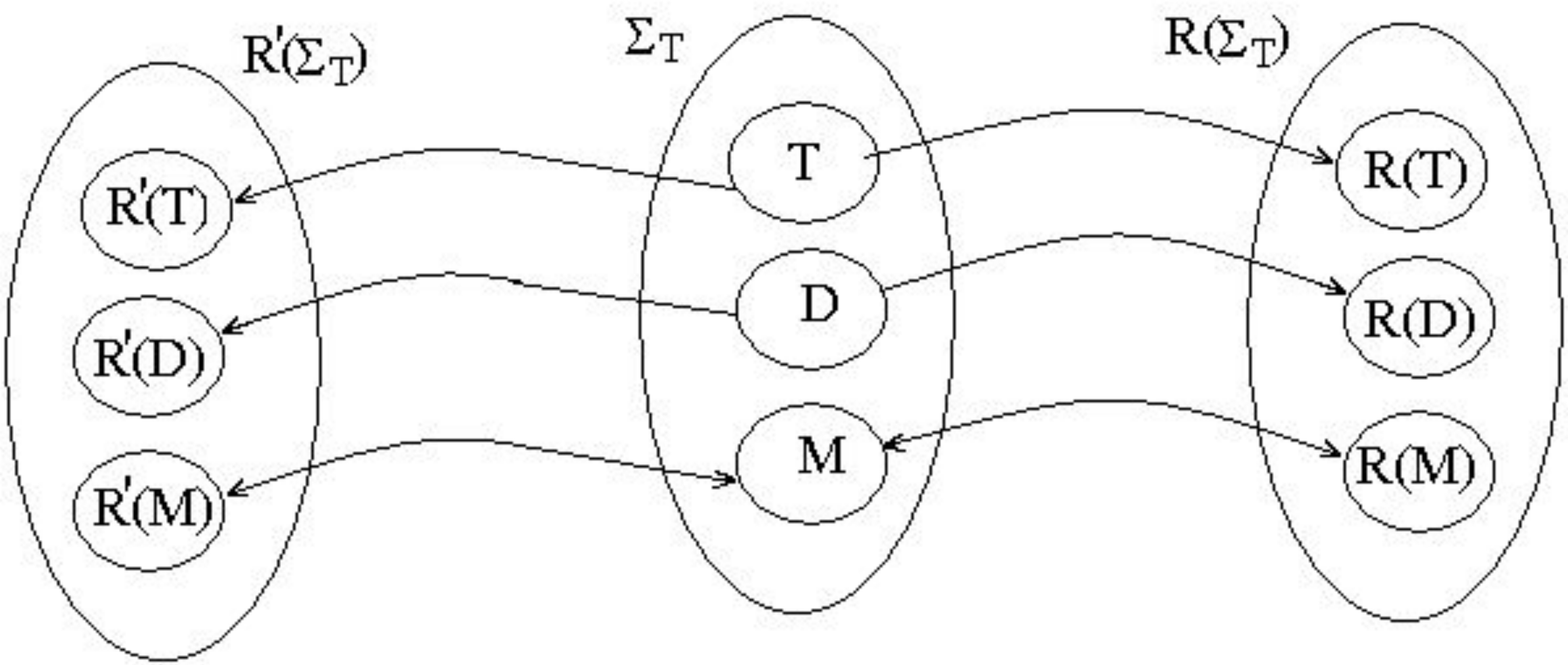
Когда были найдены ее реализации, например, реализация Пуанкаре, геометрия Лобачевского стала **содержательной** теорией.

Как правило, сначала изучается некоторая модель, при этом выделяются аксиомы и формируется математическая структура.

Обратный случай, когда строится абстрактная аксиоматика, и затем для нее ищется модель, встречается реже.

9.5. Изоморфизм реализаций.

Пусть система аксиом T имеет две реализации: R(T) и R'(T) .



будет ли взаимно-однозначным соответствие между реализациями отношений в R и реализациями отношений в R' ?

Определение. Две реализации R(T) и R'(T) системы аксиом T будем называть *изоморфными*, если выполняется два условия:

1) Существует взаимно-однозначное соответствие между реализациями $R_i(M_i)$ и $R'_i(M_i)$ всех базовых множеств M_i.

2) Это соответствие устанавливает взаимно-однозначное соответствие и между всеми отношениями P'_i и P_i.

Само отображение, при этом называется как изоморфизмом моделей или реализаций R(T).

Пример 1. Рассмотрим абсолютную геометрию плоскости (14 аксиом аксиоматики Гильберта - геометрия **без аксиомы параллельности**).

Мы имеем две реализации этой планиметрии:

1) арифметическая модель R^2 евклидовой плоскости;

2) модель Пуанкаре L_2 (плоскости Лобачевского).

С одной стороны, **можно установить взаимно-однозначное соответствие** между точками M из R^2 и точками N из L_2, а также между прямыми из R^2 и прямыми из L_2.

В то же время не всем отношениям между точками и прямыми в L_2 можно найти соответствующие отношения в R^2.

Например, отношение {**прямые a_1 и a_2 не параллельны и не пересекаются**} может выполняться в L_2 и не имеет аналога в R^2.

Аналогично, не всем утверждениям в теории $T(L_2)$ можно найти соответствующие утверждения в $T(R^2)$.

Например, утверждение {**если три угла треугольни-ка конгруэнтны, то треугольники конгруэнтны**} выполняется в $T(L_2)$ и не имеет аналога в $T(R^2)$.

Пример 2. Пусть ε^2 - <u>геометрическая</u> модель векторного пространства (объекты: направленные отрезки). Пусть E^2- <u>арифметическая</u> модель векторного пространства (объекты: пары чисел(x,y)).

Между этими моделями <u>существует взаимно-однозначное отображение</u>.

При этом это отображение <u>сохраняет все</u> определенные в векторной структуре <u>отношения</u> между соответствующими векторами.

Следовательно, это отображение – изоморфизм.

Другими словами, **изоморфизм моделей - это такое взаимно-однозначное соответствие между элементами моделей, которое сохраняет отношения этих элементов, задаваемые системой аксиом.**

В примере 1,

арифметическая модель R^2 евклидовой плоскости,

модель Пуанкаре L_2 (плоскости Лобачевского),

модели R^2 и L_2 не изоморфны.

В примере 2,

ε^2 - геометрическая модель векторного пространства, E^2- арифметическая модель векторного пространства.

модели ε^2 и E^2 изоморфны.

- Почему возникают две такие неравнозначные ситуации?
- Чем принципиально могут различаться системы аксиом?
- Какой должна быть СА, чтобы все реализующие ее модели были изоморфны?
- Какой должна быть СА, чтобы среди ее моделей можно было найти неизоморфные?