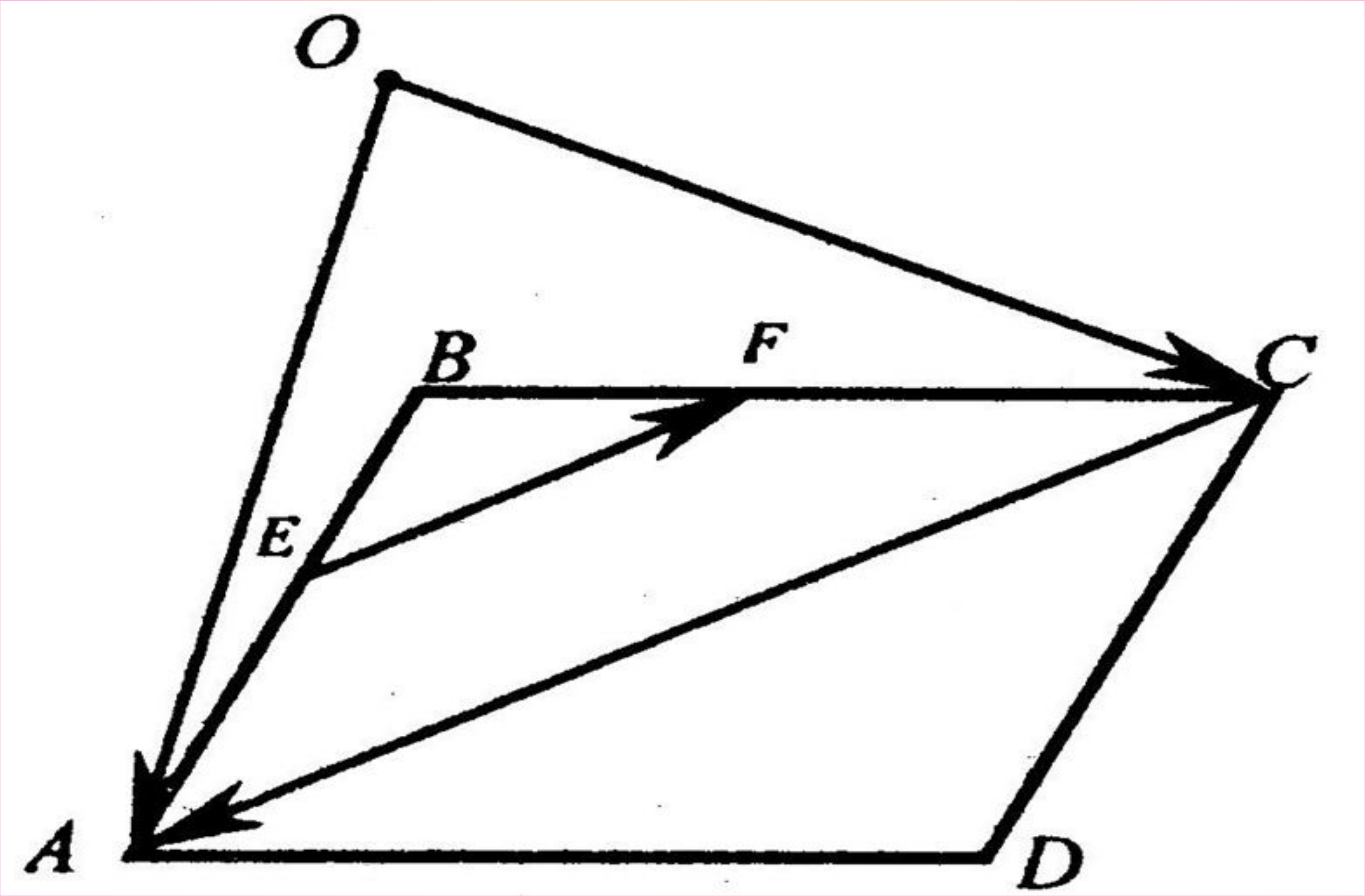
Применение векторов к решению задач

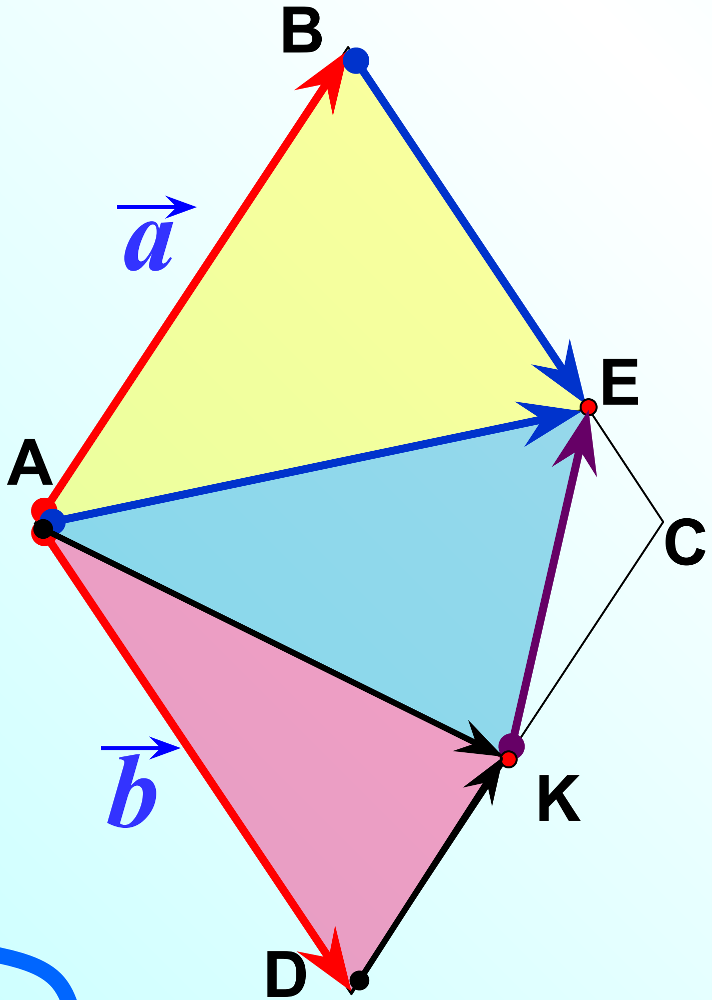
Геометрия 9 класс

В параллелограмме ABCD точки E и F – середины AB и BC. Выразить векторы AC и EF через векторы OC и OA



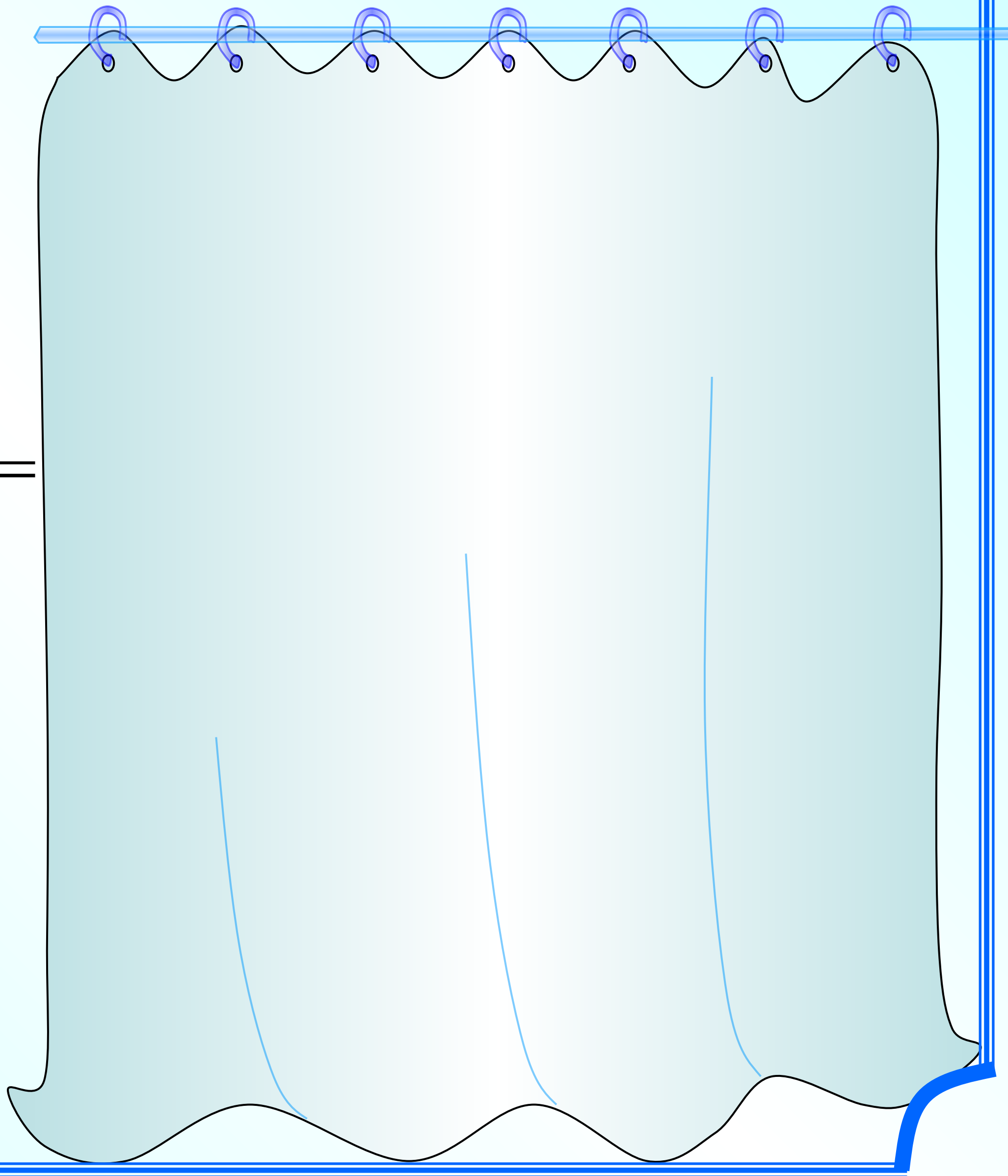
Задача

ABCD – ромб. E $\in$ BC, BE : EC = 3 : 1, K – середина DC, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы:

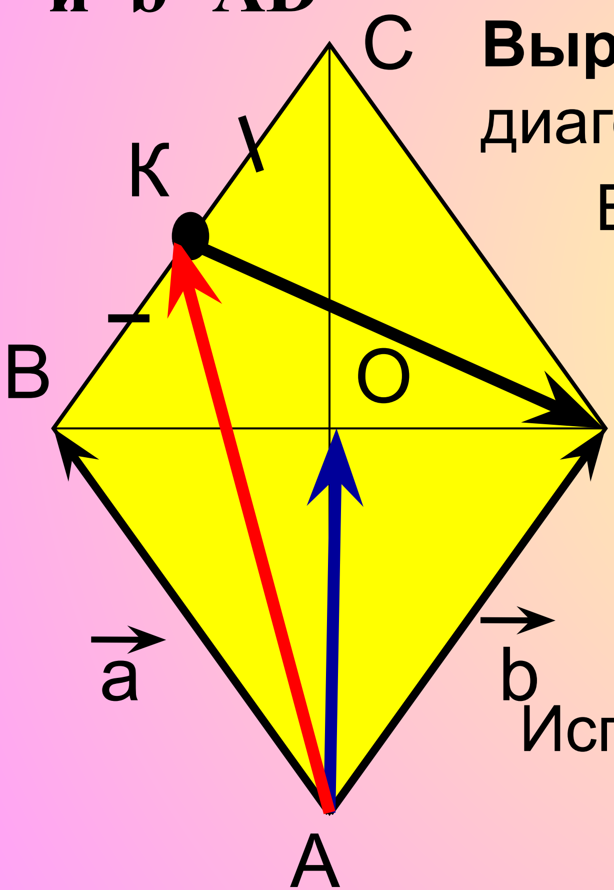


$\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AK} =$



На стороне ВС ромба ABCD лежит точка К так, что ВК=КС, О- точка пересечения диагоналей. Выразите векторы $\vec{AO}$, $\vec{AK}$, $\vec{KD}$ через векторы $\vec{a}=\vec{AB}$ и $\vec{b}=\vec{AD}$



Выразим $\vec{AO}$. $\vec{AO}$-половина диагонали АС. Значит $\vec{AO}=½\vec{AC}$

Вектор $\vec{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ (по правилу пар-ма)

$\vec{AO}=½\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

Выразим $\vec{AK}$

По свойству ромба $\vec{AD}=\vec{BC}$, AD//BC

$\vec{b}=\vec{BC}$, $\vec{BK}=½\vec{BC}$, $\vec{BK}=½\vec{b}$

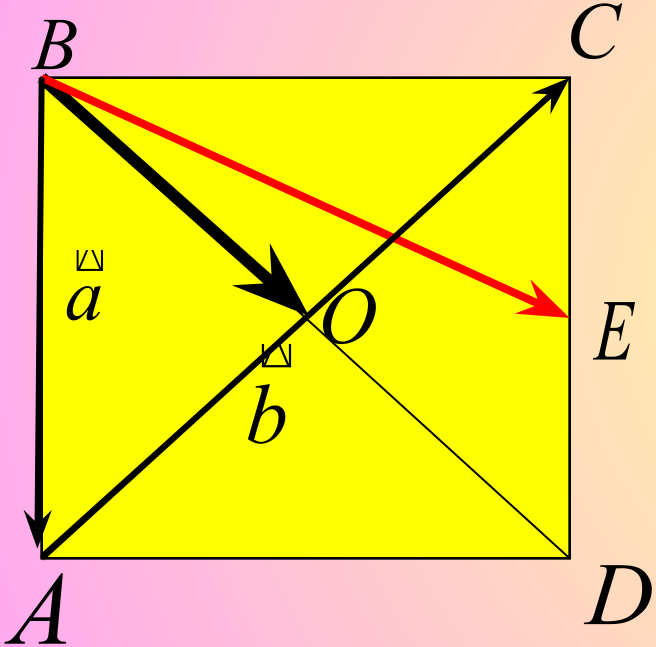
$\vec{AK}=\vec{a}+½\vec{b}$

Выразим $\vec{KD}$

Используем векторы $\vec{b}$ и $\vec{AK}$

$\vec{KD}=\vec{b}-(\vec{a}+½\vec{b})=½\vec{b}-\vec{a}$

На сторонах CD квадрата ABCD лежит точка E так, что CE=ED, O-точка пересечения диагоналей. Выразите векторы BO, BE через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$



Дано: ABCD- квадрат. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$

Найти: $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BO}$

$\overrightarrow{AO}=½\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AO}=½\vec{b}$

Решение: $\boxed{\overrightarrow{BO}=\vec{a} + ½\vec{b}}$

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}$,

$\overrightarrow{CE}=½\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=\vec{a}$

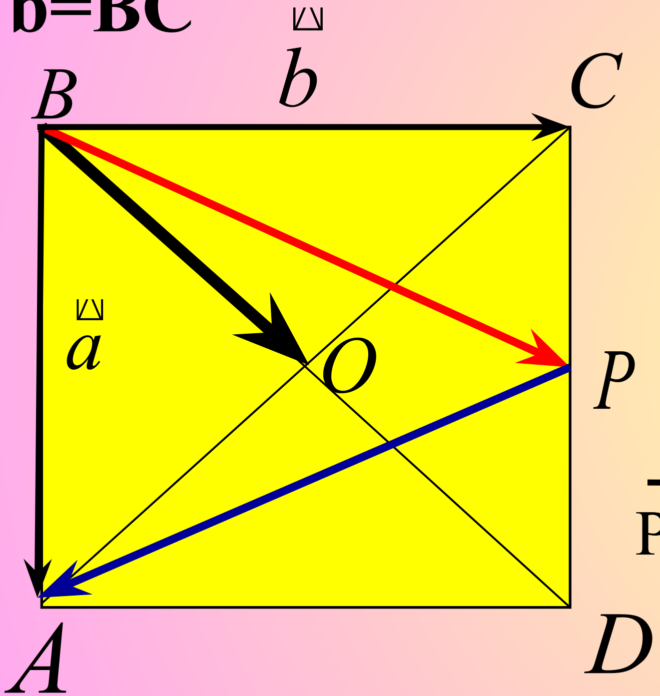
$\overrightarrow{CE}=½\vec{a}$,

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}= \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{BE}= (\vec{a} + \vec{b})+½\vec{a}$

$$\boxed{\overrightarrow{BE} = 1\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}}$$

На сторонах CD квадрата ABCD лежит точка P так, что CP=PD, O-точка пересечения диагоналей. Выразите векторы BO, BP, PA через векторы $\vec{a}=\vec{BA}$, $\vec{b}=\vec{BC}$



Дано: ABCD- квадрат. $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AC}=\vec{b}$

Найти: BO, BP, PA

Решение:

$\vec{BD}=\vec{BA}+\vec{BC}$ $\vec{BD}=\vec{a}+\vec{b}$

$\vec{BO}=\frac{1}{2}\vec{BD}$

$\boxed{\vec{BO}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})}$

$\vec{BP}=\vec{BC}+\vec{CP}$

$\boxed{\vec{BP}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}}$

$\vec{CD}=\vec{BA}=\vec{a}$, $\vec{CP}=\frac{1}{2}\vec{CD}$, $\vec{CP}=\frac{1}{2}\vec{CD}=\frac{1}{2}\vec{a}$

$\vec{PA}=\vec{PD}+\vec{DA}$ $\vec{PD}=\frac{1}{2}\vec{CD}$ $\vec{PD}=\frac{1}{2}\vec{a}$ $\vec{DA}=-\vec{b}$

$\vec{DA}$ и $\vec{BC}$ –противоположные, $\vec{DA}=-\vec{b}$

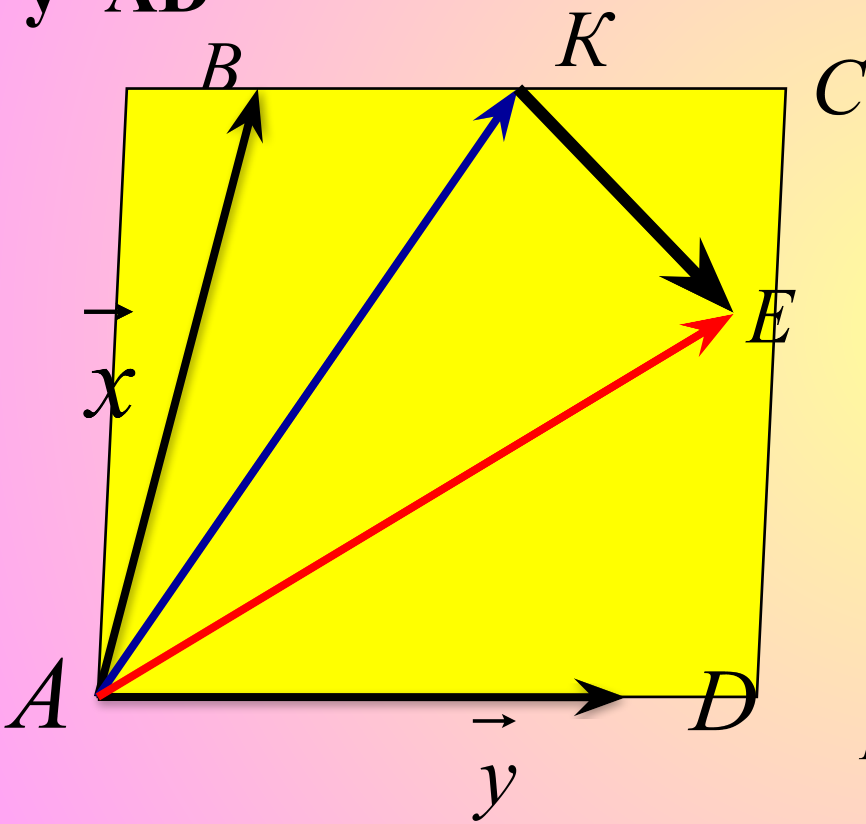
$\vec{PA}=\frac{1}{2}\vec{a}+(-\vec{b})$

$\boxed{\vec{PA}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}}$

или $\vec{PA}=\vec{BA}-\vec{BP}$

$\boxed{\vec{PA}=\vec{a}-(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a})=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}}$

На сторонах ВС и CD параллелограмма ABCD отмечены точки К и Е так, что ВК=КС, СЕ:ED=2:3 Выразите векторы АК, АЕ, КЕ через векторы $\vec{x}=\vec{AB}$, $\vec{y}=\vec{AD}$



Дано: ABCD- параллелограмм.

$\vec{BK}=\vec{KC}$, CE:ED=2:3.

Найти: $\vec{AK}$, $\vec{AE}$, $\vec{KE}$

Решение:

$\vec{AK}=\vec{AB}+\vec{BK}$

$\vec{BK}=\frac{1}{2}\vec{BC}=\frac{1}{2}\vec{y}$

$\boxed{\vec{AK}=\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}}$

$$\vec{AE}=\vec{AD}+\vec{DE} \qquad \vec{DE}=\frac{3}{5}\vec{DC}=\frac{3}{5}\vec{x}$$

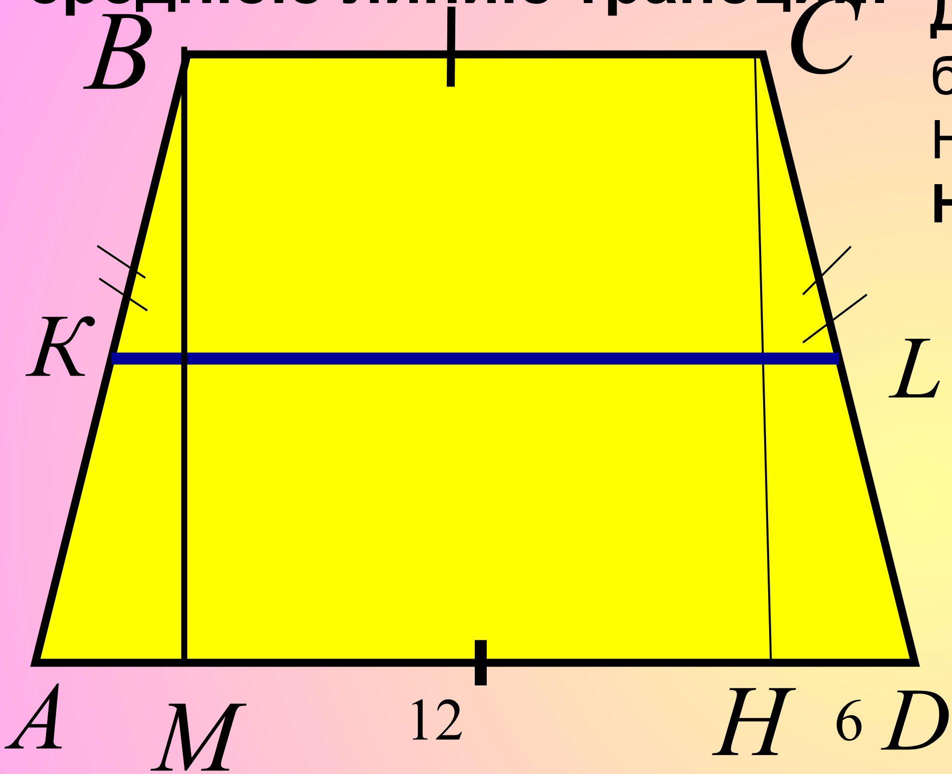
$$\boxed{\vec{AE}=\vec{y}+\frac{3}{5}\vec{x}}$$

$$\vec{KE}=\vec{AE}-\vec{AK}$$

$$\vec{KE}=(\vec{y}+\frac{3}{5}\vec{x})-(\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y})=\vec{y}+\frac{3}{5}\vec{x}-\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{y}$$

$$\boxed{\vec{KE}=\frac{1}{2}\vec{y}-\frac{2}{5}\vec{x}}$$

В равнобедренной трапеции высота делит большее основание на отрезки, равные 6 и 12см. Найдите среднюю линию трапеции.



Дано: ABCD –трапеция, AD-большее основание CH-высота, HD=6см, AH=12см

Найти: KL-средняя линия

Решение:

$$\boxed{KL = \frac{BC + AD}{2}}$$

Трап. равнобедренная, <A=<D, <B=<C, AB=CD

Чтобы найти ср. линию надо

AD= 6+12=18см. Найдем BC.

Проведем высоту BM

AM=HD=6 т.к. ∆BMA=∆CHD

BC=MH- как отрезки прямых заключенных между параллельными прямыми BM//CH (т.к. BM⊥AD, CH⊥AD) MH=BC=6см

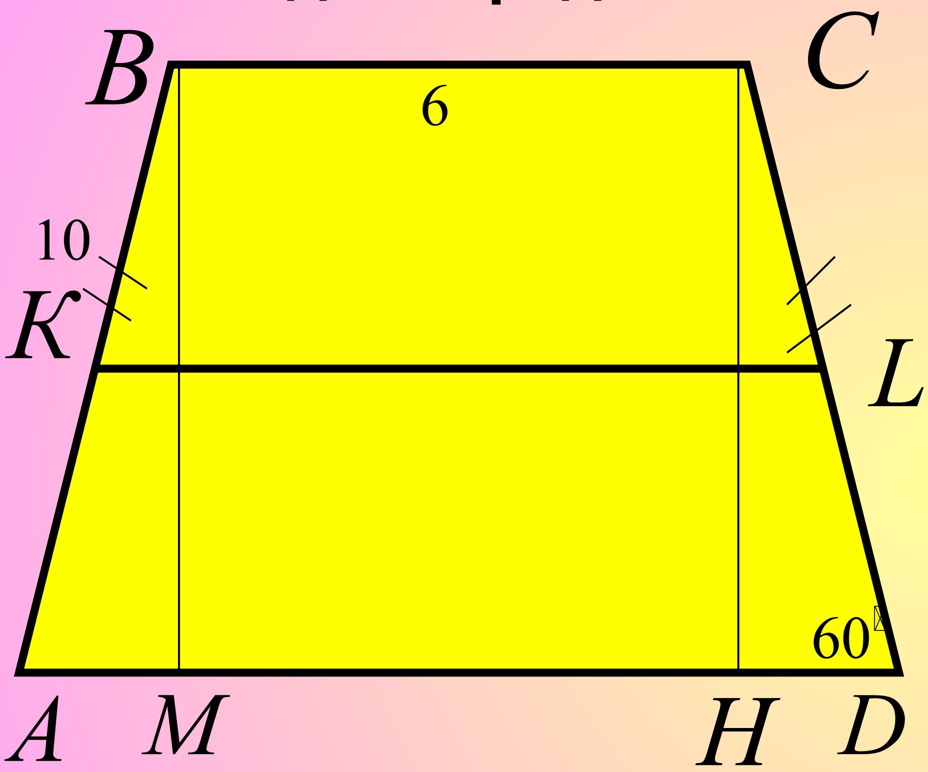
∆BMA=∆CHD равны по гипотенузе BA=CD и острому углу <A=<D

Значит MH=12-6=6см

$$KL = \frac{6+18}{2} = \frac{24}{2} = 12см$$

Ответ: **12см**

В равнобедренной трапеции один из углов равен 60º, боковая сторона равна 10см, а меньшее основание 6 см. Найдите среднюю линию трапеции.



Дано: ABCD –трапеция, <HDC=60º
AB=10см, BC=6см.

Найти: KL-средняя линия

Решение:

Трап. Равнобедренная, <A=<D, <B=<C, AB=CD=10см

Чтобы найти ср. линию надо

$$KL = \frac{BC + AD}{2}$$

$$BC = 6см \;\; AD - ?$$

Рассмотрим ∆ CHD-прямоугольный

<D=60º то <HCD=30º HD=½CD,

HD=5

Проведем BM-высота

BC=MH=6см как отрезки заключенные между 2 пар-ми прямыми AM-?

∆AMB=∆DHC по гипотенузе и острому углу. Значит AM=HD=5см

AD=AM+MH+HD=5+6+5=16см.

$$KL = \frac{6+16}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

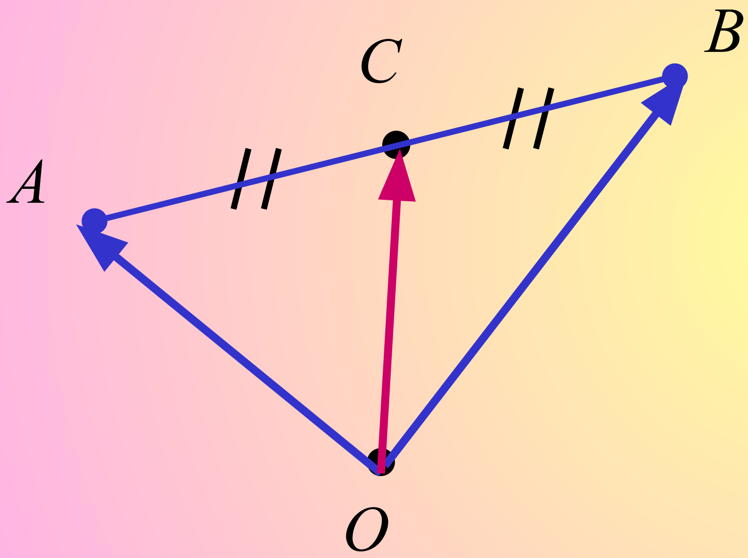
$$Ответ: 11см$$

Запомни

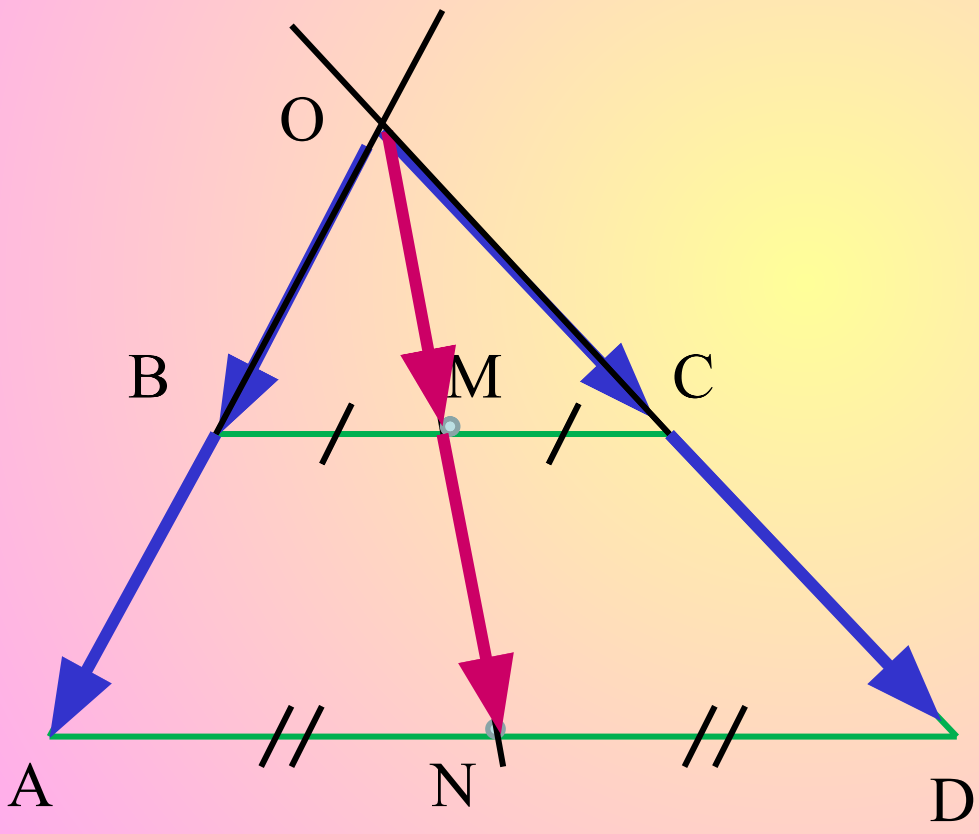
Точка C – середина отрезка AB,
O – произвольная точка плоскости

Докажите:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$



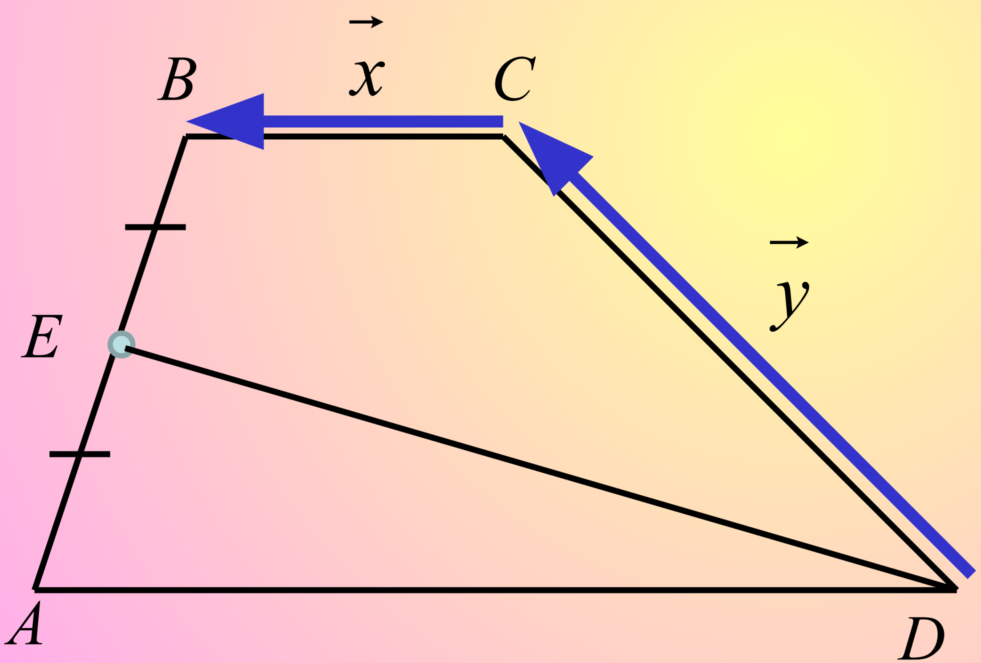
Прямая, проведенная через середины оснований трапеции проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон.



В трапеции ABCD основания AD и BC относятся как 3 : 1, E – середина стороны AB.

Докажите:

$$DE = \frac{2}{3}DA + \frac{1}{2}DC$$



$$\overrightarrow{DA} = 3\overrightarrow{CB} = 3\vec{x}$$

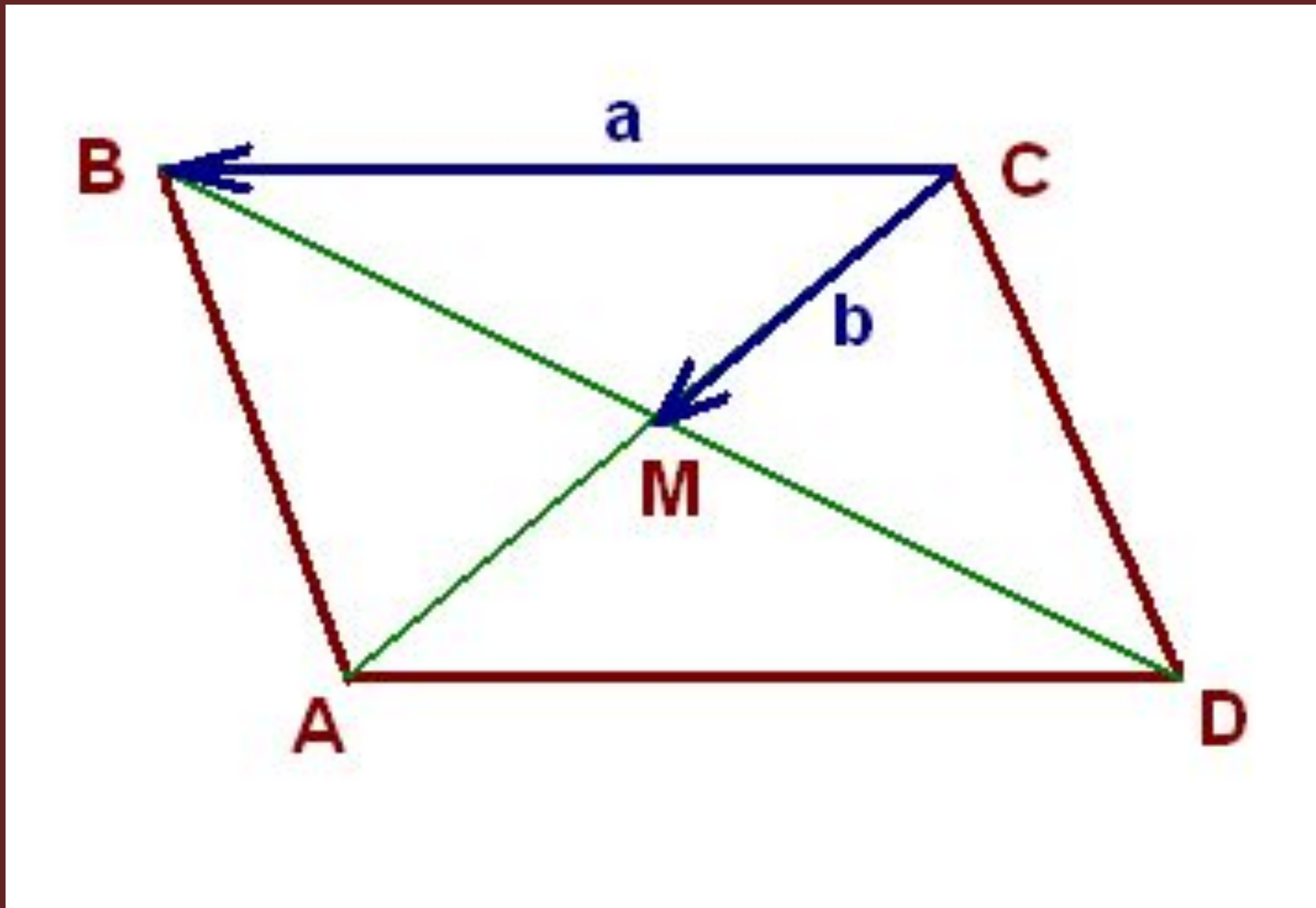
$$\vec{x} = \frac{\overrightarrow{DA}}{3}$$

$$\overrightarrow{BA} = \ldots \qquad \overrightarrow{DE} = \ldots$$

$$\overrightarrow{DE} = 2\vec{x} + \frac{\vec{y}}{2} = 2\frac{\overrightarrow{DA}}{3} + \frac{\overrightarrow{DC}}{2}$$

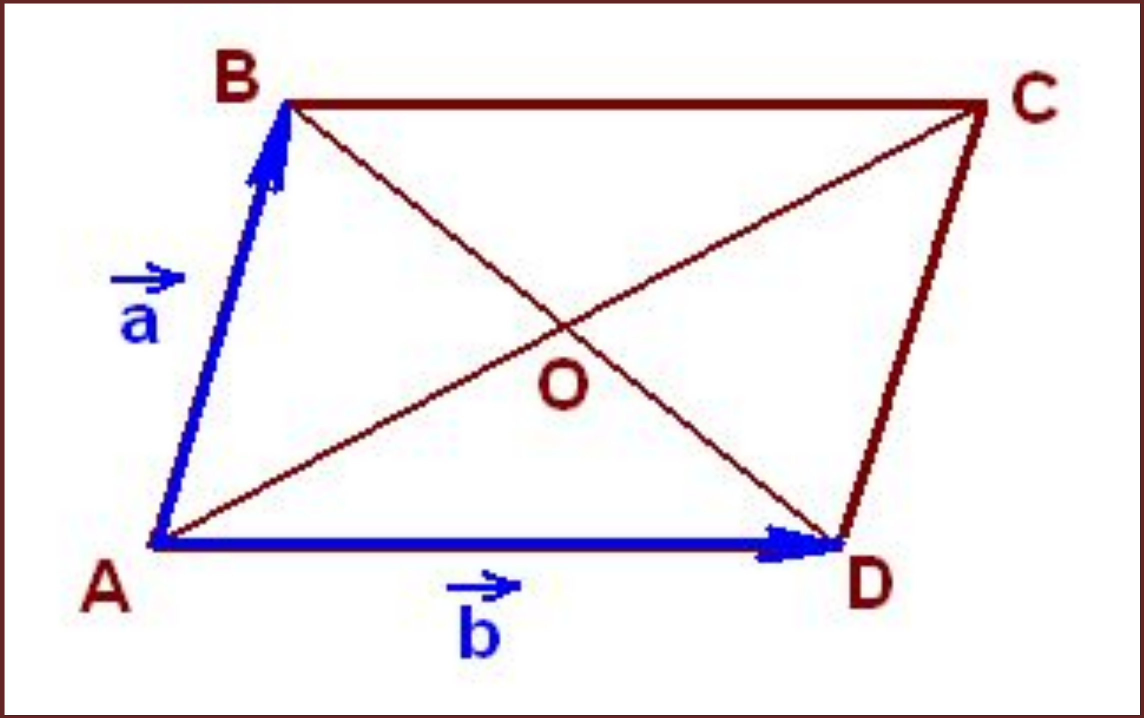
$$\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

Выразить векторы $\vec{AM}$, $\vec{DA}$, $\vec{CA}$, $\vec{MB}$, $\vec{CD}$ через вектор $\vec{a}$ и вектор $\vec{b}$

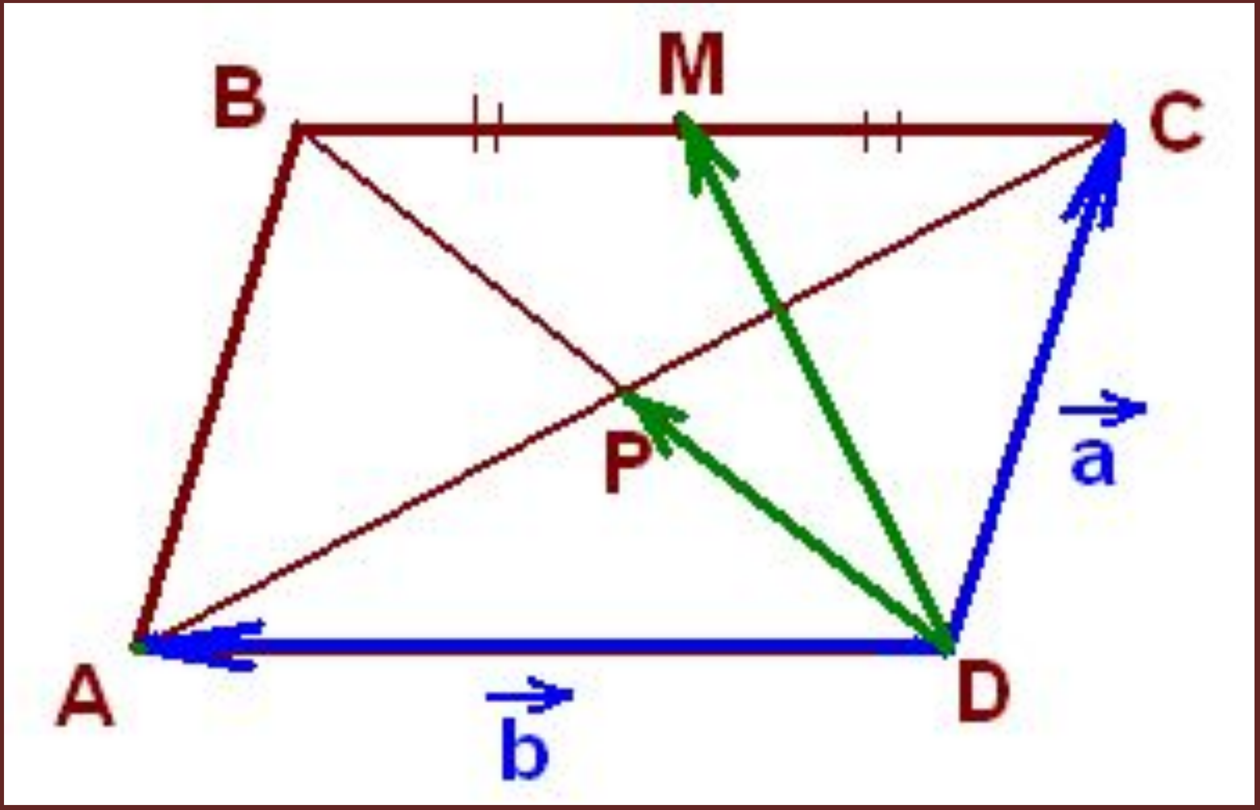


Домашнее задание

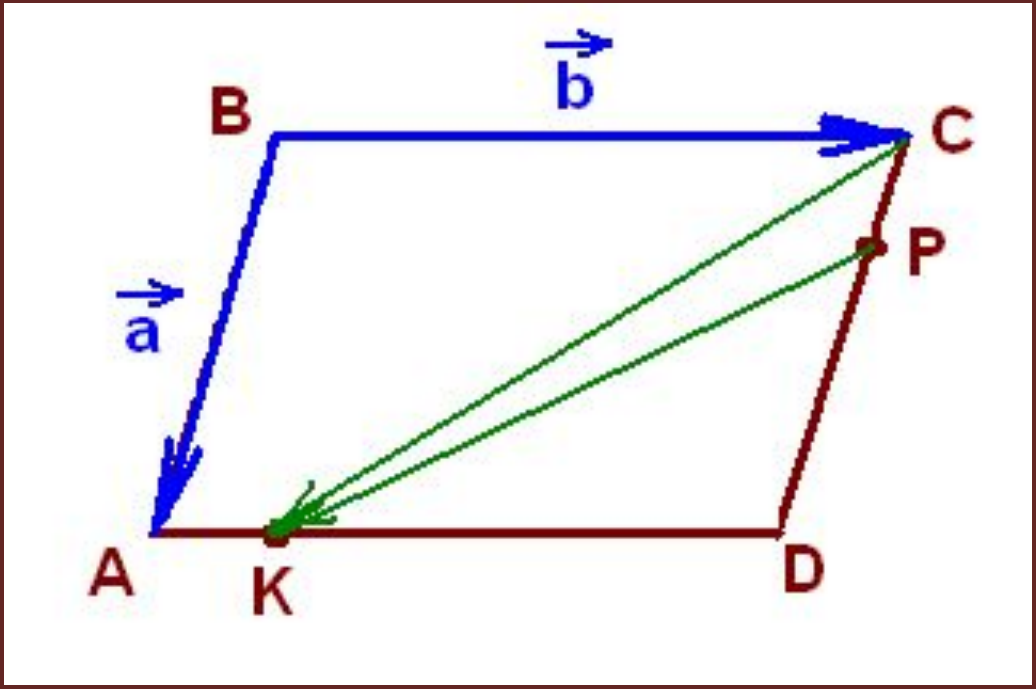
№ 1 Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$



№ 2 Выразить векторы $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$



№ 3 Дан параллелограмм ABCD.
CP : PD = 2 : 3; AK : KD = 1 : 2.
Выразить векторы $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{PK}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$



№ 4 Дан прямоугольник ABCD.

BK : KC = 3 : 4.

Выразить векторы $\vec{AK}$, $\vec{DK}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$